

---

# Μηχανική Στερεού Σώματος

## 3ο Σετ Ασκήσεων - Οκτώβριος 2022

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου

<http://www.perifysikhs.com>

---

### 1. Θέμα Α - Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

**1.1.** Αν στερεό σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση τότε:

- (α) Η κίνηση του είναι οπωσδήποτε ευθύγραμμη.
- (β) Όλα τα σημεία του στερεού έχουν ίδια ταχύτητα.
- (γ) Το σώμα αλλάζει προσανατολισμό.
- (δ) Το τμήμα που ενώνει 2 τυχαία σημεία του στερεού περιστρέφεται.

**1.2.** Σώμα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σώμα. Η γωνιακή του ταχύτητα:

- (α) Είναι διανυσματικό μέγεθος που σχηματίζει τυχαία γωνία  $\varphi$  με τον άξονα περιστροφής.
- (β) Έχει μονάδα μέτρησης το  $1\text{rad}/\text{sec}^2$ .
- (γ) Έχει μέτρο που ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που διαγράφει μια τυχαία ακτίνα του στερεού.
- (δ) Αν η κίνηση είναι ομαλή στροφική τότε έχει μέτρο που συνεχώς αυξάνεται.

**1.3.** Ένα στερεό εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σώμα:

- (α) Όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα περιστροφής το μέτρο της ταχύτητας των διαφόρων σημείων μειώνεται.
- (β) Όλα τα σημεία του στερεού εκτελούν κυκλική κίνηση.
- (γ) Υπάρχουν σημεία του στερεού που είναι διαρκώς ακίνητα.
- (δ) Όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα.

**1.4.** Ένας τροχός εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, ξεκινώντας από την ηρεμία και επιταχύνεται με γωνιακή επιτάχυνση που συνεχώς αυξάνεται:

(α) η γραμμική ταχύτητα του στερεού αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο.

(β) Η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  του τροχού δίνεται από την σχέση  $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$ .

(γ) Η στιγμιαία γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού συνδέεται με την στιγμιαία γωνιακή του ταχύτητα  $\omega$  με την σχέση  $v = \omega \cdot R$ .

(δ) Η γωνία που διαγράφει ο τροχός υπολογίζεται από την σχέση  $\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ .

**1.5.** Η στροφορμή ενός υλικού σημείου

(α) είναι ένα μονόμετρο μέγεθος που έχει μέτρο  $mvr$ .

(β) είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ορμής του σώματος.

(γ) έχει μονάδα μέτρησης το  $1kg \cdot m/s$ .

(δ) είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η ορμή του σώματος και η ακτίνα περιστροφής.

**1.6.** Εάν η στροφορμή ενός υλικού σημείου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα παραμένει σταθερή, τότε η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα

(α) είναι ίση με το μηδέν.

(β) είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός.

(γ) αυξάνεται με το χρόνο.

(δ) μειώνεται με το χρόνο.

**1.7.** Η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι σταθερή. Αυτό οφείλεται στο ότι η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο

(α) δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

(β) δημιουργεί μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

(γ) έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης σε ένα σημείο του Ισημερινού της Γης.

(δ) έχει τέτοιο μέτρο που δεν επηρεάζει την περιστροφή της Γης.

**1.8.** Το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος:

- (α) σε ανομοιογενές βαρυτικό πεδίο συμπίπτει με το κέντρο βάρους.
- (β) συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας, αν το σώμα είναι ομογενές και συμμετρικό.
- (γ) αποκλείεται να βρίσκεται έξω από το σώμα.
- (δ) συμπίπτει πάντοτε με ένα σημείο του άξονα περιστροφής του στερεού.

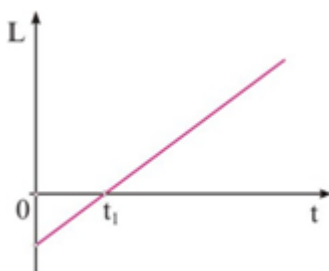
**1.9.** Μηχανικά στερεά θεωρούνται

- (α) όλα τα στερεά σώματα.
- (β) μόνο εκείνα τα στερεά σώματα που έχουν κυλινδρικό σχήμα.
- (γ) τα στερεά σώματα που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις.
- (δ) εκείνα τα σώματα που στρέφονται όταν τους ασκείται ροπή.

**1.10.** Ένα ελεύθερο στερεό στο οποίο ασκείται ζεύγος δυνάμεων μπορεί να:

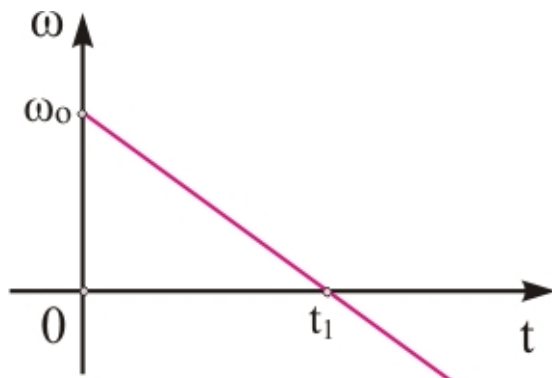
- (α) κάνει μόνο μεταφορική κίνηση.
- (β) κάνει μόνο στροφική κίνηση.
- (γ) κάνει σύνθετη κίνηση.
- (δ) παραμένει ακίνητο.

**1.11.** Στο διπλανό διάγραμμα δείχνεται η στροφορμή ενός υλικού σημείου σε σχέση με το χρόνο. Για την κίνηση του σώματος ισχύει ότι



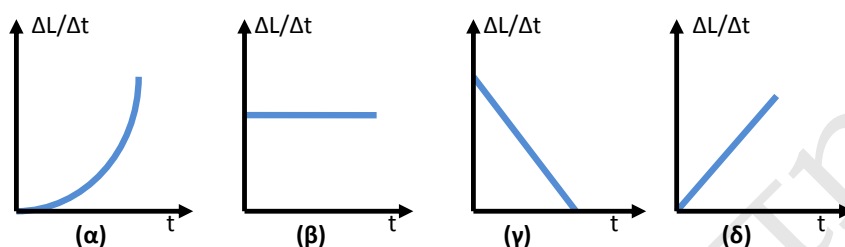
- (α) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι μηδέν.
- (β) η συνισταμένη ροπή που του ασκείται είναι μηδέν.
- (γ) η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν.
- (δ) ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερός.

- 1.12.** Ένας οριζόντιος δίσκος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Το διάγραμμα παριστάνει τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο. Κατά την περιστροφή του δίσκου και στο χρονικό διάστημα 0 έως  $t_1$  τα διανύσματα της γωνιακής επιτάχυνσης και της γωνιακής ταχύτητας βρίσκονται



- (α) σε άξονες κάθετους μεταξύ τους.  
 (β) σε άξονες παράλληλους που απέχουν μεταξύ τους όσο η ακτίνα του δίσκου.  
 (γ) στον ίδιο άξονα και έχουν αντίθετη κατεύθυνση.  
 (δ) στον ίδιο άξονα και έχουν ίδια κατεύθυνση.
- 1.13.** Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος, που εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής
- (α) έχει διεύθυνση κάθετη στον άξονα περιστροφής  
 (β) έχει κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας  
 (γ) έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας  
 (δ) έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της αρχικής του γωνιακής ταχύτητας.
- 1.14.** Για να διατηρεί ένα σώμα την περιστροφική του κατάσταση σταθερή πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να :
- (α) είναι σταθερό και διάφορο του μηδενός.  
 (β) είναι μηδέν.  
 (γ) αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.  
 (δ) μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

- 1.15.** Ένα σώμα μικρών διαστάσεων κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα εκτελώντας κυκλική κίνηση. Ασκούμε στο σώμα μια δύναμη σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς παράλληλη με την γραμμική του ταχύτητα. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος, σε συνάρτηση με τον χρόνο;



- 1.16.** Να γράψετε δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.

- (α) Η ροπή μιας δύναμης είναι μηδέν αν ο φορέας της δύναμης περνά από τον άξονα περιστροφής.
- (β) Σε ένα ρολόι με δείκτες, η γωνιακή ταχύτητα του ωροδείκτη είναι ομόροπη με τη γωνιακή ταχύτητα του λεπτοδείκτη.
- (γ) Κάθε χρονική στιγμή, στην κύλιση, η ταχύτητα του σημείου επαφής του κάθε τροχού με τον δρόμο είναι ίση με μηδέν.
- (δ) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
- (ε) Σε ένα αυτοκίνητο που κινείται προς το Βορρά, η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας των τροχών του είναι προς τη Δύση.
- (στ) Η γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής του ταχύτητας.
- (ζ) Η ροπή μιας δύναμης  $\vec{F}$  ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής.
- (η) Η κίνηση ενός τροχού που κυλίζει είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

## 2. Θέμα Β - Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αιτιολόγηση

- 2.1.** Μία οριζόντια ράβδος ΑΒ μήκους  $L$  εκτελεί στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με  $\omega$  γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της Α. Το μέσο Μ της ράβδου έχει κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με:

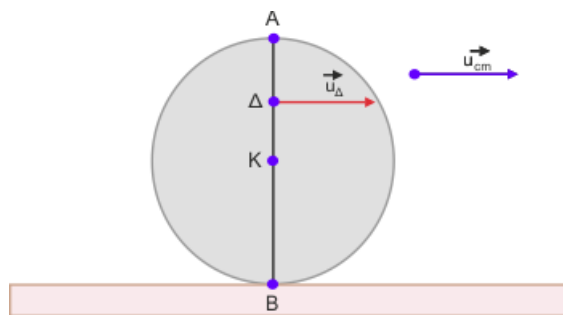
(α)  $\alpha_k = \omega^2 L$

(β)  $\alpha_k = \omega^2 \frac{L}{2}$

(γ)  $\alpha_k = \omega^2 \frac{L}{4}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.2.** Τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή το σημείο Δ βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχει από το κέντρο Κ απόσταση  $\frac{R}{2}$  (βρίσκεται πάνω από το Κ). Εάν η ταχύτητα του Δ είναι  $v_\Delta$ , η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:



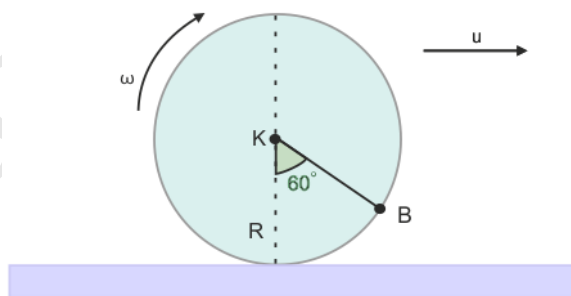
(α)  $v_{cm} = \frac{3}{2}v_\Delta$

(β)  $v_{cm} = \frac{2}{3}v_\Delta$

(γ)  $v_{cm} = \frac{1}{2}v_\Delta$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.3.** Τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα  $v_{cm}$ . Το Β βρίσκεται στην περιφέρεια του τροχού και η επιβατική του ακτίνα σχηματίζει με την κατακόρυφη διάμετρο γωνία  $60^\circ$ .



Το μέτρο της ταχύτητας του Β είναι:

(α)  $v_B = v_{cm}$

(β)  $v_B = v_{cm}\sqrt{2}$

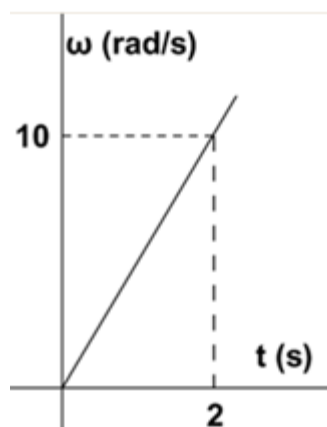
(γ)  $v_B = \frac{v_{cm}}{2}$

(δ)  $v_B = \frac{3v_{cm}}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.4.** Δίσκος ακτίνας  $R = 0,3m$  κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

**A.** η ταχύτητα του κέντρου μάζας την χρονική στιγμή  $t_1 = 2s$  είναι:



(α)  $v_{cm} = 50\text{ m/s}$

(β)  $v_{cm} = 2\text{ m/s}$

(γ)  $v_{cm} = 5\text{ m/s}$

**B.** Το διάστημα που έχει διανύσει ο δίσκος μέχρι την χρονική στιγμή  $t = 2\text{ s}$  είναι:

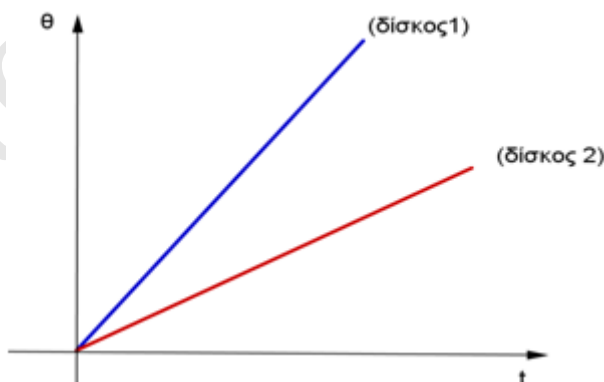
(α)  $S = 2\text{ m}$

(β)  $S = 4\text{ m}$

(γ)  $S = 50\text{ m}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.5.** Δυο ομογενείς δίσκοι στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο τους. Στο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνία που διαγράφει κάθε δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

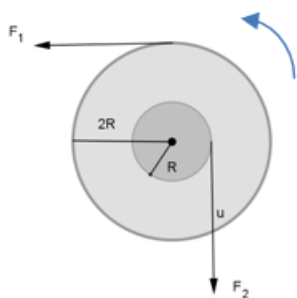


- (α) οι δυο δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση (μη μηδενική).  
 (β) οι δίσκοι εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση με διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.  
 (γ) οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή στροφική κίνηση και η γωνιακή ταχύτητα του πρώτου κάθε χρονική στιγμή είναι μεγαλύτερη από την γωνιακή ταχύτητα του δεύτερου την ίδια χρονική στιγμή.

(δ) σε ίσους χρόνους ο (δίσκος 2) θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές από τον (δίσκο 1).

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη και να δικαιολογηθεί ο χαρακτηρισμός της κάθε πρότασης.

- 2.6.** Οι δύο ομόκεντροι δίσκοι του διπλανού σχήματος μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους.



Οι δίσκοι είναι κολλημένοι και μπορούν να περιστρέφονται σαν ένα σώμα. Ασκούμε στους δίσκους τις δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  που φαίνονται στο σχήμα και τελικά παρατηρούμε ότι το σύστημα ισορροπεί. Για τις δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  ισχύει:

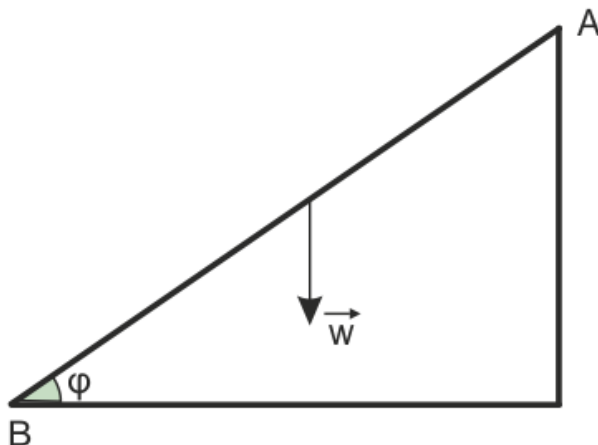
(α)  $F_1 = 2F_2$

(β)  $F_2 = 2F_1$

(γ)  $F_1 = F_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

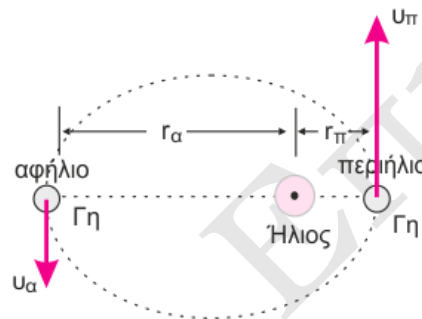
- 2.7.** Η ράβδος AB είναι ομογενής, έχει βάρος  $w$  και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει ο τοίχος και το δάπεδο να είναι λεία.
- (β) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείος ο τοίχος και το δάπεδο να έχει τριβή.
- (γ) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείο το δάπεδο και ο τοίχος να έχει τριβή.

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη δικαιολογώντας την επιλογή σας.

- 2.8.** Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο στον Ήλιο ονομάζεται Περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο Αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει  $r_\alpha = 2r_\pi$ , τότε:



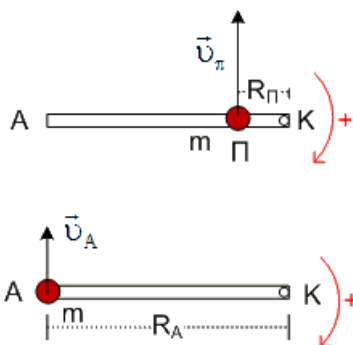
- (α) Για τις ταχύτητες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει  $v_\alpha = 2v_\pi$
- (β) Για τις κινητικές ενέργειες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει  $K_\pi = 4K_\alpha$ .

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

- 2.9.** Ένα σωματίο μάζας  $m$  περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η απόσταση του σωματίου από τον άξονα διπλασιαστεί, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα, η στροφορμή του ως προς τον άξονα περιστροφής:

- (α) διπλασιάζεται.
- (β) τετραπλασιάζεται.
- (γ) παραμένει σταθερή.
- (δ) υποδιπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



- 2.10.** Η οριζόντια ράβδος ΑΚ του σχήματος είναι αβαρής και στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το άκρο της Κ. Η μάζα  $m$  συγκρατείται σε απόσταση  $(ΠΚ)=R_Π$  από τον άξονα περιστροφής και το μέτρο της ταχύτητάς της είναι  $v_Π$ .

Η μάζα αφήνεται ελεύθερη να μετακινηθεί στο σημείο Α που απέχει απόσταση  $(ΑΚ) = R_A = 4R_Π$ . Για το λόγο των κινητικών ενεργειών που έχει η μάζα  $m$  στις παραπάνω θέσεις  $K_Π$  και  $K_A$  αντίστοιχα, ισχύει:

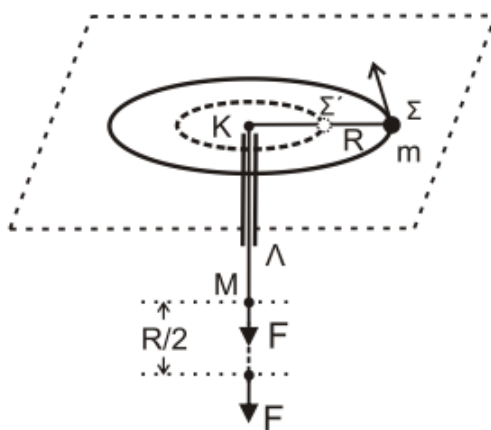
(α)  $\frac{K_Π}{K_A} = 1$

(β)  $\frac{K_Π}{K_A} = 4$

(γ)  $\frac{K_Π}{K_A} = 16$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.11.** Το σφαιρίδιο του σχήματος, μάζας  $m$ , διαγράφει οριζόντιο κύκλο ακτίνας  $ΚΣ = R$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  δεμένο στο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος, το οποίο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Στο άκρο Μ του νήματος ασκείται κατάλληλη δύναμη  $F$ , ώστε αυτό να κινηθεί χωρίς τριβή διαμέσου του σωλήνα μέχρι η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μάζας  $m$  να γίνει  $ΚΣ' = R/2$ .



Σε όλη τη διάρκεια της μεταβολής της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, θεωρούμε ότι το σφαιρίδιο κινείται εκτελώντας κυκλική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το έργο της δύναμης  $F$  για τη μετακίνηση του σφαιριδίου μάζας  $m$  θα είναι ίσο με:

(α)  $\frac{1}{2}m\omega^2 R^2$

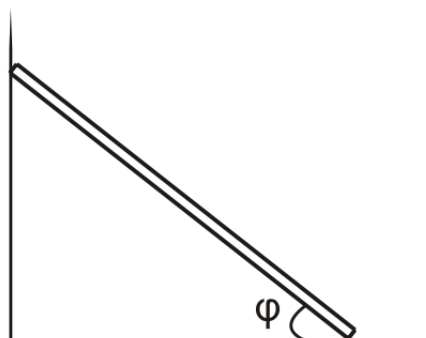
(β)  $\frac{2}{3}m\omega^2 R^2$

(γ)  $\frac{3}{2}m\omega^2 R^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

**Πανελλήνιες - Ιούνης 2018**

- 2.12.** Λεπτή ομογενής σκάλα βάρους  $w$  Ισορροπεί, ακουμπώντας σε λείο κατακόρυφο τοίχο και τραχύ οριζόντιο δάπεδο, όπως στο σχήμα 1. Εάν  $\mu$  ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και οριζοντίου δαπέδου, τότε η ελάχιστη τιμή της εφαπτομένης της γωνίας  $\phi$ , για την οποία η σκάλα ισορροπεί, είναι ίση με



Σχήμα 1

(α)  $\epsilon\phi\phi = \frac{1}{\mu}$

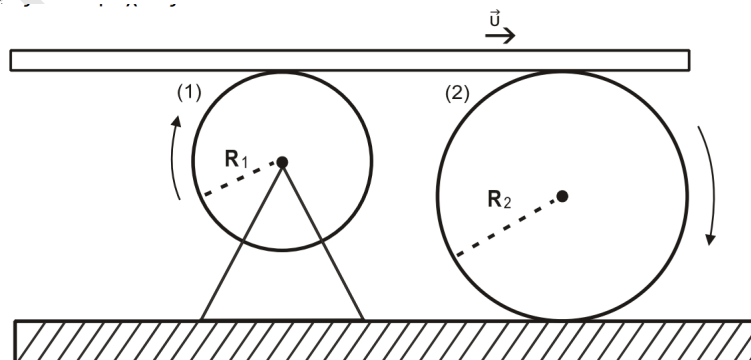
(β)  $\epsilon\phi\phi = \frac{1}{2\mu}$

(γ)  $\epsilon\phi\phi = \frac{3}{2\mu}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

**Πανελλήνιες - Ιούνιος 2021**

- 2.13.** Λεπτή σανίδα κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα  $\vec{v}$ , χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε δύο τροχούς (1) και (2) αντίστοιχα όπως στο σχήμα 3. Ο τροχός (1) ακτίνας  $R_1$  περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα χωρίς τριβές και ο τροχός (2) ακτίνας  $R_2 = \lambda R_1$  (όπου  $\lambda > 1$ ) κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει. Όταν η σανίδα σε χρόνο  $t$  έχει μετακινηθεί κατά  $x$  οι δύο τροχοί έχουν κάνει  $N_1$  και  $N_2$  περιστροφές αντίστοιχα. Ο λόγος των περιστροφών  $\frac{N_1}{N_2}$  των δύο κυλίνδρων είναι ίσος με:



Σχήμα 3

(α)  $\lambda$

(β)  $2\lambda$

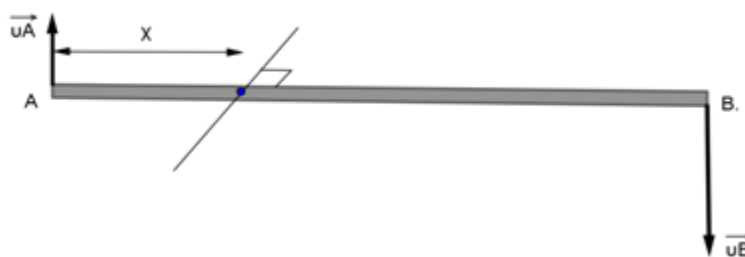
(γ)  $4\lambda$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

**Πανελλήνιες - Σεπτέμβριος 2021**

### 3. Θέμα Γ - Ασκήσεις

- 3.1.** Μια ράβδος AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από ένα σημείο πάνω στη ράβδο. Το άκρο A έχει γραμμική ταχύτητα που έχει μέτρο  $v_A = 1\text{ m/s}$  ενώ το άκρο B έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου  $v_B = 30\text{ m/s}$



Αν το μήκος της ράβδου είναι  $\ell = 40\text{ cm}$  να βρεθούν:

- (α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.
- (β) Η απόσταση που απέχει το άκρο A της ράβδου από τον άξονα περιστροφής.
- (γ) Η γωνία στροφής της ράβδου σε χρόνο  $\Delta t = 2\text{ s}$ .
- (δ) Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στον παραπάνω χρόνο.

- 3.2.** Ένας τροχός που αρχικά ηρεμεί αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του. Μετά από  $t = 10\text{ s}$  ο τροχός έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα  $\omega = 40\text{ rad/s}$ .



- (α) Να βρεθεί η γωνιακή του επιτάχυνση.
- (β) Να γίνει το διάγραμμα  $\omega - t$  για τον τροχό έως την  $t = 10\text{ s}$ .

(γ) Να βρεθεί η γωνία που διαγράφει ο τροχός από το 3ο έως το 7ο δευτερόλεπτο της κίνησης του.

(δ) Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών του τροχού από την  $t = 0$  έως την  $t = 10s$

**3.3.** Ένας ποδηλάτης, ενώ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα  $v_0 = 10m/s$ , ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , να κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση  $\alpha = 1m/s^2$ . Κάθε τροχός του ποδηλάτου έχει ακτίνα  $R = 20cm$  και σε απόσταση  $r = 10cm$  από τον άξονα περιστροφής του φέρει στερεωμένο μικρό ανακλαστικό μάζας  $10g$ . Κάθε τροχός του ποδηλάτου κυλίζει. Για τη χρονική στιγμή  $t = 10s$ , να υπολογίσετε:

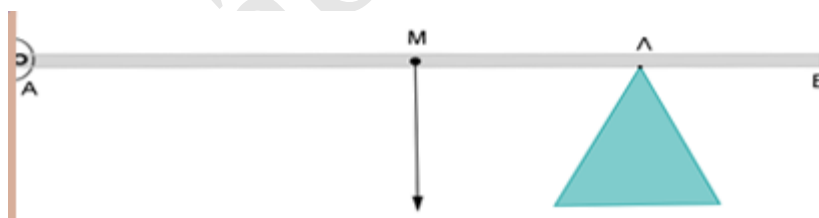
(α) τη μετατόπιση του ποδηλάτου και την ταχύτητα που αυτό θα αποκτήσει.

(β) το μέτρο και την κατεύθυνση της στροφορμής του ανακλαστικού ως προς τον άξονα περιστροφής του τροχού αν το ποδήλατο κινείται στην κατεύθυνση δύσης- ανατολής.

(γ) το μέτρο της ταχύτητας του ανακλαστικού, αν βρίσκεται πάνω από την οριζόντια διάμετρο και η επιβατική ακτίνα του σχηματίζει γωνία  $30^\circ$  με την οριζόντια διάμετρο.

(δ) Για το χρονικό διάστημα από  $0s$  έως  $10s$ , να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες τη γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού σε σχέση με το χρόνο.

**3.4.** Ομογενής ράβδος AB μήκους  $L = 4m$  και βάρους  $w = 100N$  ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και στο σημείο της Λ σε υποστήριγμα (  $ML = L/4$  ), Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.



(α) Να βρεθεί η δύναμη  $N$  που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα.

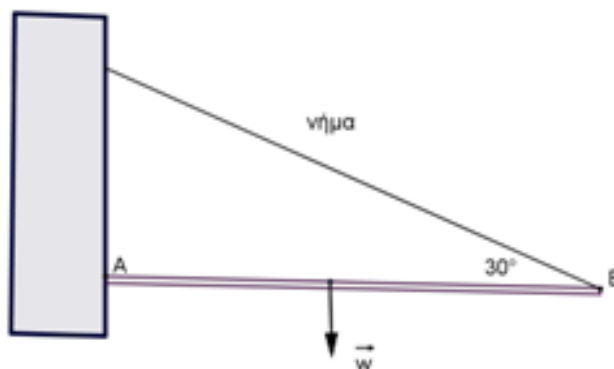
(β) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

(γ) Μετακινούμε το υποστήριγμα και το τοποθετούμε στο Z, το οποίο είναι το μέσο του AM. Πόση είναι πλέον η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στη ράβδο ;

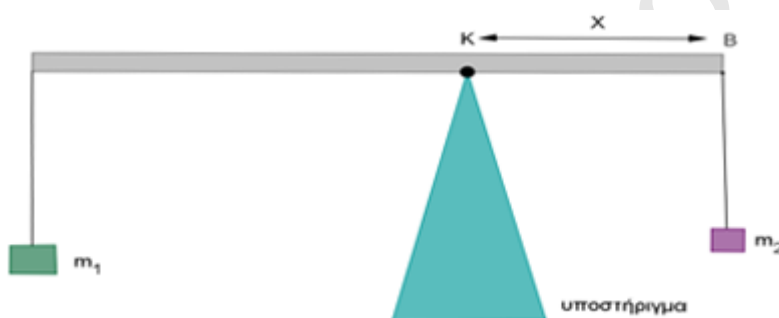
**3.5.** Η ράβδος AB του παρακάτω σχήματος είναι ομογενής, έχει μήκος  $L$  και βάρος  $w = 100N$  και ισορροπεί οριζόντια.

(α) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος.

(β) Στο σημείο A η ράβδος εφάπτεται στον τοίχο. Αν η τριβή που δέχεται η ράβδος είναι μέγιστη δυνατή ώστε να ισορροπεί, να βρεθεί ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τοίχου.

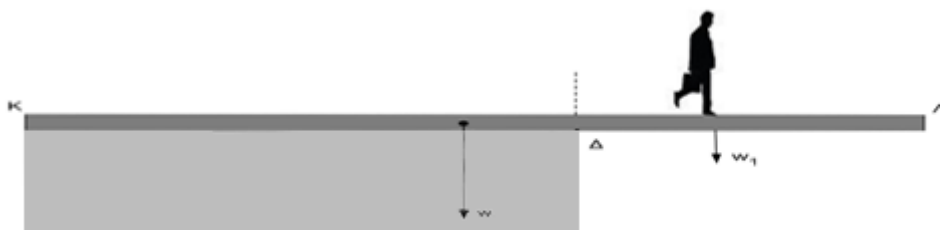


- 3.6.** Στα άκρα A και B της ομογενούς ράβδου μήκους  $L = 1m$  έχουμε κρεμάσει 2 σώματα με μάζες  $m_1 = 3kg$  και  $m_2 = 1kg$ . Δίνεται  $g = 10m/s^2$ .



- (α) Αν η ράβδος είναι αβαρής, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα έτσι ώστε το σύστημα των τριών σωμάτων να ισορροπεί ;
- (β) Αν η ράβδος έχει βάρος  $w = 60N$ , πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα ώστε το σύστημα να ισορροπεί ;
- (γ) Αφαιρούμε το  $m_1$  και από τη ράβδο κρέμεται μόνο το  $m_2$ . Πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα για να ισορροπεί η ράβδος; Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στην ράβδο ;

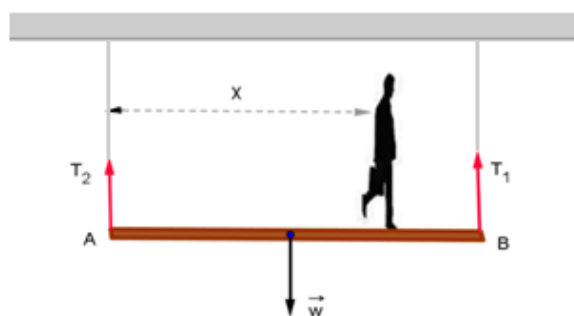
- 3.7.** Μια ομογενής σανίδα ΚΛ μήκους  $L = 10m$  και βάρους  $w = 1200N$  τοποθετείται πάνω σε μια επιφάνεια ώστε το τμήμα ΔΛ μήκους  $L = 4m$  να προεξέχει της επιφάνειας. Ένας άνθρωπος βάρους  $w_1 = 800N$  ξεκινάει από το άκρο Κ και κινείται πάνω στη σανίδα με κατεύθυνση προς το Λ.



(α) Μέχρι ποια απόσταση  $x$  από το σημείο Δ μπορεί να περπατήσει ώστε να μην ανατραπεί η σανίδα ;

(β) Πόσο είναι η μέτρο της αντίδρασης  $N$  εκείνη την στιγμή ;

- 3.8.** Ένας μηχανικός βάρους  $w_1 = 800N$  βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ομογενή σανίδα  $AB$ , μήκους  $L = 10m$  και βάρους  $w = 500N$ . Η σανίδα κρέμεται από δύο κατακόρυφα σχοινιά που είναι δεμένα στα άκρα  $A$  και  $B$ . Όλο το σύστημα ισορροπεί οριζόντιο όπως φαίνεται στο σχήμα.

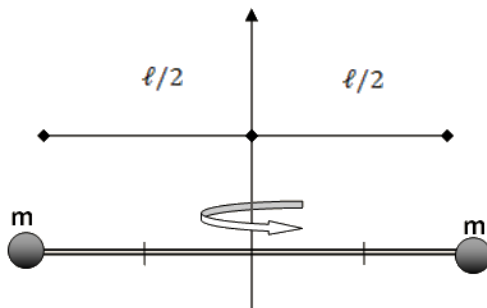


(α) Να βρεθούν τα μέτρα των τάσεων  $T_1$  και  $T_2$  των δύο σχοινιών αν  $x = 8m$ .

(β) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης  $T_1$  ;

(γ) Για ποια τιμή της απόστασης  $x$ , το μέτρο της τάσης  $T_1$  είναι ίσο με το μέτρο της τάσης  $T_2$  ;

- 3.9.** Δύο σημειακές μεταλλικές σφαίρες από σιδηρομαγνητικό υλικό, που η καθεμιά έχει μάζα  $m = 0.05kg$  είναι τοποθετημένες σε μια πλαστική κούφια αβαρή ράβδο, μήκους  $l = 1m$  με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε αυτή. Στο μέσον της ράβδου και εσωτερικά είναι τοποθετημένος ένας αβαρής ηλεκτρομαγνήτης τον οποίο μπορούμε να ενεργοποιούμε από απόσταση. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου. Αρχικά ο ηλεκτρομαγνήτης είναι απενεργοποιημένος, το σύστημα στρέφεται με συχνότητα  $f = \frac{10}{\pi} Hz$  και οι σφαίρες βρίσκονται στα άκρα της ράβδου συγκρατούμενες με λεπτό αβαρές νήμα που διατρέχει την κούφια ράβδο.

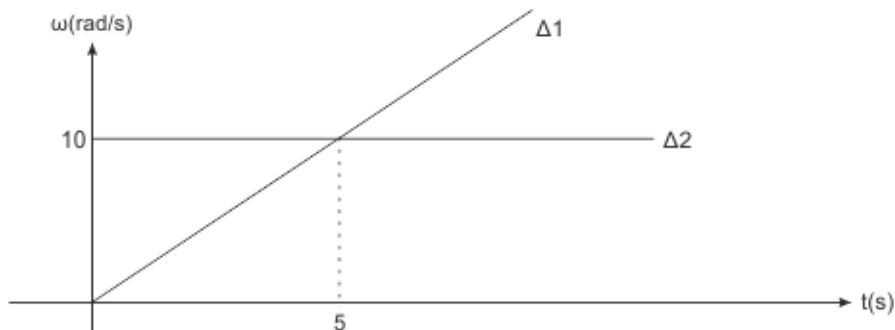


Ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη οπότε οι σφαίρες μετακινούνται ταυτόχρονα και πλησιάζουν σε απόσταση  $\frac{l}{4}$  η καθεμιά από το μέσον της ράβδου Ο, όπου και σταματούν με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού.

- α) Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του συστήματος.
- β) Να υπολογιστεί η νέα συχνότητα περιστροφής του συστήματος.
- γ) Πόσο τοις εκατό θα μεταβληθεί η συχνότητα περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών;

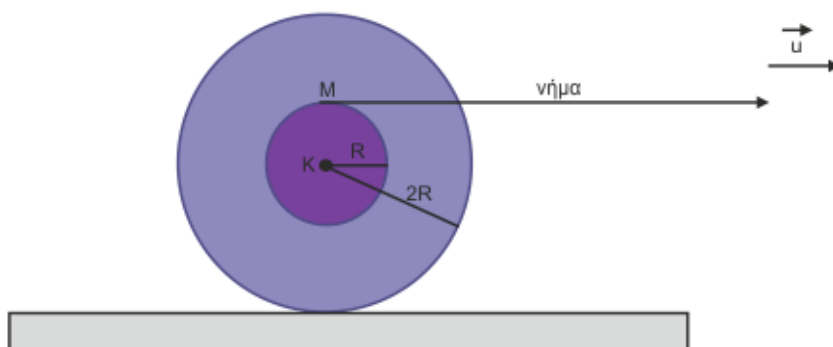
#### 4. Θέμα Δ - Προβλήματα

- 4.1. Δύο δίσκοι οριζόντιοι Δ1 και Δ2 εκτελούν περιστροφική κίνηση γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους. Οι δίσκοι περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα που μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ζητείται:

- α) Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά κάθε δίσκος.
- β) Την  $t = 5s$  πόσες περιστροφές έχει κάνει ο δίσκος Δ2 περισσότερες από τον δίσκο Δ1 ;
- γ) Ποιά χρονική στιγμή οι 2 δίσκοι έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό περιστροφών ;
- δ) Αν οι 2 τροχοί έχουν ακτίνες  $R_2 = R$ ,  $R_1 = 2R$ , να βρεθεί ποια στιγμή τα σημεία της περιφέρειάς τους θα έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.

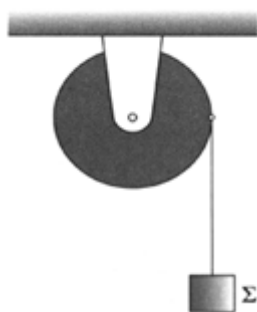


- 4.2.** Ένα στερεό αποτελείται από 2 κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους που έχουν ακτίνες  $R$  και  $2R$ . Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των 2 κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας  $R$  έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με επιτάχυνση  $a = 3m/s^2$  ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και το στερεό να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Ζητείται :

- (α) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού.
- (β) Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος  $\ell = 5cm$ , πόσο έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας του στερεού.
- (γ) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού εκείνη τη στιγμή (αν δίνεται ότι η ακτίνα του μικρού κυλίνδρου είναι  $R = 10cm$ ).
- (δ) Να βρεθεί η ταχύτητα του υψηλότερου σημείου του στερεού εκείνη τη στιγμή.

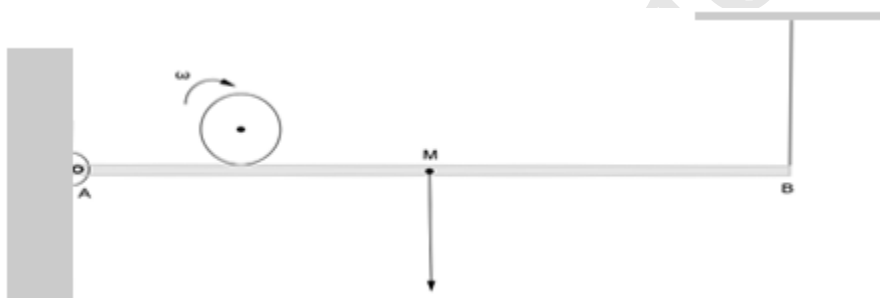
- 4.3.** Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα  $R = 20cm$  και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα χωρίς τριβές. Από το αυλάκι της τροχαλίας είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα ένα σώμα Σ. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και αυτό κατεβαίνοντας αποκτά επιτάχυνση ενώ η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση. Θεωρούμε ότι το νήμα δε γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας.



Ζητείται:

- (α) Να συγκριθούν η ταχύτητα πτώσης του  $\Sigma$  και η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.
- (β) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας  $2s$  αφού αφήσουμε το σώμα ελεύθερο.
- (γ) Όταν το σώμα έχει κατέβει κατά  $h = 8m$ , πόσες στροφές θα έχει εκτελέσει η τροχαλία.
- (δ) Τη χρονική στιγμή  $t = 4s$  κόβουμε το νήμα και το σώμα πλέον πέφτει με επιτάχυνση  $g = 10m/s^2$ . Να βρεθεί η γωνία που διέγραψε η τροχαλία από τη στιγμή που κόψαμε το νήμα έως τη στιγμή που το σώμα απέχει το σημείο ελευθέρωσης  $\Delta x = 36m$ .

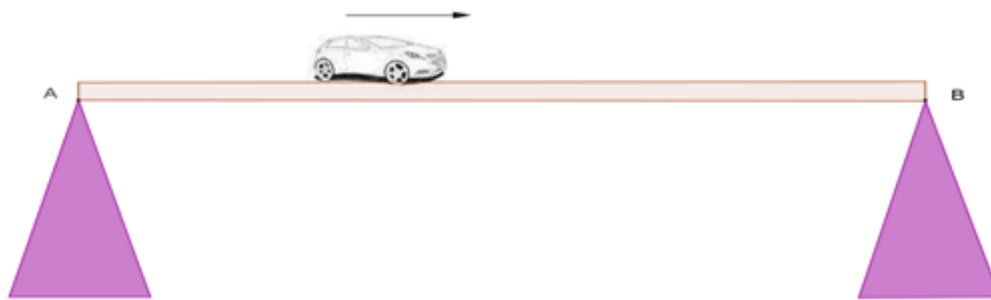
- 4.4.** Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος  $w_1 = 10N$  και μήκος  $L = 4m$ . Το ένα της άκρο αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο και το άλλο της άκρο κρέμεται από κατακόρυφο σχοινί με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια.



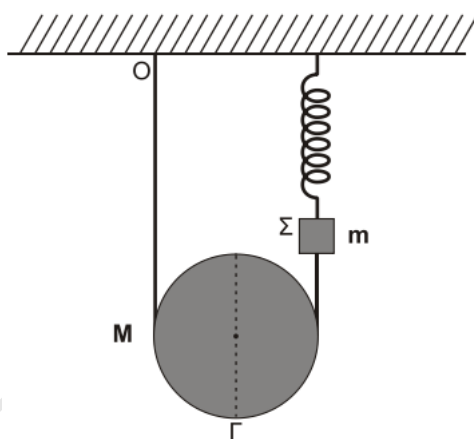
- (α) Να βρεθεί η τάση του νήματος.
- (β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.  
Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , από το άκρο A ξεκινάει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ένας κύλινδρος βάρους  $w_2 = 10N$  με επιτάχυνση  $\alpha_{cm} = 1m/s^2$ . Ζητείται:
- (γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή  $t = \sqrt{3}s$ .
- (δ) Η γωνιακή ταχύτητα και η θέση του κυλίνδρου, όταν η τάση του νήματος γίνει  $T = 10N$ . (Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου  $R = 0,1m$ )

- 4.5.** Μια οριζόντια γέφυρα έχει μήκος  $L = 8m$  και βάρος  $w = 40000N$ . Η γέφυρα στηρίζεται σε δυο υποστηρίγματα στα άκρα της A και B. Ένα όχημα βάρους  $w_1 = 10000N$  κινείται στη γέφυρα με  $v = 1m/s$ . Θεωρούμε ως αρχική χρονική στιγμή τη στιγμή που το όχημα φθάνει στο άκρο A της γέφυρας.

- (α) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η γέφυρα από το υποστήριγμα A τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .
- (β) Ποιά η θέση του αυτοκινήτου ώστε η ράβδος να δέχεται ίσες δυνάμεις από τα υποστηρίγματα.
- (γ) Να γίνει το διάγραμμα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα A σε συνάρτηση με τον χρόνο.



- 4.6.** Ομογενής τροχαλία ισορροπεί έχοντας το νήμα τυλιγμένο γύρω της πολλές φορές. Η μία άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην οροφή  $O$  και η άλλη στο σώμα  $\Sigma$ , το οποίο ισορροπεί κρεμασμένο από κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $k = 40\text{ N/m}$ , που είναι στερεωμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Η μάζα της τροχαλίας είναι  $M = 1,6\text{ kg}$ , η ακτίνα της  $R = 0,2\text{ m}$ . Το σώμα  $\Sigma$  θεωρείται σημειακό αντικείμενο μάζας  $m = 1,44\text{ kg}$ . Το νήμα και το ελατήριο έχουν αμελητέες μάζες.



Σχήμα 10

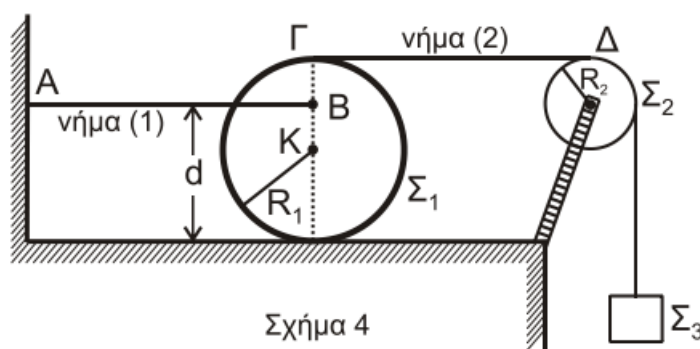
- (α)** Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα  $\Sigma$ .

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα  $\Sigma$ , και το σώμα  $\Sigma$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ η τροχαλία εκτελεί σύνθετη κίνηση κινούμενη προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση  $\alpha_{cm} = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2$ . Τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος  $\Sigma$ , για πρώτη φορά, το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση  $h$ . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

- (β)** Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση  $h$  της τροχαλίας.
- (γ)** Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ότι η τιμή  $t = 0\text{ s}$  αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που κόπηκε το νήμα και ότι η φορά απομάκρυνσης του σώματος  $\Sigma$  προς τα πάνω είναι θετική.
- (δ)** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κάτω άκρου  $\Gamma$  της τροχαλίας, όταν το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση  $h$ .

**Δίνονται:** η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ ,  $\pi = \sqrt{10}$  και  $\pi^2 = 10$  (προσεγγιστικά).  
**Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούνης 2015 / Με αλλαγή λόγω νέας ύλης**

- 4.7.** Ομογενής δίσκος  $\Sigma 1$  έχει ακτίνα  $R_1 = 0,2\text{m}$ . Στο σημείο B της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου, που απέχει απόσταση  $d = \frac{3R_1}{2}$  από το οριζόντιο επίπεδο, είναι στερεωμένο οριζόντιο αβαρές μη εκτατό νήμα (1). Το άλλο άκρο A του νήματος (1) είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Γύρω από την περιφέρεια του δίσκου  $\Sigma 1$  είναι τυλιγμένο πολλές φορές άλλο δεύτερο αβαρές μη εκτατό νήμα (2), το οποίο διέρχεται από τροχαλία  $\Sigma 2$ , ακτίνας  $R_2 = 0,1\text{m}$ . Στο άλλο άκρο του νήματος (2) είναι συνδεδεμένο σώμα  $\Sigma 3$ , μάζας  $m = 1\text{kg}$ . Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Το τμήμα ΓΔ του νήματος (2) είναι οριζόντιο.



- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης που ασκεί το νήμα (1) στο δίσκο  $\Sigma 1$ .

Χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το νήμα (1) κόβεται. Το σώμα  $\Sigma 3$  κατέρχεται με επιτάχυνση. Η τροχαλία  $\Sigma 2$  αρχίζει να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά της και ο δίσκος  $\Sigma 1$  αρχίζει να κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας  $a_{cm} = 1\text{m/s}^2$ .

- (β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του  $\Sigma 3$  και την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας  $\Sigma 2$

- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του  $\Sigma 3$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1\text{s}$ .

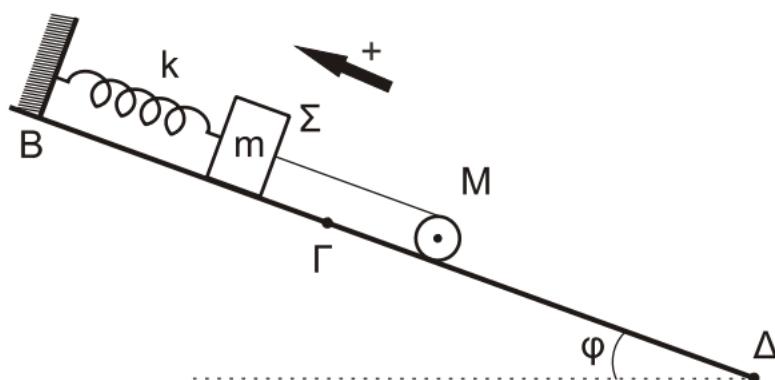
- (δ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma 3$  για την κίνηση του από τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  έως τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1\text{s}$

**Δίνονται:** η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$

**Να θεωρήσετε ότι :** η τριβή του νήματος (2) τόσο με το δίσκο  $\Sigma 1$ , όσο και με την τροχαλία  $\Sigma 2$ , είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Κατά τη διάρκεια όλου του φαινομένου, ο δίσκος παραμένει στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να συγκρούεται με την τροχαλία. Ο άξονας περιστροφής του δίσκου δεν αλλάζει κατεύθυνση, κατά τη διάρκεια της κίνησής του. Το σώμα  $\Sigma 3$  έχει αμελητέες διαστάσεις. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

**Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούνης 2016/ Με αλλαγή λόγω νέας ύλης**

- 4.8.** Σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m = 1\text{kg}$ , είναι δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 100\text{N/m}$ . Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης  $\phi = 30^\circ$ . Το τμήμα ΒΓ του κεκλιμένου επιπέδου είναι λείο. Ομογενής κύλινδρος μάζας  $M = 2\text{kg}$  και ακτίνας  $R = 0,1\text{m}$  συνδέεται με το σώμα  $\Sigma$  με τη βοήθεια αβαρούς νήματος που δεν επιμηκύνεται. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι οριζόντιος. Το νήμα και ο άξονας του ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σύστημα των σωμάτων ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και την επιμήκυνση του ελατηρίου.

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  κόβεται το νήμα. Το σώμα  $\Sigma$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίζει χωρίς ολίσθηση με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας  $\frac{10}{3}m/s^2$ .

- (β) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς για το σώμα  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας **ως θετική φορά την προς τα κάτω**.

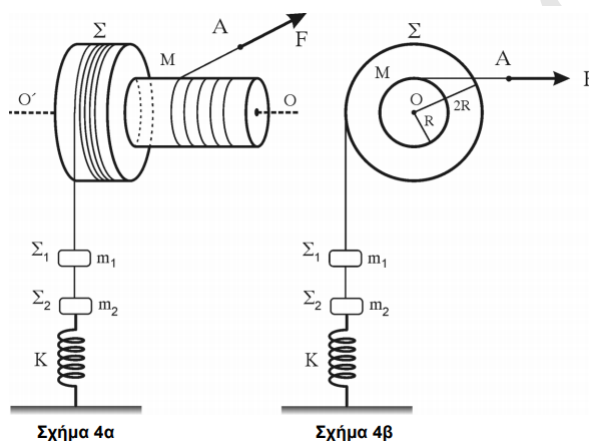
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου, όταν θα έχει διαγράψει  $N = \frac{12}{\pi}$  περιστροφές κατά την κίνηση του στο κεκλιμένο επίπεδο.

- (δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος, κατά την χρονική στιγμή που για πρώτη φορά η κινητική ενέργεια είναι ίση με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του.

**Δίνονται:** η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ .

**Πανελλήνιες - Μάης 2016/Με αλλαγή λόγω νέας ύλης**

- 4.9.** Ομογενές στερεό σώμα  $\Sigma$  συνολικής μάζας  $M = 8kg$  αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες  $R$  και  $2R$ , όπου  $R = 0,1m$  όπως φαίνεται στα σχήματα 4α και 4β (το 4β αποτελεί εγκάρσια τομή του 4α). Το στερεό  $\Sigma$  μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα  $O'O$ . Ο οριζόντιος άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Γύρω από τον κύλινδρο ακτίνας  $R$  είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 100N$ . Στο ελεύθερο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος μεγάλου μήκους, που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας  $2R$ , είναι δεμένο σώμα  $\Sigma 1$  μάζας  $m_1 = 2kg$ . Το σώμα  $\Sigma 1$  συνδέεται με αβαρές μη εκτατό νήμα με σώμα  $\Sigma 2$  μάζας  $m_2 = 1kg$ , που συγκρατείται στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k$ . Το σύστημα του στερεού  $\Sigma$  και των σωμάτων  $\Sigma 1$  και  $\Sigma 2$  αρχικά ισορροπεί, με το ελατήριο να έχει επιμηκυνθεί κατά  $\Delta\ell = 0,2m$  από το φυσικό του μήκος.



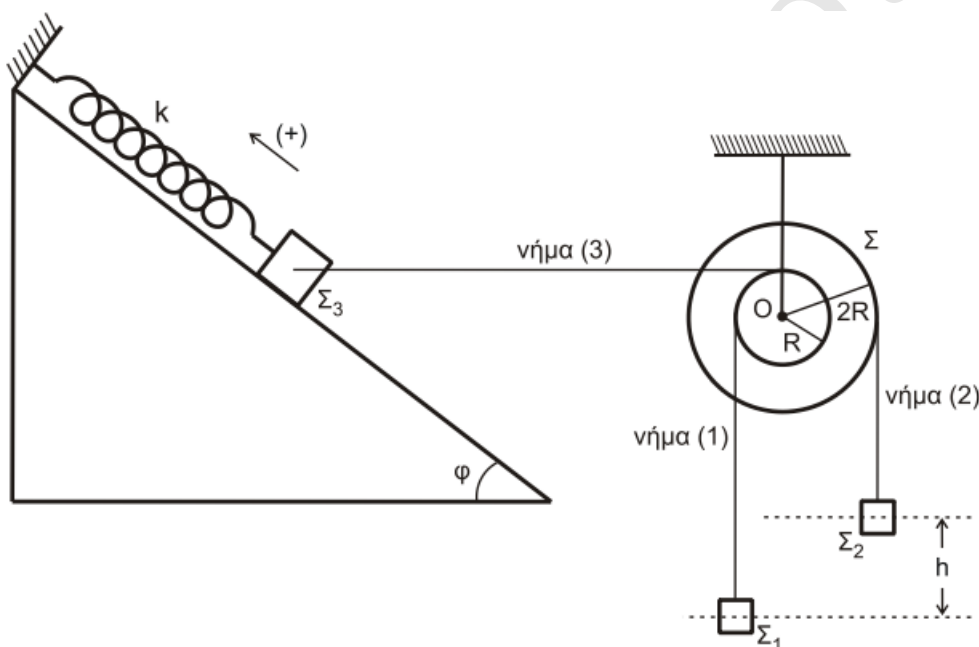
Τη χρονική στιγμή μηδέν ( $t_0 = 0s$ ) το νήμα που συνδέει τα σώματα  $\Sigma 1$  και  $\Sigma 2$  κόβεται. Το σώμα  $\Sigma 2$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το στερεό  $\Sigma$  αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής του  $O'O$  και το  $\Sigma 1$  ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση  $\alpha = 1m/s^2$

- (α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς  $k$  του ελατηρίου
- (β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα  $\Sigma 2$ . Θεωρήστε ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.
- (γ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου που δέχεται το  $\Sigma 2$  κατά την ταλάντωση του, ως συνάρτηση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα.
- (δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του  $\Sigma 2$  την χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια έχει το μισό της μέγιστης τιμής της για πρώτη φορά.
- (ε) Να υπολογίσετε την μετατόπιση του άκρου Α του νήματος, όταν το στερεό  $\Sigma$  έχει εκτελέσει  $\frac{20}{\pi}$  περιστροφές.

**Δίνεται** η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Όπου εμφανίζεται το  $\pi$  να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση. **Να θεωρήσετε ότι :** κατά τη διάρκεια της περιστροφής του στερεού  $\Sigma$  το σώμα  $\Sigma_1$  δεν συγκρούεται με το στερεό  $\Sigma$ . η τριβή του νήματος με τους κυλίνδρους του στερεού είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος  $\Sigma_2$ , ο άξονας του ελατηρίου παραμένει κατακόρυφος. η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

**Πανελλήνιες - Σεπτέμβρης 2017 / Με αλληλαγές λόγω νέας ύλης**

- 4.10.** Στερεό σώμα  $\Sigma$  μάζας  $M = 1,5 \text{ kg}$  αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες  $R$  και  $2R$  αντίστοιχα, όπου  $R = 0,1 \text{ m}$  όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Το στερεό  $\Sigma$  μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του.



**Σχήμα 5**

Τα σώματα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1 \text{ kg}$  και  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 1,5 \text{ kg}$  κρέμονται στα ελεύθερα άκρα αβαρών και μη εκτατών νημάτων (1) και (2). Τα νήματα είναι πολλές φορές τυλιγμένα στους κυλίνδρους ακτίνας  $R$  και  $2R$ , αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.

Στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους γωνίας κλίσης  $\phi$ , όπου  $\eta \mu \phi = 0,8$  και  $\sigma \upsilon \nu \phi = 0,6$  στερεώνεται ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $k = 300 \text{ N/m}$  στο άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σώμα  $\Sigma_3$  μάζας  $m_3 = 3 \text{ kg}$ . Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα  $\Sigma_3$  συνδέεται με τον κύλινδρο ακτίνας  $R$  με τη βοήθεια οριζόντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος (3), όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Το σύστημα των σωμάτων αρχικά ισορροπεί και τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  απέχουν κατακόρυφα μεταξύ τους απόσταση  $h = 0,48 \text{ m}$ .

**(α)** Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση του φυσικού του μήκους.

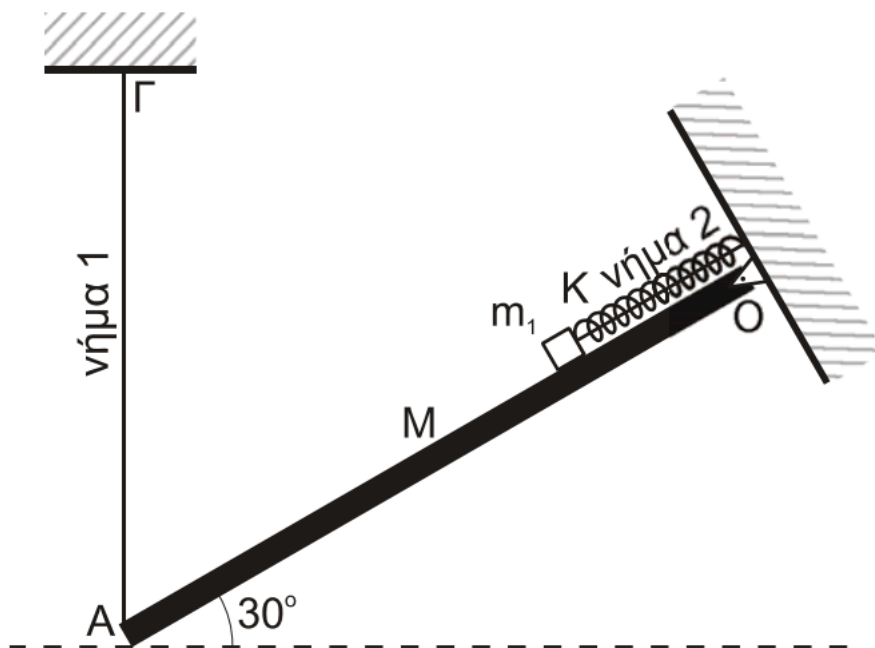
Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  κόβουμε το νήμα (3). Το σώμα  $\Sigma_3$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς  $D = k$  και θετική φορά **προς τα κάτω** και το στερεό σώμα  $\Sigma$  αρχίζει να περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονά του με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου  $20\text{rad/s}^2$ .

- (β) Να υπολογίσετε το πλάτος και την συχνότητα ταλάντωσης του  $\Sigma_3$ .
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος  $\Sigma_3$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{\pi}{5}\text{s}$ .
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος  $\Sigma$  ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή που τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  διέρχονται από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο των ταχυτήτων των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  όταν το σώμα  $\Sigma$  έχει διαγράψει  $\frac{20}{\pi}$  περιστροφές.
- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας:  $g = 10\text{m/s}^2$
  - Να θεωρήσετε ότι τα μήκη των νημάτων (1) και (2) είναι πολύ μεγάλα ώστε τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  να μη συγκρούονται με το στερεό  $\Sigma$ , κατά τη διάρκεια της κίνησής τους.
  - Να θεωρήσετε ότι τα σώματα  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  είναι πολύ μικρών διαστάσεων.
  - Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
  - Να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση του αριθμού  $\pi$ .

**Πανελλήνιες - Σεπτέμβριος 2019/ Με αθλητές λόγω νέας ύλης**

**4.11.** Η ομογενής λεπτή, λεία ράβδος ΟΑ του σχήματος 6 μάζας  $M = 8\text{kg}$  και μήκους  $L = 2\text{m}$  είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχεδίου. Η ράβδος ισορροπεί δεμένη, στο άκρο της Α, από κατακόρυφο αβαρές, μη εκτατό νήμα 1 το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα δεμένο στο Γ. Η ράβδος και το νήμα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και η ράβδος σχηματίζει γωνία  $\phi = 30^\circ$  με την οριζόντια διεύθυνση. Επάνω στη ράβδο ισορροπεί σώμα μάζας  $m_1 = 4\text{kg}$ , μικρών διαστάσεων, που είναι δεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς Κ και σε αβαρές μη εκτατό νήμα 2 τα οποία είναι παράλληλα στη ράβδο και τα επάνω άκρα τους είναι ακλόνητα στερεωμένα (σχήμα 6). Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα  $m_1$  βρίσκεται στη θέση Δ, όπου  $ΟΔ = 0,5\text{m}$ .

- (α) Υπολογίστε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από το νήμα 1 στο άκρο της Α.
- (β) Κάποια χρονική στιγμή κόβεται το νήμα 2 οπότε το σώμα  $m_1$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς  $D = k$ , επάνω στη λεία ράβδο με ολική ενέργεια  $E = 2\text{J}$ . Γράψτε τη χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης της  $m_1$  ως προς το χρόνο. Θεωρήστε  $t = 0$  τη χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα και θετική φορά από το Α προς το Ο.



Σχήμα 6

Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος μάζας  $m_1$  δεύτερο μικρό σώμα μάζας  $m_2 = m_1$  που εκτοξεύεται από το άκρο Α της ράβδου, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά (ακαριαία) με το σώμα μάζας  $m_1$ , έχοντας ακριβώς πριν την κρούση με το σώμα μάζας  $m_1$ , ταχύτητα μέτρου  $v_2$ , παράλληλη στη ράβδο με φορά προς τα επάνω. Τη στιγμή αυτή το σώμα  $m_1$  έχει απομάκρυνση  $x_1$ , όπου  $x_1 < 0$  (το σώμα μάζας  $m_2$  μετά την κρούση απομακρύνεται).

- (γ) Να βρεθεί η απομάκρυνση  $x_1$  ώστε το σώμα  $m_1$  αμέσως μετά την κρούση να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος
- (δ) Αν δίνεται πως το νέο πλάτος ταλάντωσης της σώματος μάζας  $m_1$  ισούται με  $0,4m$ , υπολογίστε την ταχύτητα  $v_2$  του σώματος μάζας  $m_2$ .

Η ράβδος παραμένει σε ισορροπία σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου και η επιτάχυνση της βαρύτητας δίνεται  $g = 10\text{m/s}^2$

**Πανελλήνιες - Σεπτέμβριος 2021**



**Βασικές πηγές:** study4exams.gr - Θέματα Πανελληνίων