

Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

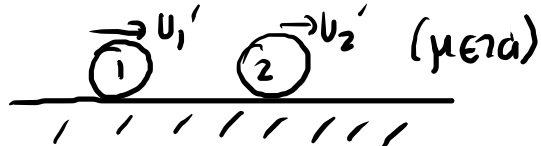
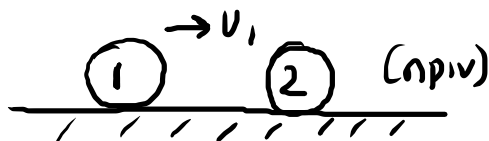
Σύνολο Σελίδων: εννιά (9) - Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

Σάββατο 11 Σεπτεμβρίου 2021

Θέμα Α : (5) / (5) / (α) / (5) / Λ, Λ, Λ, Λ, Σ.

Θέμα Β

B.1 → (8)



Ελαστική κρούση

$$P_1' = P_2' \Rightarrow \underline{m_1 v_1' = m_2 v_2'}$$

$$m_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = m_2 \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

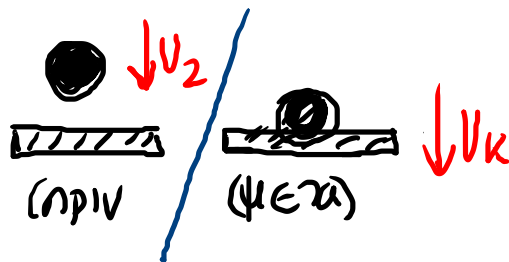
$$\Rightarrow m_1 (m_1 - m_2) = 2 m_1 m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$

B.2 $\rightarrow$ (a)

Για την πτώση / $\epsilon_{\mu\chi} = \text{σταθερή} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_2^2$
του Σ_2

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Για την κρούση /
 $\Sigma_1 - \Sigma_2$
(Α.Δ.Ο.)

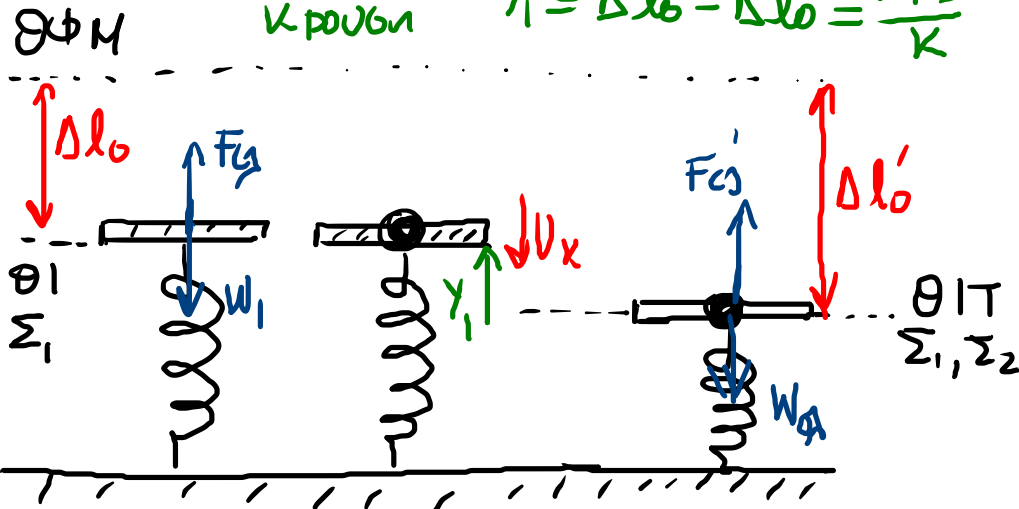


$$\vec{p}_{\sigma}^{\text{πρην}} = \vec{p}_{\sigma}^{\text{μετ}}$$

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\kappa}$$

$$\Rightarrow v_2 = 2v_{\kappa}$$

Μετά την κρούση $y_1 = \Delta l_0' - \Delta l_0 = \frac{m_1 g}{k}$



ΑΔΕΤ για τον αα2

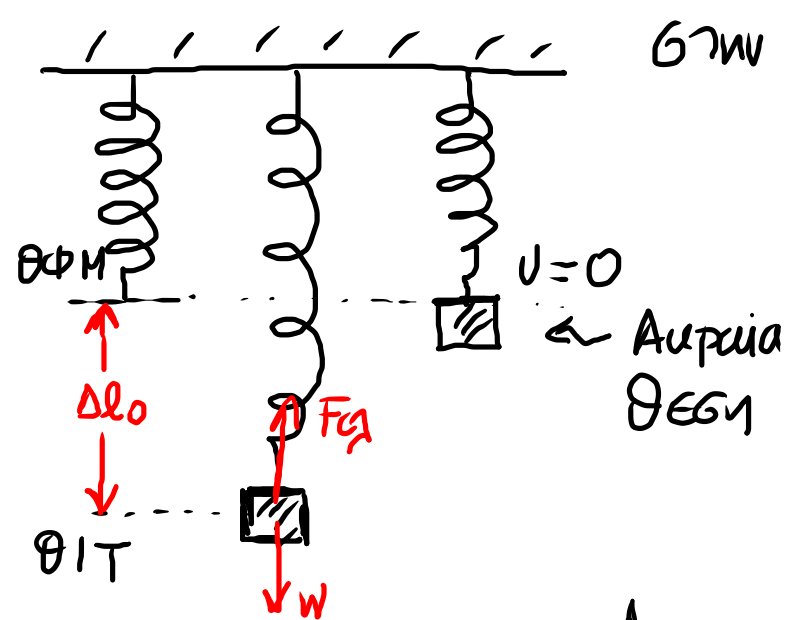
$$\frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\kappa}^2 + \frac{1}{2} D y_1^2$$

$$A^2 = 2m_1 \frac{2gh}{4} + k \cdot \left(\frac{m_1 g}{k} \right)^2$$

$$A = 2m_1 g / k$$

Για το Σ_1 , $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l_0 = m_1 g$ / Για το Σ_1, Σ_2 : $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l_0' = (m_1 + m_2) g = 2m_1 g$

B.3 $\rightarrow$ (a)



Γνω θιτ $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_g = W \Rightarrow \underline{k \Delta l_0 = mg}$

Αφού η ΘΦΜ ταυτίζεται με την Αρχική θέση $A = \Delta l_0$

και $E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} \right)^2$

Αρα $E = \frac{m^2 g^2}{2k}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{m_1^2 g^2}{2k_1^2}}{\frac{m_2^2 g^2}{2k_2^2}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 1$$

Θέμα Γ

$$A = d / D = k$$

Γ.1 $E_{\text{ελατ}} = E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} k \cdot d^2 \Rightarrow E_{\text{ελατ}} = 8 \text{ J}$

Γ.2 Γενικά $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$

$$D = k = (m_1 + m_2) \omega^2 \quad \left| \quad \text{αν } t_0 = 0 \rightarrow x = -A \right.$$

$$\Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s} \quad \left| \quad \text{άρα } \eta \mu \varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \right. \\ (0 \leq \varphi_0 < 2\pi)$$

Άρα $x = 0,4 \eta \mu \left(5t + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ (SI)}$

Γ.3 $\frac{dK_2}{dt} = \sum F_2 \cdot v = m_2 \cdot a \cdot v = m_2 (-\omega^2 x) \cdot v$

ΑΔΕΤ στο σύστημα $\left| \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \right.$

Εάν η θέρμη που $U = +1 \text{ m/s}$ από την ΑΔΕΤ θα προκύψει ότι την 2η φορά $x = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ m}$

Αρα $\frac{dK_2}{dt} = -15\sqrt{3} \text{ J/s}$

Γ.4 Αφού το Σ_2 εκτελεί ααζ $\Sigma F_2 = m_2 a = m_2 (-\omega^2 x)$

$$\Sigma \vec{F}_2 = -m_2 \omega^2 \vec{x} \Rightarrow \vec{T} + \vec{W}_2 = -m_2 \omega^2 \vec{x}$$

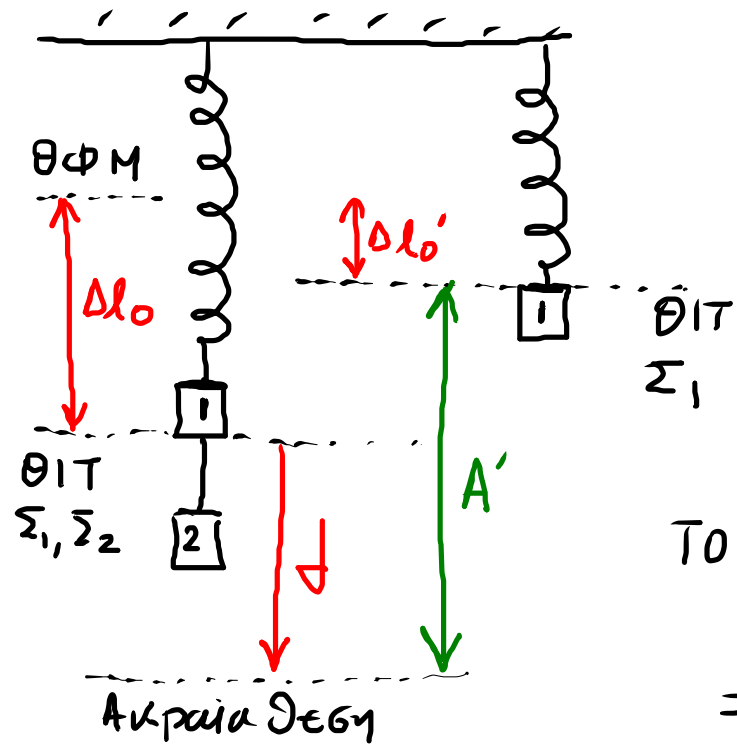
$$\Rightarrow T - m_2 g = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow T = m_2 g - m_2 \omega^2 x$$

αρα $T = 15(2 - \sqrt{3}) \text{ N}$

Γ.5

Όταν κοπεί το νήμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση ($v=0$).

Το Σ_1 θα εκτελεί ααζ με νέα ΘΙΤ στην οποία η παραμόρφωση θα είναι $\Delta l_0'$



$$\begin{cases} \text{6 των } \Theta \text{ΙΤ} \\ \Sigma_1, \Sigma_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_{\epsilon \zeta} = 0 \Rightarrow F_{\epsilon \zeta} = w_1 + w_2 \\ k \Delta l_0 = (m_1 + m_2) g \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \text{6 την } \Theta \text{ΙΤ} \\ \text{του } \Sigma_1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon \zeta} = w_1 \\ k \Delta l_0' = m_1 g \end{array} \right.$$

Το νέο πλάτος είναι $A' = d + \Delta l_0 - \Delta l_0'$

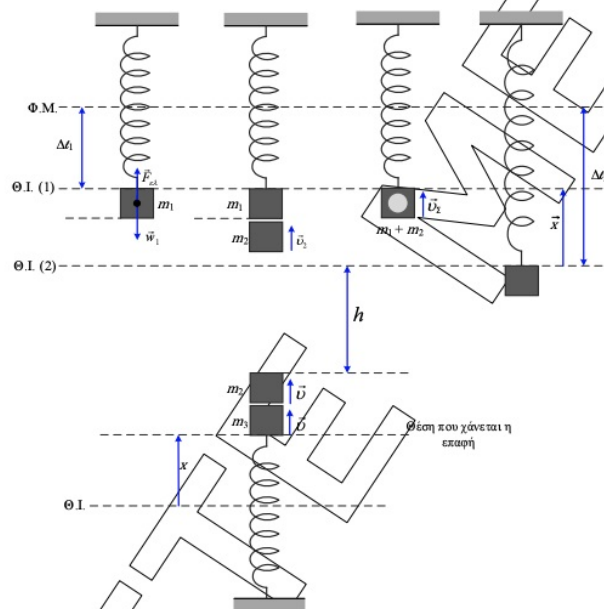
$$\Rightarrow A' = d + \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A' = 0,7 \text{ m}$$

$$\begin{array}{l} \text{Για την νέα ααζ } D = K = m_1 \omega'^2 \\ \Rightarrow \omega' = 10 \text{ rad/s} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Αρα } v_{\max}' = \omega' A' \\ v_{\max}' = 7 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

$$v_{\max}' = 7 \text{ m/s}$$

Θέμα Δ
(Είμαστε
Μέσα)

- Δ1. Έστω u_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν από την πλαστική κρούση του με το σώμα Σ_3 .



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή κατά την οποία χάνει την επαφή του με το σώμα Σ_3 μέχρι τη χρονική στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση του με το σώμα Σ_1 , έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w$ ή

$$\frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{1}{2}m_2u^2 = -m_2gh \text{ ή } u_2 = \sqrt{u^2 - 2gh} \text{ ή } u_2 = \sqrt{3} \frac{m}{s}.$$

Έστω u_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση. Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \text{ ή } m_2u_2 = (m_1 + m_2)u_\Sigma \text{ ή } u_\Sigma = \frac{\sqrt{3} m}{10 s}.$$

- Δ2. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 (Θ.Ι.(1)). Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $m_1g = k_1\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,09\text{m}$. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (Θ.Ι.(2)). Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g = k_1\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0,1\text{m}.$$

Η απομάκρυνση x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την πλαστική κρούση είναι ίση με: $x = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $x = 0,01 \text{ m}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα, έχουμε: $E = K + U$ ή

$$\frac{1}{2} k_1 A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\Sigma}^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1} v_{\Sigma}^2 + x^2} \text{ ή } A = 0,02 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0,01 \text{ m}$ προκύπτει ότι: $\eta \mu \varphi_0 = \frac{1}{2}$ ή

$\eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{6}$ (2). Επειδή ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad ή } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι η:

$$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0) \text{ (3)}.$$

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ προκύπτει ότι: $v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{6} \text{ rad} > 0$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ προκύπτει ότι:

$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{5\pi}{6} \text{ rad} < 0$. Αφού για $t = 0$ είναι $v > 0$, δεκτή λύση είναι η:

$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος

υπολογίζεται από τον τύπο:

$$D = (m_1 + m_2) \omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \text{ ή } \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, είναι: $x = 0,02 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (S.I.) (4)}$.

Δ3. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$E = K + U$ ή $E = 2U$ ή $\frac{1}{2} D A^2 = 2 \frac{1}{2} D x^2$ ή $x = \pm \frac{A \sqrt{2}}{2}$ ή $x = \pm 0,01 \sqrt{2} \text{ m}$. Η κινητική

ενέργεια του συσσωματώματος γίνεται για δεύτερη φορά ίση με τη δυναμική

Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 είναι το βάρος του $\bar{w}_2$ και η δύναμη επαφής $\bar{N}$ από το σώμα Σ_3 .

Ισχύει: $\Sigma F_{(2)} = -D_2 x$ ή $N - w_2 = -m_2 \omega'^2 x_1$ ή $N = m_2 g - m_2 \left(\frac{k_2}{m_2 + m_3} \right)^2 x_1$ ή

$$N = m_2 g - \frac{m_2 k_2}{m_2 + m_3} x_1 \quad (4).$$

Στη θέση όπου χάνεται η επαφή, ισχύει $N = 0$, οπότε από τη σχέση (4)

προκύπτει ότι $x_1 = \frac{(m_2 + m_3)g}{k_2}$ ή $x_1 = 0,4 \text{ m}$.

Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 πριν την απώλεια της επαφής τους είναι ίσο με d . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία χάνεται η επαφή, η ταχύτητα του συστήματος των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 είναι ίση με $v = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σύστημα των

σωμάτων Σ_2 και Σ_3 πριν την απώλεια της επαφής τους, έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k_2 d^2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 \text{ ή } d = \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{k} v^2 + x_1^2} \text{ ή } d = 0,8 \text{ m}.$$

Δ5. Έστω $\Delta \ell_3$ η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.(3)) των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 .

Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $(m_2 + m_3)g = k_2 \Delta \ell_3$ ή $\Delta \ell_3 = 0,4 \text{ m}$.

Αφού είναι $x_1 = \Delta \ell_3$, η επαφή μεταξύ των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 χάνεται, όταν το ελατήριο (2) αποκτά το φυσικό του μήκος. Μετά το χάσιμο της επαφής το σώμα Σ_3 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(4)), στην οποία το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $\Delta \ell_4$.

Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $m_3 g = k_2 \Delta \ell_4$ ή $\Delta \ell_4 = 0,3 \text{ m}$.

Αμέσως μετά το χάσιμο της επαφής μεταξύ των δύο σωμάτων το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_3 είναι ίσο με $v = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Έστω E_3 η ολική ενέργεια της

ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 αμέσως μετά το χάσιμο της επαφής του με το σώμα Σ_2 . Από τη Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_3 μετά το χάσιμο της επαφής του με το σώμα Σ_2 έχουμε: $E_3 = K + U$ ή $E_3 = \frac{1}{2} k \Delta \ell_4^2 + \frac{1}{2} m_3 v^2$ ή

$$E_3 = 22,5 \text{ J}.$$