

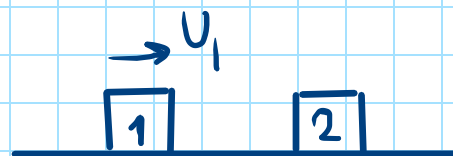
Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Κρούσεις-Στερεό-Αρμονική Ταλάντωση

Σύνολο Σελίδων: Δέκα (10) - Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες
Σάββατο 1 Αυγούστου 2026

Θέμα Α $\rightarrow$ (γ), (γ), (δ), (δ) | Α, Σ, Α, Α, Α

Β.1 $\rightarrow$ (γ)



Αν είναι ελαστική $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} u_1$, $K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Αν είναι πλαστική $\rightarrow$ Α Δ Ο

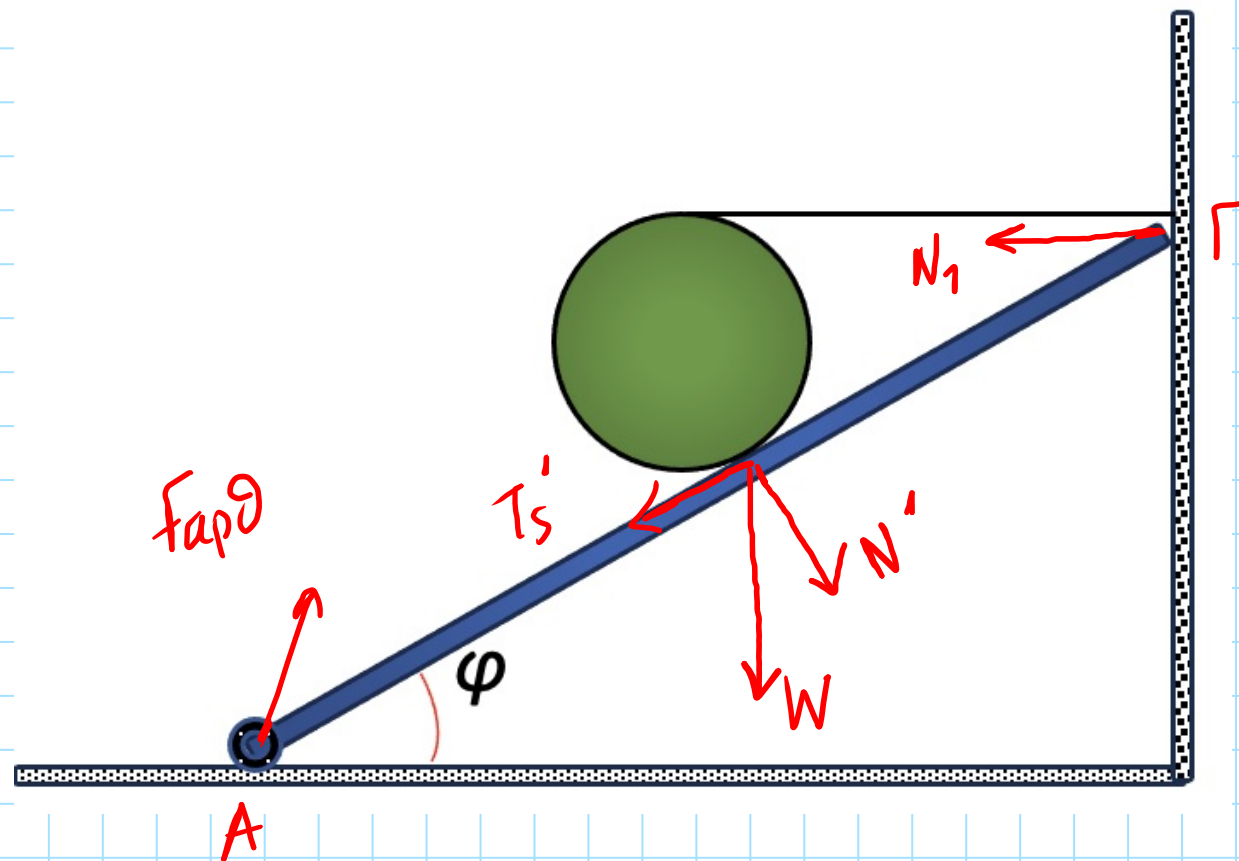
$$\vec{p}_{\text{αριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m_1 u_1 = (m_1 + m_2) v_k, \quad K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2$$

$$v_k = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad / \quad v_2' = 2v_k$$

$$K_2 = K \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 (2U_k)^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) U_k^2 \Rightarrow 4m_2 = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow m_1 = 3m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$

B.2 $\rightarrow$ (γ)

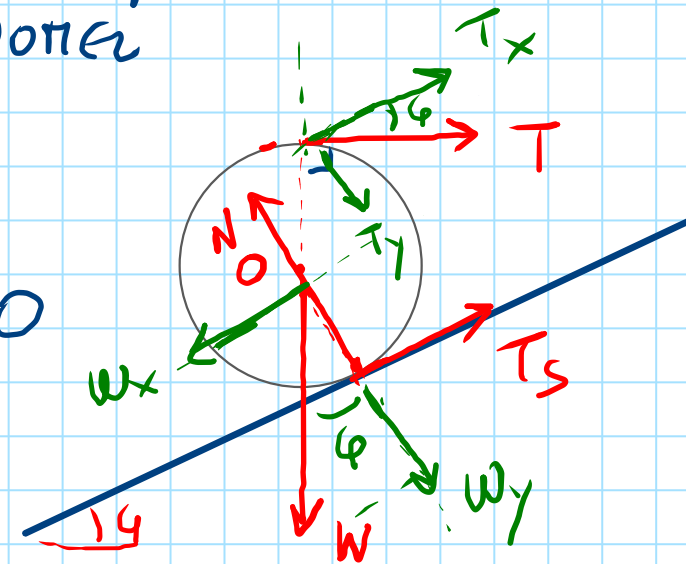


○ Δίκες Ισορροπίας

$$\checkmark \sum \tau_{(O)} = 0$$

$$-T \cdot R + T_s \cdot R = 0$$

$$\underline{T = T_s}$$



$$\checkmark \sum F_x = 0 \Rightarrow T_x + T_s - W_x = 0$$

$$T \cos 60^\circ + T - W \sin 60^\circ = 0$$

$$\frac{3T}{2} = W \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T = W \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \sum F_y = 0 \Rightarrow N - W_y - T_y = 0$$

$$N = W \cos 60^\circ + T \sin 60^\circ \Rightarrow N = W \frac{1}{2} + W \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

Αρα $N = W_δ$ η κάθετη δύναμη που ασκεί η ράβδος στον δίσκο.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για την ισορροπία} \\ \text{της ράβδου} \end{array} \right\} \begin{aligned} \sum \tau(A) &= 0 \Rightarrow \tau_{N_1(A)} + \cancel{\tau_{T'_S(A)}} + \tau_{N'(A)} + \tau_{W(A)} + \cancel{\tau_{F_{αρθ}(A)}} = 0 \\ &\Rightarrow N_1 \cdot l \cdot \sin 60 - N' \frac{l}{2} - W \cdot \frac{l}{2} \cos 60 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Από δράση - Αντίδραση} \\ \vec{N}' = -\vec{N} \\ \vec{T}'_S = -\vec{T}_S \end{array} \right)$$

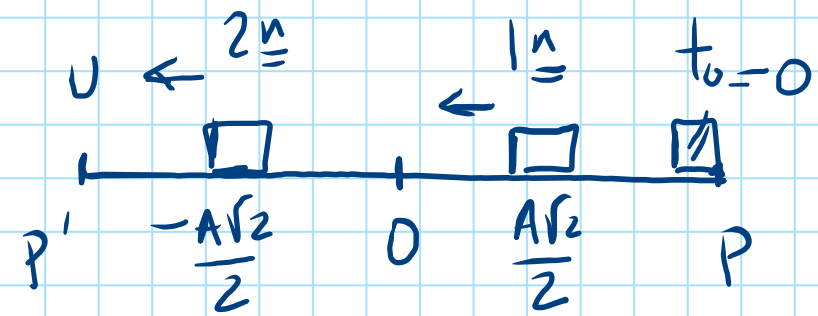
$$\Rightarrow N_1 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = W_δ \frac{l}{2} + W \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$N_1 \sqrt{3} = W_δ + \frac{2W_δ}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{2W_δ}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{W}{\sqrt{3}} = \frac{W\sqrt{3}}{3}$$

B.3 $\rightarrow$ (B)

$$\text{Από την ΑΔΕΤ } E = K + U \xrightarrow{K=U} E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = 2 \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2}$$

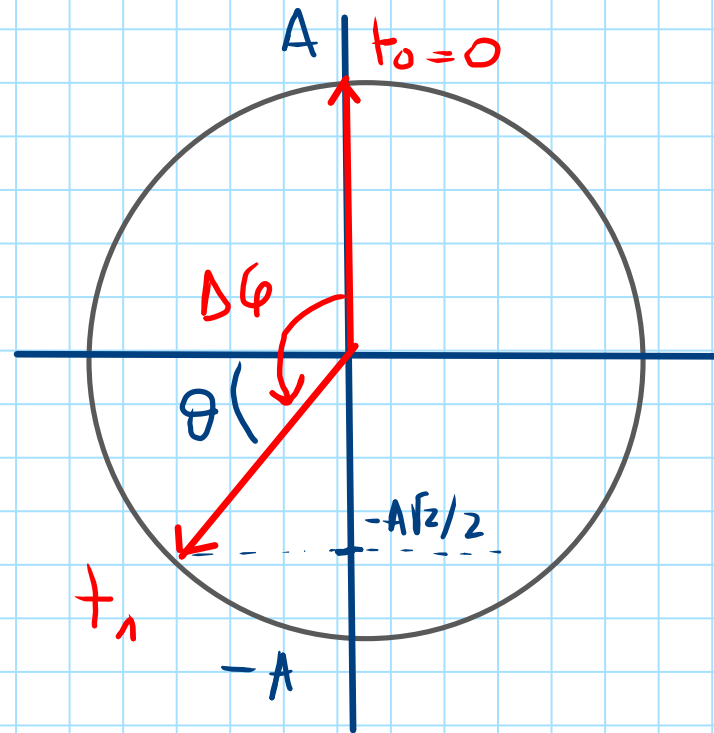


στη t_1 βρίσκεται στην
θέση $x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$ με $v < 0$

Από σχήμα $\sin\theta = \frac{A\sqrt{2}/2}{A}$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

από όταν $K=U \rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$



όταν το διάνυσμα θέσης
αφαιρεθεί, οι προβολές του
επιτελούν αστ.

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{4(t_1 - 0)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_1 = \frac{3\pi}{4\omega}}}$$

* Β' τρόπος : στη $t_0 = 0 \rightarrow x = +A \mid A = A\sin(\phi_0) \Rightarrow \sin\phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2}$

Από $x = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ στη t_1 έχουμε στην $x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{A\sqrt{2}}{2} &= A\sin(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \\ \sin(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega t_1 + \frac{\pi}{2} &= 2\pi - \frac{\pi}{4} \\ \omega t_1 + \frac{\pi}{2} &= 2\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\rightarrow t_1 < 0 \text{ από} \\ &\omega t_1 = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4\omega}}} \end{aligned} \right\} (k=0)$$

Θέμα Γ

Από το διάγραμμα δύναμης - απομάκρυνσης έχουμε ότι $A = 0,2\text{m}$ και $\Sigma F_{\max} = 20\text{N}$. Από αυτόν $\Sigma F_{\max} = D \cdot A \Rightarrow \underline{D = 100\text{N/m}}$

Γ.1

Η απόσταση ανάμεσα στις αμφοτέρω θέσεις είναι $\delta = 2A = 0,4\text{m}$

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = 10\text{r/s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi\text{s}$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα για μετάβαση από την μια αμφοτέρα θέση στην άλλη είναι $\Delta t = \frac{T}{2} = 0,1\pi\text{s}$.

Γ.2

Από το διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου έχουμε ότι την $t_0 = 0 \rightarrow x = +A$ | $A = A\mu(0 + \phi_0) \Rightarrow \mu\phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$

$$\frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 \cdot x = -\omega^2 A \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -20 \mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$$

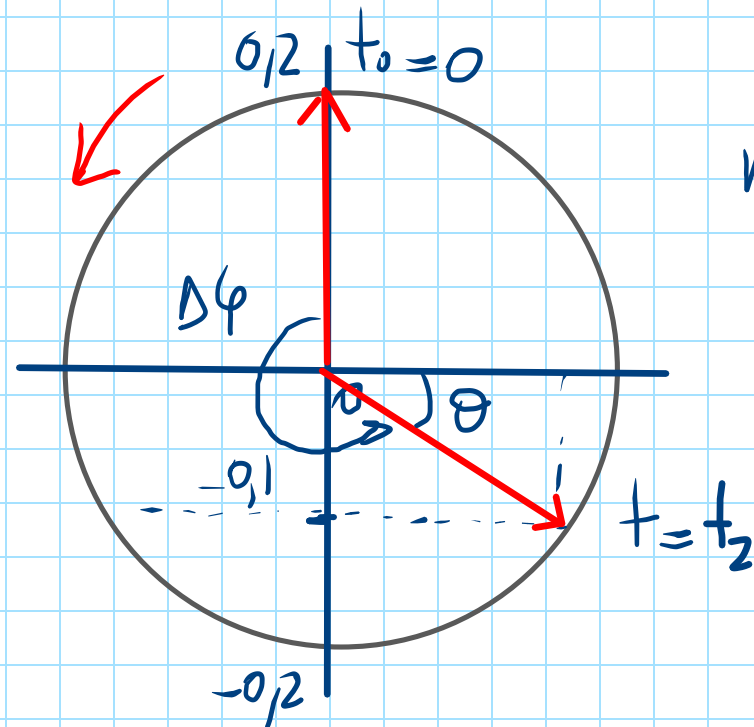
Γ.3

$$W_{F_{\text{ελ}}}^{0 \rightarrow t_1} = U(0) - U(t_1) = \frac{1}{2} D A^2 - 0 \Rightarrow \underline{W_{F_{\text{ελ}}}^{0 \rightarrow t_1} = 2 \text{ Joule}}$$

Γ.4

$x = -0,1 \text{ m}$ για να επιταχυνεί πρέπει να κινείται προς την ΘΙΤ από $U > 0$

Αναπαράσταση
σφαιρικού
διανύσματος



$$\mu \theta = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta \phi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{όμως } \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \omega \Rightarrow \Delta t = t_2 - 0 = \frac{4\pi}{30}$$

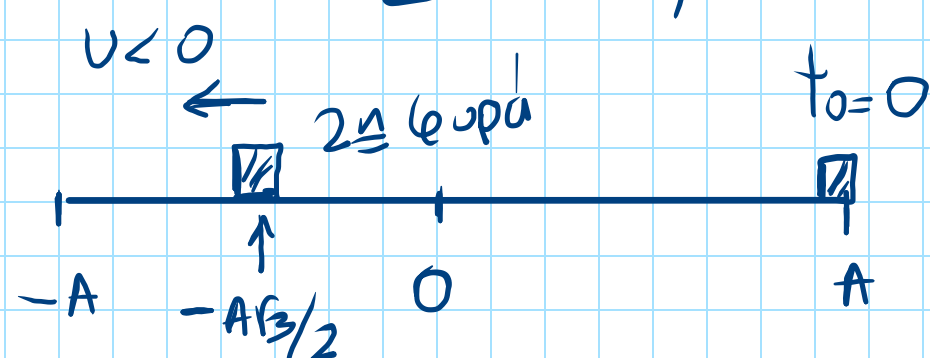
$$\underline{t_2 = \frac{2\pi}{15} \text{ sec}}$$

7.5

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\sum F \cdot v = -(-D \cdot x) \cdot v = D \cdot x \cdot v$$

$$K = \frac{1}{3} U$$

$$\text{ADET: } E = K + U \Rightarrow E = \frac{U}{3} + U = \frac{4U}{3}$$



$$\frac{1}{2} DA^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

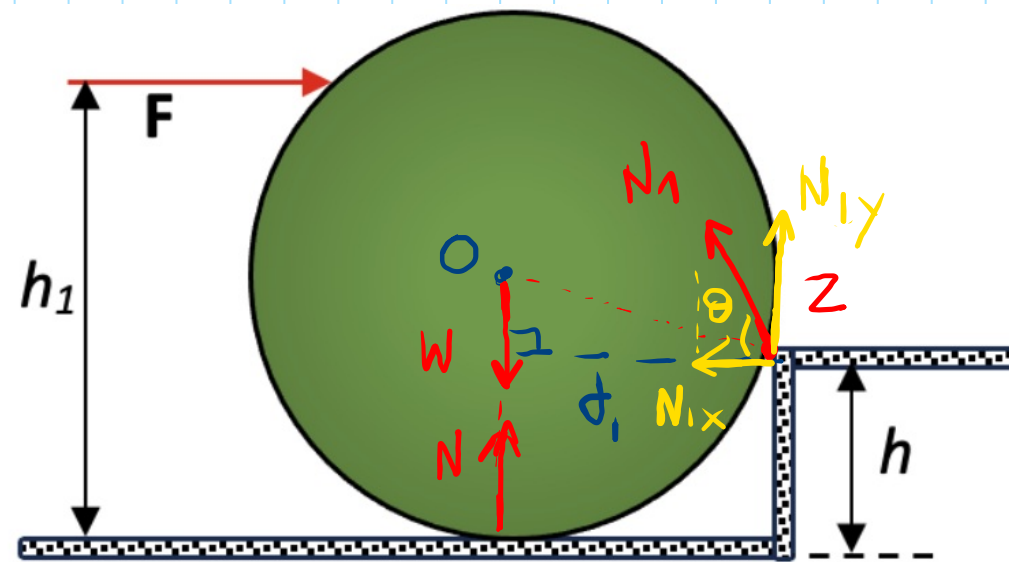
$$\text{ADET: } E = K + U \Rightarrow E = K + 3K = 4K$$

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 4 \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \pm \frac{v_{\max}}{2}$$

$$\text{Apr } \frac{dU}{dt} = D \left(-\frac{A\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{v_{\max}}{2} \right) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 10\sqrt{3} \text{ J/s}$$

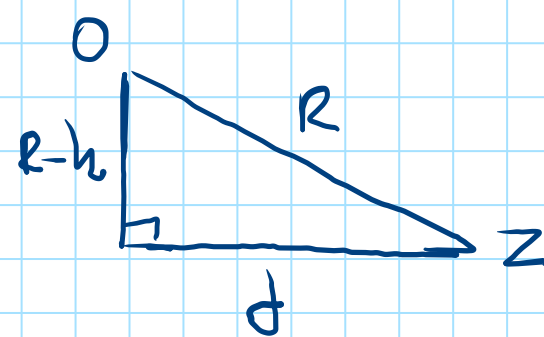
Θέμα Δ

Δ.1



Για να ανέβει το σφαίρι από το έδαφος

$$|\tau_F(z)| \geq |\tau_W(z)| \Rightarrow F(h_1 - h) \geq W \cdot d$$



$$R^2 = (R-h)^2 + d^2 \quad \left| \quad F \geq \frac{Mg d}{h_1 - h} \right.$$

$$\Rightarrow d = 0,4 \text{ m} \quad \left| \quad F \geq 80 \text{ N} \right.$$

Άρα $F_{\min} = 80 \text{ N}$

Δ.2

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = N_{1x}$$

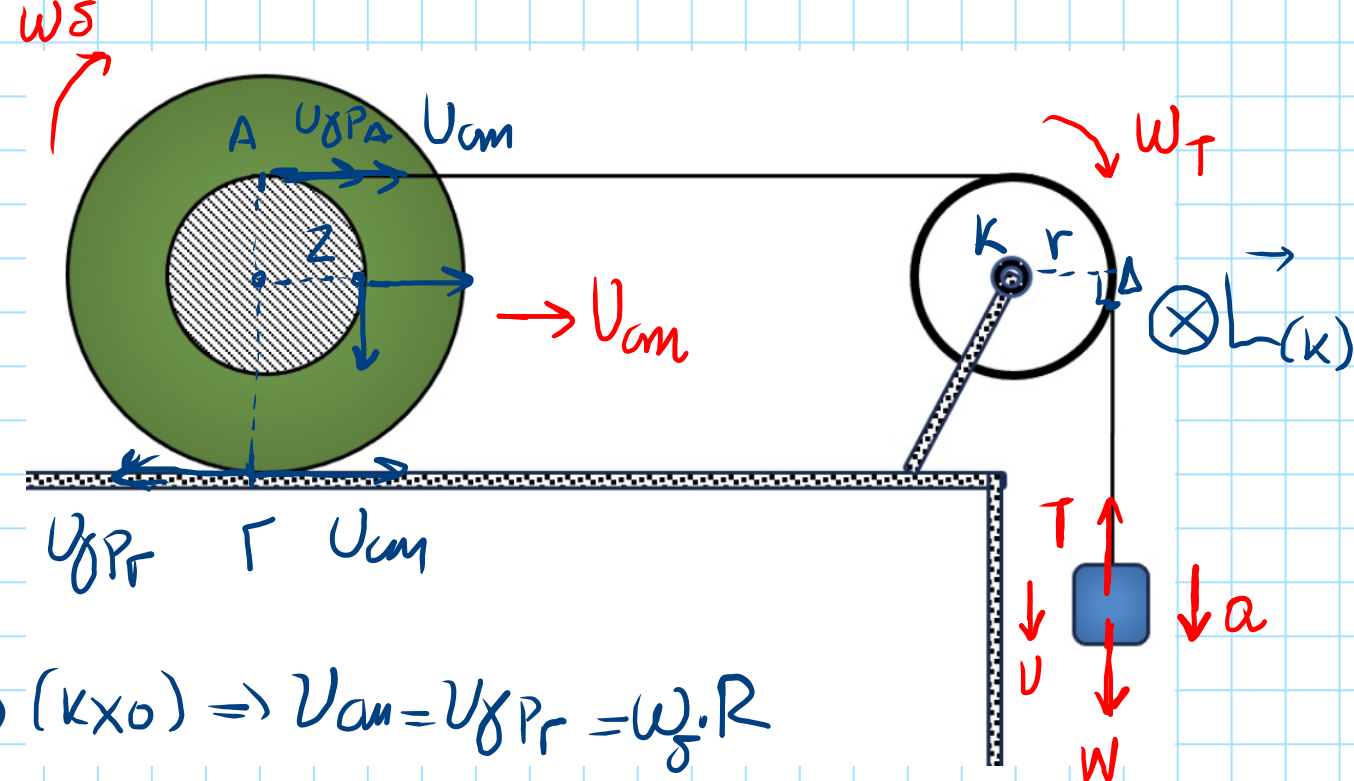
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2y} + N = Mg$$

που επιθυμώ να είναι να ανέβει $N=0$
και $F=80 \text{ N}$.

$$N_1 = \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1y}^2} = \sqrt{80^2 + 100^2}$$

$$N_1 = 10\sqrt{164} \text{ N}, \quad \tan \theta = \frac{N_{1y}}{N_{1x}} = \frac{5}{4}$$

$\Delta.3$



$$v_P = 0 \text{ (KXO)} \Rightarrow v_{cm} = v_{AP} = \omega \cdot R$$

$\Delta.4$

$$v_A = v_{\Delta} = v$$

$$v_{cm} + v_{AP} = v \Rightarrow v_{cm} + \omega \cdot r = v$$

$$\Rightarrow v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} \cdot \frac{R}{2} = v \Rightarrow \frac{3v_{cm}}{2} = v$$

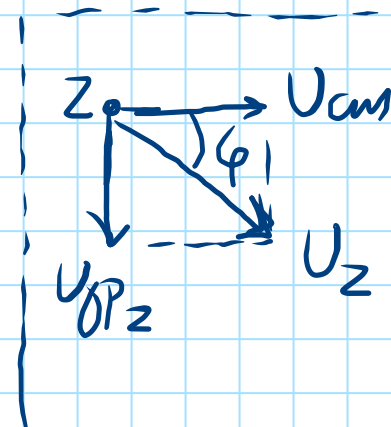
$$\text{inv } t_1 = 2s \rightarrow v = at_1 = 6m/s$$

$$\text{on } t_1 \in v_{cm} = 4m/s$$

$$h_{(K)} = m \cdot v \cdot r \quad \left. \begin{array}{l} \\ v = a \cdot t \end{array} \right\} h_{(K)} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\frac{dh}{dt} = \sum \tau_{(K)} = (\omega - T) \cdot r = \sum F \cdot r$$

$$\frac{dh}{dt} = m a \cdot r \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0,75 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$



$$v_Z = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega \cdot r)^2}$$

$$v_Z = \sqrt{v_{cm}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5v_{cm}^2}{4}}$$

$$v_Z = 2\sqrt{5} \text{ m/s}$$

$$\cos \phi = \frac{v_{Pz}}{v_{cm}} = \frac{\omega \cdot r}{v_{cm}} = \frac{1}{2}$$

Δ.5

$$v_A = v_B \Rightarrow v_{cm} + \omega_S r = \omega_C \cdot r$$

$$\Rightarrow \omega_S R + \omega_S \frac{R}{2} = \omega_C \frac{R}{2} \Rightarrow 3\omega_S = \omega_C$$

$$\Rightarrow 3 \frac{d\theta_S}{dt} = \frac{d\theta_C}{dt} \Rightarrow \Delta\theta_C = 3\Delta\theta_S$$

$$\Rightarrow N_C \cdot 2\pi = 3 N_S \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{N_C}{N_S} = 3$$

#perifysikhs

Δ.6

$$l_{vnp} = r \cdot \Delta\theta_S = \frac{R}{2} \Delta\theta_S, \text{ αφού}$$

$$\frac{3v_{cm}}{2} = v \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{3}{2} R \Delta\theta_S = \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \Delta x_{cm} = \Delta x$$

$$3 l_{vnp} = \Delta x$$

$$\text{αφού } v_{cm} = \omega_S \cdot R \Rightarrow \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{d\theta_S}{dt} R$$

$$l_{vnp} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} a t^2 = 2m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{cm} = R \Delta\theta_S$$