Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ηλεκτρομαγνητισμός - Ρευστό - Στερεό

Ενδεικτικές Λύσεις

Κυριακή 22 Μάρτη 2020

Θέμα Α

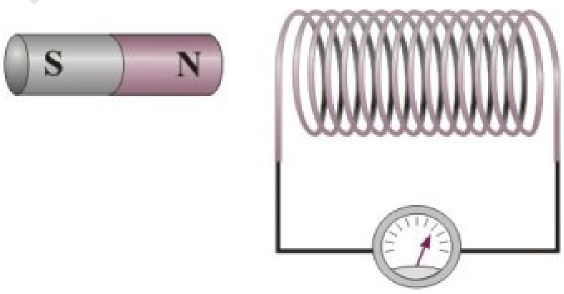
Α.1. Όταν κόψουμε ένα ραβδόμορφο μαγνήτη σε δύο κομμάτια τότε

(γ) προκύπτουν δύο νέοι μαγνήτες.

Α.2. Κατά την κίνηση ενός ιδανικού ρευστού μιας φλέβας, για τη μάζα Δm_1 του ρευστού που περνάει από μία διατομή της A_1 και τη μάζα Δm_2 του ρευστού που περνάει από μία διατομή της A_2 (με $A_2 > A_1$) στο ίδιο χρονικό διάστημα ισχύει:

(γ) $\Delta m_1 = \Delta m_2$

Α.3. Στο διπλανό σχήμα, μεγαλύτερη ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή αναπτύσσεται στο πηνίο όταν ο μαγνήτης:



(δ) απομακρύνεται γρήγορα από το πηνίο.

Α.4. Σε μια μάζα ρευστού που ρέει σε σωλήνα, προσφέρονται λόγω διαφοράς πίεσης $100J$ ανά μονάδα όγκου και η κινητική ενέργεια της μάζας αυξάνεται κατά $150J$ ανά μονάδα όγκου. Επομένως η μάζα του ρευστού:

(β) κατέρχεται,

Α.5.

(α) Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγού είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο πάνω στον αγωγό. **Σωστό**

(β) Η μαγνητική ροή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. **Σωστό**

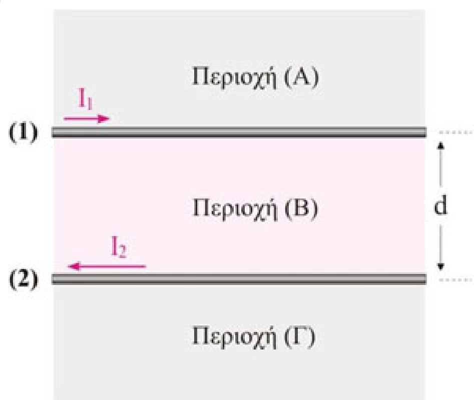
(γ) Η εξίσωση της συνέχειας προέρχεται από την αρχή του Pascal. **Λάθος**

(δ) Όλα τα μόρια μιας φλέβας ενός ιδανικού ρευστού κινούνται με την ίδια ταχύτητα. **Λάθος**

(ε) Το βολτόμετρο μετράει το πλάτος μιας εναλλασσόμενης τάσης. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Στο σχήμα απεικονίζονται δύο παράλληλοι άκαμπτοι ρευματοφόροι αγωγοί, με αντίρροπα και σταθερής έντασης ρεύματα I_1 και $i_2 = 2I_1$ που τους κρατάμε σε απόσταση d στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο.



Τρίτος ευθύγραμμος αγωγός παράλληλος προς τους άλλους δύο που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_3 άγνωστης φοράς, πρόκειται να τοποθετηθεί στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο, προκειμένου να ισορροπεί από τις δυνάμεις που θα δεχθεί από τους άλλους δύο. Ο αγωγός πρέπει να τοποθετηθεί:

(γ) στην περιοχή (Α) και σε απόσταση d από τον αγωγό I_1

Κάθε αγωγός δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο το οποίο σε απόσταση r *από αυτόν έχει μέτρο* $\dfrac{k_\mu 2I}{r}$ *με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του αγωγού και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα δεξιού χεριού. Όταν ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα βρίσκεται εντός ενός μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετο στο επίπεδο του θα δέχεται δύναμη Laplace κάθετη σε αυτόν με μέτρο* BIL*. Άρα για να ισορροπεί ο τρίτος αγωγός θα πρέπει να τοποθετηθεί σε περιοχή που το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν.*

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = 0 \Rightarrow \vec{B_1} = -\vec{B_2}$$

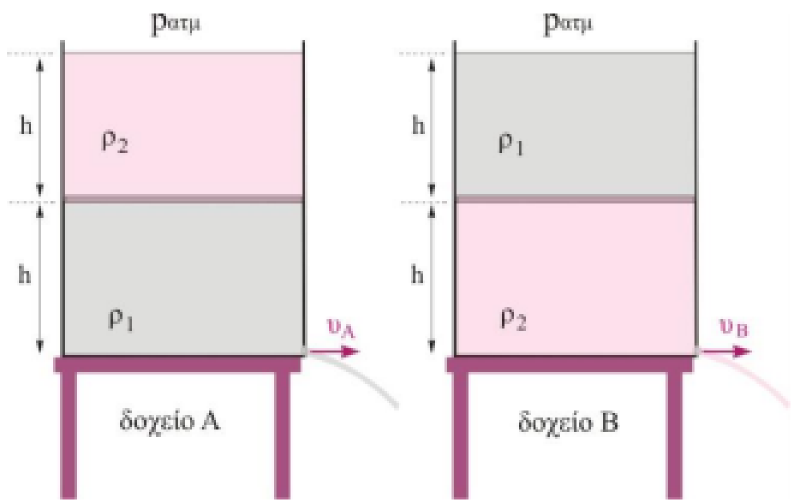
όπου βέβαια $\vec{B_1}$ *και* $\vec{B_2}$ *τα μαγνητικά πεδία των δύο αγωγών σε ένα σημείο που απέχει* r_1 *και* r_2 *αντίστοιχα από κάθε αγωγό. Τα μαγνητικά πεδία θα είναι αντίρροπα μόνο στις περιοχές (Α) και (Γ). Για τα μέτρα τους θα ισχύει:*

$$\frac{k_\mu 2I_1}{r_1} = \frac{k_\mu 2I_2}{r_2} \Rightarrow \frac{2I_1}{r_2} = \frac{I_1}{r_1} \Rightarrow r_2 = 2r_1$$

Αφού η απόσταση από το σύρμα (2) είναι μεγαλύτερη από το (1) ο αγωγός (3) θα τοποθετηθεί στην περιοχή (Α)

$$r_2 = d + r_1 \Rightarrow 2r_1 = d + r_1 \Rightarrow r_1 = d$$

Β.2. Διαθέτουμε δύο όμοια κυλινδρικά δοχεία, Α,Β, στις βάσεις των οποίων υπάρχουν δύο όμοιες οπές με πολύ μικρό εμβαδό σε σχέση με το εμβαδό βάσης των δοχείων. Οι οπές είναι κλειστές με τάπες. Διαθέτουμε επίσης δύο υγρά με πυκνότητες ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 = 4\rho_2$. Τοποθετούμε τα υγρά στα δύο δοχεία όπως στο σχήμα, διαχωρισμένα μεταξύ τους με λεπτό αβαρές διάφραγμα που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Το ύψος κάθε στήλης υγρού είναι ίσο με h.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βγάζουμε ταυτόχρονα τις δύο τάπες από τα δοχεία. Αν με υ_A , υ_B συμβολίσουμε τις ταχύτητες εκροής των δύο οπών, τη χρονική στιγμή $t = 0$ αυτές συνδέονται με τη σχέση:

(γ) $\upsilon_B = 2\upsilon_A$

Για το δοχείο Α το υγρό πυκνότητας ρ_2 θα ισορροπεί οπότε για να υπολογίσουμε την πίεση σε ένα σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής:

$$P = P_{atm} + \rho_2 g h$$

Το υγρό πυκνότητας ρ_1 θα ρέει και θα εξέρχεται από την οπή. Για μια ρευματική γραμμή που εκκινεί από σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών και καταλήγει στην οπή εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli λλαμβάνοντας υπόψη ότι η πίεση στην διαχωριστική επιφάνεια έχει υπολογιστεί παραπάνω και ότι τα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας έχουν ταχύτητα μηδέν αφού το εμβαδόν της οπής είναι μικρό σε σχέση με το εμβαδόν της διατομής του δοχείου:

$$P + \rho_1 g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_A^2 \Rightarrow \rho_2 g h + \rho_1 g h = \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_A^2 \Rightarrow \upsilon_A^2 = \frac{5}{2} g h$$

Αντίστοιχα ισχύουν για το δοχείο Β με την εναλλαγή των δύο πυκνοτήτων.

Θεμελιώδης Νόμος Υδροστατικής για το υγρό που ισορροπεί:

$$P = P_{atm} + \rho_1 g h$$

Εξίσωση Bernoulli για το υγρό που ρέει:

$$P + \rho_2 g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_2 \upsilon_B^2 \Rightarrow \rho_1 g h + \rho_2 g h = \frac{1}{2}\rho_2 \upsilon_B^2 \Rightarrow \upsilon_B^2 = 10gh$$

Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε την σχέση των ταχυτήτων.

Β.3. Ένας αθλητής του πατινάζ στρέφεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο έχοντας τα χέρια του απλωμένα. Κάποια στιγμή συμπτύσσει απότομα τα χέρια του και τα κολλά στο σώμα του με συνέπεια η ροπή αδράνειας του να μειωθεί στα $\frac{2}{3}$ της αρχικής της τιμής. Αν αγνοηθούν οι τριβές, τότε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αθλητή είναι:

(α) 50%

Για τον αθλητή εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

$$L = L' \Rightarrow I\omega = I'\omega' \Rightarrow I\omega = \frac{2}{3}I\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{3}{2}\omega$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

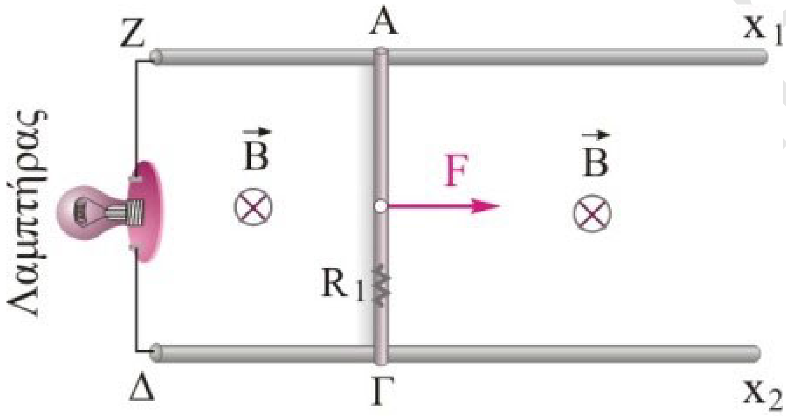
$$\frac{K' - K}{K} = \frac{K'}{K} - 1 = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}I'\omega'^2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα το ποσοστό είναι 50%

** Μια ωραία ιδέα θα ήταν να σκεφτούμε για τον υπολογισμό του λόγου ότι* $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{L}{I}\right)^2 = \frac{L^2}{2I}$

Θέμα Γ

Η οριζόντια μεταλλική ράβδος ΑΓ μάζας $m = 2kg$, μήκους $L = 0,5m$, έχει ωμική αντίσταση $R_1 = 0,5\Omega$ και βρίσκεται πάνω στους λείους οριζόντιους αγώγιμους - αμελητέας αντίστασης - οδηγούς Ζx_1 και Δx_2. Τα άκρα Δ, Ζ συνδέονται με λαμπτήρα που έχει στοιχεία κανονικής λειτουργίας $6W/3V$. Στο χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο, έντασης $B = 2T$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κάποια στιγμή ασκείται στην αρχικά ακίνητη ράβδο σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 2N$, προς τα δεξιά.



Γ.1 Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει η ράβδος.

Κατά την κίνηση της ράβδου έχουμε αύξηση της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου μέσα από το πλαίσιο ΔΖΑΓΔ καθώς το τμήμα ΑΓ μετατοπίζεται κατά δx Μέσα σε ένα χρονικό διάστημα dt. Οπότε σύμφωνα με τον Νόμο του Faraday θα έχουμε επαγωγική τάση στα άκρα ΑΓ της ράβδου:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdA}{dt} = \frac{BLdx}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon L.$$

Άρα στο κλειστό κύκλωμα που ορίζεται από το παραπάνω πλαίσιο θα έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I του οποίου η φορά (αριστερόστροφη)θα είναι τέτοια ώστε να προκαλεί δύναμη Laplace που να αντιστέκεται στην δύναμη F (κανόνας του Lentz. Η ένταση του ρεύματος θα δίνεται από τον νομο του Ohm:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_\Lambda} = \frac{B\upsilon L}{R_1 + R_\Lambda}$$

** Από τις ενδείξεις κανονικής λειτουργίας θα υπολογίσουμε την αντίσταση του Λαμπτήρα*

$$P_k = \frac{V_k^2}{R_\Lambda} \Rightarrow R_\Lambda = 1,5\Omega$$

Η ράβδος θα εκτελεί αρχικά επιταχυνόμενη κίνηση με μειούμενη επιτάχυνση, καθώς σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton η επιτάχυνση θα είναι:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - F_L = ma$$

**Η δύναμη Laplace θα αυξάνεται αφού είναι ανάλογη του ρεύματος, άρα ανάλογη της ταχύτητας η οποία αυξάνεται.*

Τελικά το σώμα αποκτά μια μέγιστη σταθερή ταχύτητα (οριακή ταχύτητα) την στιγμή που η επιτάχυνση θα μηδενιστεί.

Γ.2 Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{\text{ορ}}$, με την οποία κινείται τελικά η ράβδος.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = BIL \Rightarrow F = B\frac{B\upsilon L}{R_1 + R_\Lambda}L = F \Rightarrow \upsilon_{\text{ορ}} = 4m/s$$

Γ.3 Να ελέγξετε αν ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά, μετά τη σταθεροποίηση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.

Την παραπάνω στιγμή που αποκτά την οριακή ταχύτητα σταθεροποιείται η επαγωγική τάση, άρα και το ρεύμα:

$$I = B\frac{B\upsilon_{\text{ορ}}L}{R_1 + R_\Lambda} = 2A$$

Το ρεύμα κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα υπολογίζεται από τις ενδείξεις κανονικής λειτουργίας $P_k = V_k I_k \Rightarrow I_k = 2A = I$. *Άρα ο λαμπτήρας θα λειτουργεί κανονικά.*

Γ.4 Να υπολογίσετε το ρυθμό κατανάλωσης ενέργειας από τη δύναμη Laplace και το ρυθμό κατανάλωσης ενέργειας από τις αντιστάσεις τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα της ράβδου είναι ίση με το ένα τέταρτο της $\upsilon_{\text{ορ}}$. Να εξηγήσετε την σχέση των δύο ρυθμών.

Την παραπάνω στιγμή που $\upsilon = 1m/s$ *θα έχουμε ρεύμα έντασης*
$I' = B\dfrac{B\upsilon L}{R_1 + R_\Lambda} = 0,5A$ *και το μέτρο της δύναμης Laplace θα είναι:*
$F_L = BI'L = 0,5N$

Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από την δύναμη Laplace θα ειναι:

$$\frac{dW_{F_L}}{dt} = -\frac{F_L dx}{dt} = -F_L\upsilon = -0,5J/s$$

Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από τους αντιστάτες θα είναι η θερμική ισχύς τους:

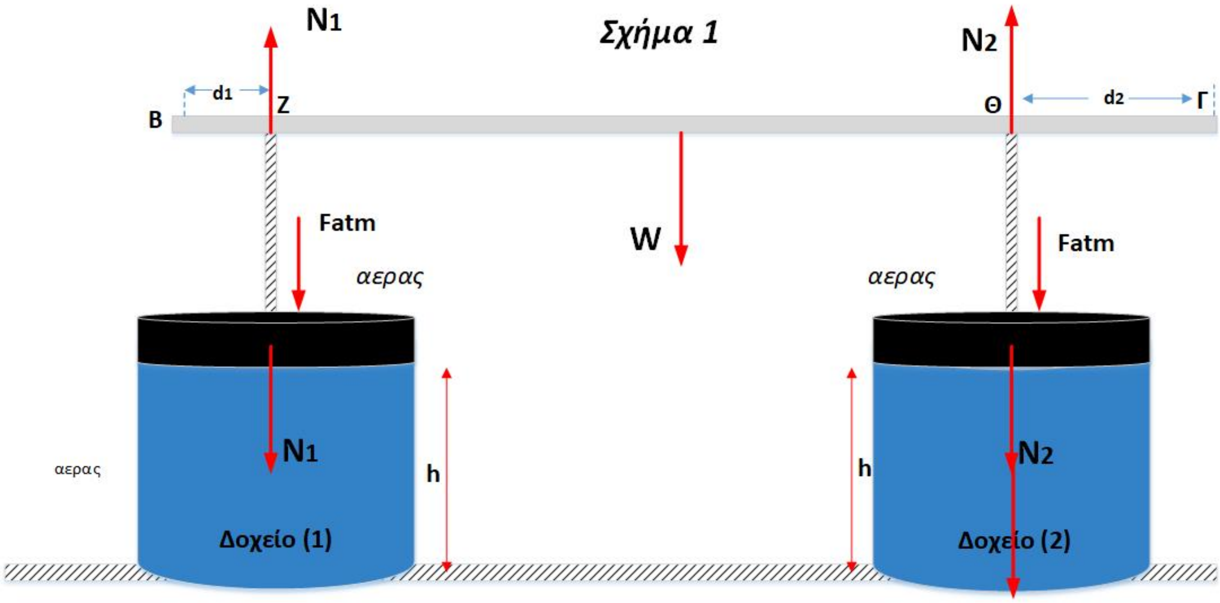
$$P = I'^2\left(R_1 + R_\Lambda\right) = 0,5W$$

Είναι απολύτως λογικό να είναι ίσα καθώς το έργο της δύναμης Laplace είναι ίσο με την ενέργεια που χάνεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας από τους αντιστάτες.

Θέμα Δ

Στο Σχήμα 1 φαίνονται δύο όμοια κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) που περιέχουν νερό και τα οποία κλείνουν με εφαρμοστό αβαρές έμβολο εμβαδού $A = 400cm^2$ που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Τα δύο δοχεία βρίσκονται στο έδαφος και τα έμβολα βρίσκονται στο ίδιο ύψος $h = 2m$ από τη βάση του κάθε δοχείου. Στο κέντρο κάθε εμβόλου έχει προσαρμοστεί κατακόρυφη αβαρής ράβδος, ενώ στα άκρα Ζ και Θ των δύο αβαρών ράβδων ακουμπά λεπτή, ομογενής και άκαμπτη ράβδος ΒΓ , μήκους $L = 2m$ και μάζας $M = 500kg$ η οποία ισορροπεί ακίνητη σε οριζόντια θέση. Η απόσταση ΘΓ ισούται με $d_2 = 0,6m$ και η πίεση στη βάση του δοχείου (1) είναι ίση με $P_1 = 1,7 \cdot 10^5 Pa$. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό.

Σχήμα 1



Δ.1 Να υπολογίσετε την απόσταση $d_1 = \mathrm{BZ}$.

Πάνω στο έμβολο του δοχείου 1 ασκείται μια δύναμη N_1 από την κάθετη ράβδο, η δύναμη από την ατμοσφαιρική πίεση και η δύναμη από το υγρό, αφού το έμβολο ισορροπεί θα προκύψει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + P_{atm}A = PA \Rightarrow N_1 + P_{atm} = (P_1 - \rho g h)\, A \Rightarrow N_1 = 2000N$$

Για την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg \Rightarrow N_2 = 3000N$$

$$\Sigma\tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow -Mg\left(\frac{L}{2} - d_1\right) + N_2\,(L - d_1 - d_2) \Rightarrow d_1 = 0,4m$$

Δ.2 Να υπολογίσετε την πίεση στη βάση του δοχείου (2).

Το έμβολο του δοχείου 2 θα δέχεται αντίστοιχες δυνάμεις με το έμβολο του δοχείου 1 και θα ισορροπεί. Άρα για την πίεση κάτω από το έμβολο προκύπτει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_2 + P_{atm}A = P'A \Rightarrow P' = P_{atm} + \frac{N_2}{A}$$

Στην βάση του δοχείου η πίεση θα είναι:

$$P_2 = P' + \rho g h = P_{atm} + \frac{N_2}{A} + \rho g h = 1,95 \cdot 10^5 Pa$$

**Οι δυνάμεις που ασκούνται από τις κατακόρυφους ράβδους στα έμβολα και στην δοκό είναι ίσες αφού οι κατακόρυφες ράβδοι είναι αβαρής.*

Στην συνέχεια αφαιρούμε την ράβδο ΒΓ από την παραπάνω διάταξη και στερεώνουμε το άκρο Β σε άρθρωση, γύρω από την οποία μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές (Σχήμα 2). Ασκούμε στο μέσο Κ της ράβδου σταθερή κάθετη σε αυτή δύναμη $\vec{F}$ και την περιστρέφουμε, μέχρι το άκρο Γ να διαγράψει τροχιά ημικυκλίου φτάνοντας στην ανώτερη θέση χωρίς ταχύτητα. Στην παραπάνω θέση καταργώ την δύναμη αυτή.

Δ.3 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F.

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την περιστροφή της ράβδου

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - 0 = F\frac{L}{2}\pi - MgL \Rightarrow F = \frac{10^4}{\pi}N$$

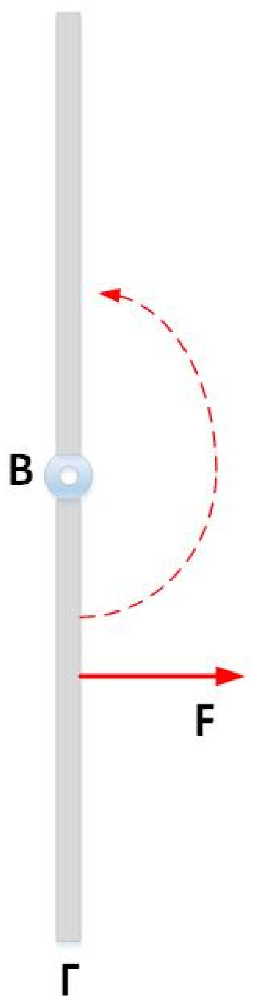
Από την παραπάνω θέση (Σχήμα 3) δίνω μια μικρή ώθηση στην ράβδο με αποτέλεσμα να αρχίσει να περιστρέφεται στην φορά των δεικτών του ρολογιού.

Δ.4 Να βρεθεί η επιτρόχιος επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου όταν έχει περιστραφεί κατά 30^o από την αρχική της θέση.

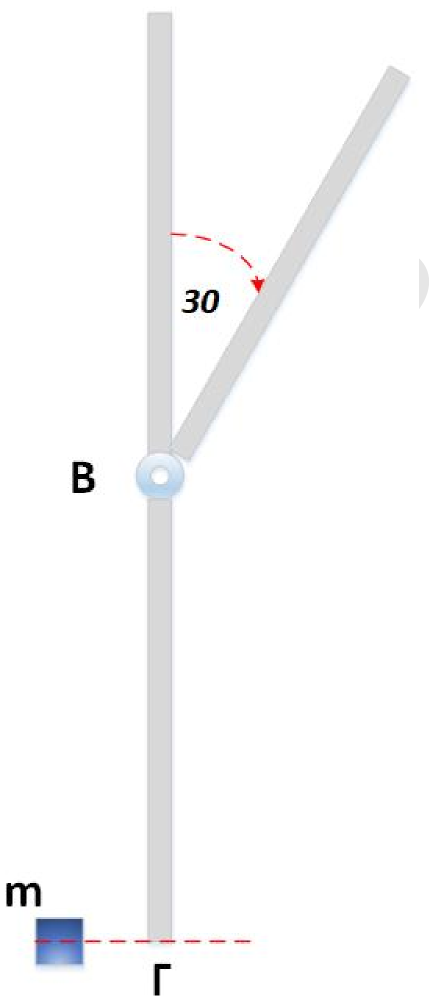
Εφαρμόζω ΘΝΣΚ, αφού πρώτα υπολογίσω με Steiner την ροπή αδράνειας της ράβδου.

$$\Sigma\tau_{(B)} = I_{(B)}\alpha_\gamma \Rightarrow Mg\frac{L}{2}\eta\mu(30^o) = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{15}{4}rad/s^2$$

Σχήμα 2



Σχήμα 3



Άρα η επιτρόχιος επιταχυνση του κέντρου μάζας θα είναι:

$$\alpha = \alpha_\gamma \frac{L}{2} = \frac{15}{4} m/s^2$$

Δ.5 Όταν η ράβδος διέρχεται από την κατώτερη θέση της συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m = 100kg$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$ της οποίας η διεύθυνση βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει το κέντρο μάζας του σώματος με το άκρο Γ της ράβδου. Εξαιτίας της κρούσης το σύνολο της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.

Να βρεθεί η κατεύθυνση και το μέτρο της $\vec{\upsilon_o}$

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κάθοδο της ράβδου

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_{(B)}\omega^2 = MgL \Rightarrow \omega = \sqrt{30} rad/s$$

Εξαιτίας της κρούσης το σύνολο της ενέργειας γίνεται θερμότητα, άρα το σύστημα ακινητοποιείται. Για την κρούση εφαρμόζω Αρχη Διατήρησης της Στροφορμής:

$$I_{(B)}\omega - m\upsilon_o L = 0 \Rightarrow \upsilon_o = \frac{10\sqrt{30}}{3} m/s$$