
Μηχανική Στερεού Σώματος

4ο Σετ Ασκήσεων - Μάρτης 2020

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου, Φυσικός

<http://www.perifysikhs.com>

1. Θέμα Α - Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.1. Αν στερεό σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση τότε:

- (α) Η κίνηση του είναι οπωσδήποτε ευθύγραμμη.
- (β) Όλα τα σημεία του στερεού έχουν ίδια ταχύτητα.
- (γ) Το σώμα αλλάζει προσανατολισμό.
- (δ) Το τμήμα που ενώνει 2 τυχαία σημεία του στερεού περιστρέφεται.

1.2. Σώμα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σώμα. Η γωνιακή του ταχύτητα:

- (α) Είναι διανυσματικό μέγεθος που σχηματίζει τυχαία γωνία ϕ με τον άξονα περιστροφής.
- (β) Έχει μονάδα μέτρησης το 1rad/sec^2 .
- (γ) Έχει μέτρο που ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που διαγράφει μια τυχαία ακτίνα του στερεού.
- (δ) Αν η κίνηση είναι ομαλή στροφική τότε έχει μέτρο που συνεχώς αυξάνεται.

1.3. Ένα στερεό εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σώμα:

- (α) Όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα περιστροφής το μέτρο της ταχύτητας των διαφόρων σημείων μειώνεται.
- (β) Όλα τα σημεία του στερεού εκτελούν κυκλική κίνηση.
- (γ) Υπάρχουν σημεία του στερεού που είναι διαρκώς ακίνητα.
- (δ) Όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα.

1.4. Ένας τροχός εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, ξεκινώντας από την ηρεμία και επιταχύνεται με γωνιακή επιτάχυνση που συνεχώς αυξάνεται:

- (α) η γραμμική ταχύτητα του στερεού αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο.
- (β) Η γωνιακή ταχύτητα ω του τροχού δίνεται από την σχέση $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$.
- (γ) Η στιγμιαία γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού συνδέεται με την στιγμιαία γωνιακή του ταχύτητα ω με την σχέση $v = \omega \cdot R$.
- (δ) Η γωνία που διαγράφει ο τροχός υπολογίζεται από την σχέση $\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$.

1.5. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού, ως προς κάποιο άξονα περιστροφής, δεν εξαρτάται από:

- (α) την κατανομή της μάζας του σώματος.
- (β) το μέγεθος του σώματος.
- (γ) τη ροπή των δυνάμεων που δέχεται το σώμα.
- (δ) τη θέση του άξονα περιστροφής.

1.6. Η ροπή αδράνειας ενός σώματος, ως προς ένα άξονα εκφράζει:

- (α) την ικανότητα του σώματος να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα.
- (β) το πόσο γρήγορα περιστρέφεται το στερεό σώμα.
- (γ) την αδράνεια του σώματος στη μεταφορική κίνηση.
- (δ) την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση.

1.7. Μια οριζόντια ράβδος έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα P, που διέρχεται από το άκρο της. Η ράβδος είναι ακίνητη και κάποια στιγμή δέχεται σταθερή ροπή ως προς τον άξονα P. Τότε:

- (α) η γωνιακή της μετατόπιση είναι ανάλογη του χρόνου.
- (β) η γωνιακή της ταχύτητα μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου.
- (γ) η γωνιακή της ταχύτητα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.
- (δ) η γωνιακή της επιτάχυνση είναι μηδενική.

1.8. Για να διατηρεί ένα σώμα την περιστροφική του κατάσταση σταθερή πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να :

- (α) είναι σταθερό και διάφορο του μηδενός.
- (β) είναι μηδέν.
- (γ) αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.
- (δ) μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

1.9. Μια σφαίρα κυλίνεται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση μόνο του βάρους της και της δύναμης που δέχεται από το επίπεδο. Αρχικά η σφαίρα ανεβαίνει και στη συνέχεια κατεβαίνει.

- (α) Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.
- (β) Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.
- (γ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της μεταβάλλεται.
- (δ) Όταν η σφαίρα ανεβαίνει, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη φορά από την φορά όταν κατεβαίνει.

1.10. Δύο στερεά σώματα εκτελούν στροφική κίνηση με ίδια στροφορμή. Το σώμα με την μεγαλύτερη ροπή αδράνειας :

- (α) έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια και μικρότερη γωνιακή ταχύτητα.
- (β) έχει μικρότερη κινητική ενέργεια και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.
- (γ) έχει μικρότερη κινητική ενέργεια και μικρότερη γωνιακή ταχύτητα.
- (δ) έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.

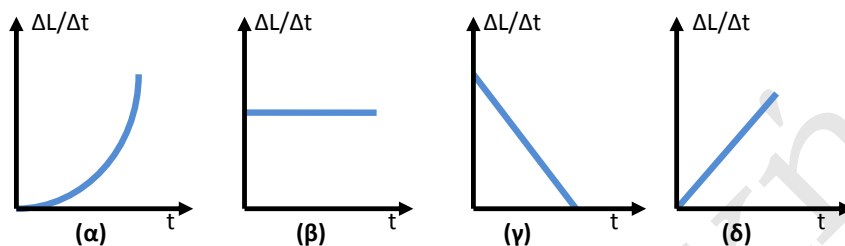
1.11. Άνθρωπος βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοντά στο κέντρο οριζόντιου δίσκου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του. Αν ο άνθρωπος μετακινηθεί στην περιφέρεια του δίσκου, τότε η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ω_2 θα είναι :

- (α) $\omega_2 = \omega_1$ (β) $\omega_2 > \omega_1$ (γ) $\omega_2 < \omega_1$ (δ) $\omega_2 = 0$

1.12. Μια σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο: $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που εμφανίζεται με την μορφή κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ισούται με :

- (α) 40 % (β) $\frac{400}{3}$ % (γ) $\frac{200}{7}$ % (δ) $\frac{500}{3}$ %

- 1.13.** Οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς εφαπτόμενη σε αυτόν. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο ;



- 1.14.** Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, με γωνιακή ταχύτητα ω . Αν διπλασιαστεί η γωνιακή του ταχύτητα, τότε η κινητική του ενέργεια :

- (α) υποτετραπλασιάζεται.
 (β) υποδιπλασιάζεται.
 (γ) διπλασιάζεται.
 (δ) τετραπλασιάζεται.

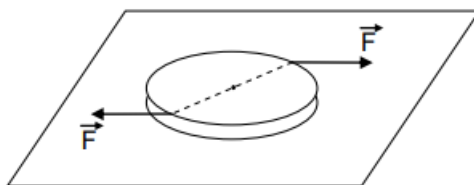
- 1.15.** Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Με αυτό τον τρόπο :

- (α) αυξάνουν τη στροφορμή τους.
 (β) μειώνουν την κινητική τους ενέργεια.
 (γ) μειώνουν τη ροπή αδράνειάς τους.
 (δ) αυξάνουν τη μάζα τους.

- 1.16.** Ένας κύβος και μία σφαίρα έχουν την ίδια μάζα και αφήνονται να κινηθούν από το ίδιο ύψος δύο κεκλιμένων επιπέδων. Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές στο ένα και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο άλλο. Στη βάση των κεκλιμένων επιπέδων έχουν κινητικές ενέργειες $K_{\text{κύβ}}$ και $K_{\text{σφ}}$ αντίστοιχα. Για το λόγο των ενεργειών ισχύει :

- (α) $\frac{K_{\text{κύβ}}}{K_{\text{σφ}}} > 1$ (β) $\frac{K_{\text{κύβ}}}{K_{\text{σφ}}} < 1$ (γ) $\frac{K_{\text{κύβ}}}{K_{\text{σφ}}} = 1$ (δ) $\frac{K_{\text{κύβ}}}{K_{\text{σφ}}} < 0$

- 1.17.** Η γωνιακή επιτάχυνση ενός ομογενούς δίσκου που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι ανάλογη
- (α) με τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής
 - (β) με τη μάζα του δίσκου
 - (γ) με την ακτίνα του δίσκου
 - (δ) με τη ροπή που ασκείται στο δίσκο.
- 1.18.** Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί η στροφορμή του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια :
- (α) παραμένει σταθερή
 - (β) υποδιπλασιάζεται
 - (γ) διπλασιάζεται
 - (δ) τετραπλασιάζεται.
- 1.19.** Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκείται σταθερή ροπή, οπότε αρχίζει να κινείται. Τότε
- (α) το στερεό σώμα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.
 - (β) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος αυξάνεται συνεχώς.
 - (γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος είναι σταθερό.
 - (δ) η στροφορμή του σώματος είναι σταθερή.
- 1.20.** Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται, χωρίς τριβές, έχοντας τα χέρια της σε σύμπτυξη. Όταν η αθλήτρια, κατά την περιστροφή της, απλώσει τα χέρια της σε οριζόντια θέση, τότε
- (α) η στροφορμή της μειώνεται
 - (β) η στροφορμή της αυξάνεται
 - (γ) η συχνότητα περιστροφής της αυξάνεται
 - (δ) η συχνότητα περιστροφής της μειώνεται.

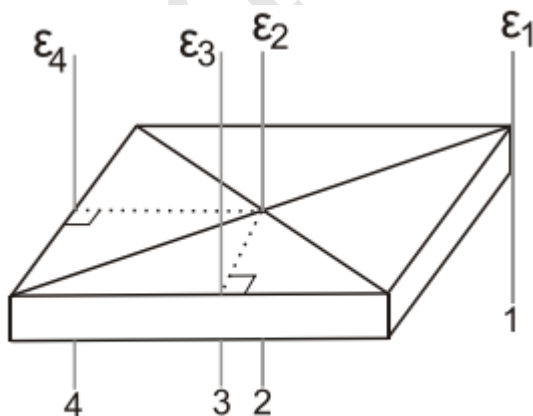


Σχήμα 1

1.21. Ο ομογενής δίσκος του σχήματος 1 ισορροπεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια χρονική στιγμή ασκούμε στον δίσκο ζεύγος δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Η κίνηση του δίσκου είναι

- (α) μόνο στροφική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
- (β) μόνο μεταφορική με σταθερή ταχύτητα.
- (γ) μόνο στροφική με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.
- (δ) μόνο μεταφορική με σταθερή επιτάχυνση

1.22. Το οριζόντιο ομογενές στερεό του Σχήματος 1 είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μπορεί να περιστραφεί κάθε φορά γύρω από τους κατακόρυφους παράλληλους άξονες ϵ_1 ή ϵ_2 ή ϵ_3 ή ϵ_4 , με την ίδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .



Σχήμα 1

Το μέτρο της στροφορμής του στερεού έχει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα:

- (α) ϵ_1
- (β) ϵ_2
- (γ) ϵ_3
- (δ) ϵ_4

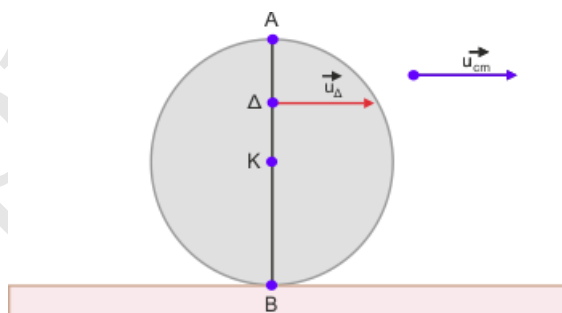
1.23. Να γράψετε δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.

- (α) Όταν ένας αστέρας συρρικνώνεται, λόγω βαρύτητας, η γωνιακή ταχύτητά του, λόγω περιστροφής, ελαττώνεται.

- (β) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος.
- (γ) Όταν ένα ποδήλατο κινείται προς το νότο, η στροφορμή των τροχών ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ένα διάνυσμα με κατεύθυνση προς την ανατολή.
- (δ) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
- (ε) Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπύκνουν τα χέρια και τα πόδια τους.
- (στ) Το συνολικό έργο της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός στερεού σώματος είναι ίσο με μηδέν.
- (ζ) Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής.
- (η) Η κίνηση ενός τροχού που κυλιέται είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.
- (θ) Αν σε ένα αρχικά ακίνητο ελεύθερο στερεό σώμα ασκηθεί σταθερή δύναμη της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα περιστραφεί.

2. Θέμα Β - Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με αιτιολόγηση

- 2.1.** Τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή το σημείο Δ βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχει από το κέντρο Κ απόσταση $\frac{R}{2}$ (βρίσκεται πάνω από το Κ). Εάν η ταχύτητα του Δ είναι v_Δ , η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:



(α) $v_{cm} = \frac{3}{2}v_\Delta$

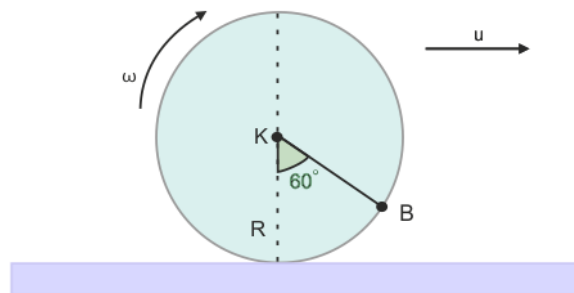
(β) $v_{cm} = \frac{2}{3}v_\Delta$

(γ) $v_{cm} = \frac{1}{2}v_\Delta$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.2.** Τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα v_{cm} . Το Β βρίσκεται στην περιφέρεια του τροχού και η επιβατική του ακτίνα σχηματίζει με την κατακόρυφη διάμετρο γωνία 60° (όπως στο σχήμα).

Το μέτρο της ταχύτητας του Β είναι:



(α) $v_B = v_{cm}$

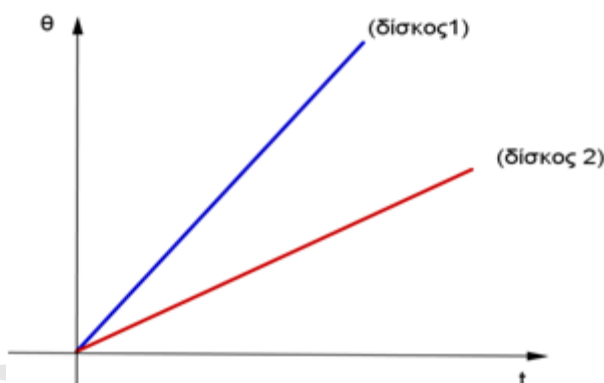
(β) $v_B = v_{cm}\sqrt{2}$

(γ) $v_B = \frac{v_{cm}}{2}$

(δ) $v_B = \frac{3v_{cm}}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.3.** Δυο ομογενείς δίσκοι στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο τους. Στο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνία που διαγράφει κάθε δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



- (α) οι δυο δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση (μη μηδενική).
 (β) οι δίσκοι εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση με διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.
 (γ) οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή στροφική κίνηση και η γωνιακή ταχύτητα του πρώτου κάθε χρονική στιγμή είναι μεγαλύτερη από την γωνιακή ταχύτητα του δεύτερου την ίδια χρονική στιγμή.
 (δ) σε ίσους χρόνους ο (δίσκος 2) θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές από τον (δίσκο 1).

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη και να δικαιολογηθεί ο χαρακτηρισμός της κάθε πρότασης.

- 2.4.** Οι δύο ομόκεντροι δίσκοι του διπλανού σχήματος μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους.

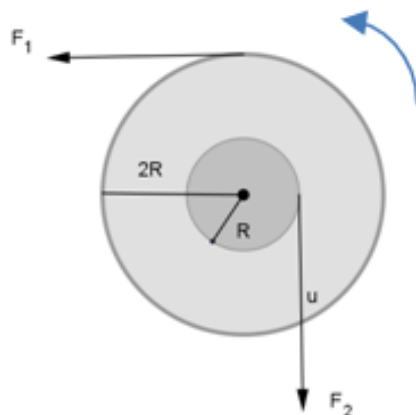
Οι δίσκοι είναι κολλημένοι και μπορούν να περιστρέφονται σαν ένα σώμα. Ασκούμε στους δίσκους τις δυνάμεις F_1 και F_2 που φαίνονται στο σχήμα και τελικά παρατηρούμε ότι το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Για τις δυνάμεις F_1 και F_2 ισχύει:

(α) $F_1 = 2F_2$

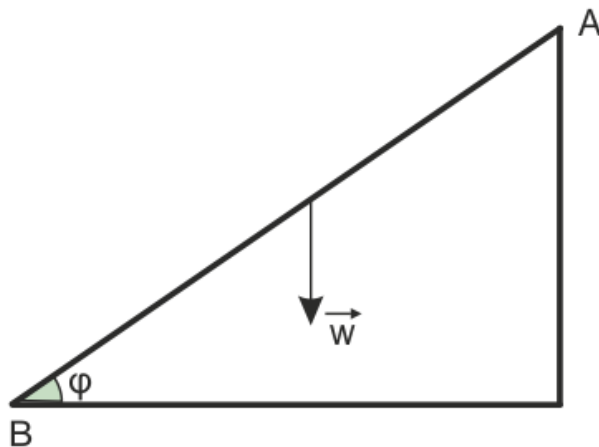
(β) $F_2 = 2F_1$

(γ) $F_1 = F_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



2.5. Η ράβδος AB είναι ομογενής, έχει βάρος w και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει ο τοίχος και το δάπεδο να είναι λεία.

(β) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείος ο τοίχος και το δάπεδο να έχει τριβή.

(γ) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείο το δάπεδο και ο τοίχος να έχει τριβή.

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη δικαιολογώντας την επιλογή σας.

2.6. Ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος, μάζας M και ακτίνας R , περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα z , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο K του δίσκου. Ένα μικρό σώμα, μάζας m , τοποθετείται πολύ κοντά στο κέντρο και αρχίζει να ολισθαίνει αργά προς την περιφέρεια του δίσκου. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού σώματος προς την περιφέρεια, η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος - μικρό σώμα :

(α) μειώνεται.

(β) μένει σταθερή.

(γ) αυξάνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.7.** Ένας ομογενής ξύλινος δίσκος (1) και ένας ομογενής μεταλλικός δακτύλιος (2) έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα. Αν I_1 και I_2 είναι αντίστοιχα η ροπή αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό τους, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους, τότε ισχύει η σχέση:

(α) $I_1 < I_2$

(β) $I_1 = I_2$

(γ) $I_1 > I_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.8.** Δύο οριζόντιοι τροχοί Α και Β, με ακτίνες αμελητέας μάζας, έχουν την ίδια μάζα και όλη η μάζα τους είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στην περιφέρειά τους. Ο τροχός Α έχει τη διπλάσια ακτίνα από τον τροχό Β. Οι δύο τροχοί μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός τροχού ως προς άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του: $I_{cm} = mR^2$. Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια κάθε τροχού δύναμη $\vec{F}$ ίδιου μέτρου. Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων που θα αποκτήσουν οι δύο τροχοί, ισχύει ότι:

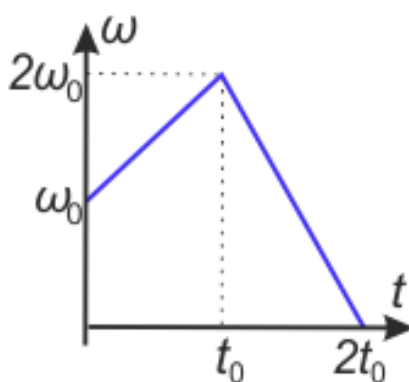
(α) $\alpha_A < \alpha_B$

(β) $\alpha_A = \alpha_B$

(γ) $\alpha_A > \alpha_B$

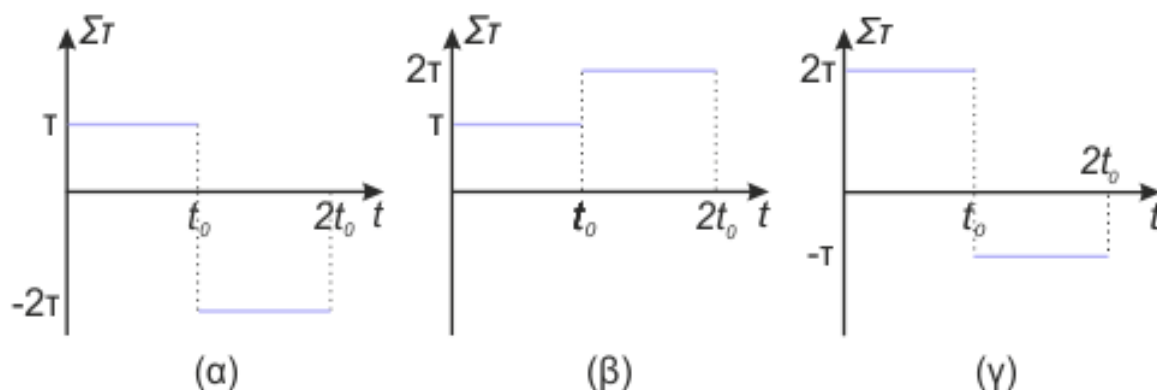
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.9.** Ένας κατακόρυφος ομογενής κύλινδρος, στρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από τον άξονά του. Στον κύλινδρο ασκείται κατάλληλη ροπή δύναμης μέτρου τ_F , οπότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



Η σωστή γραφική παράσταση της ροπής τ_F σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι το:

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



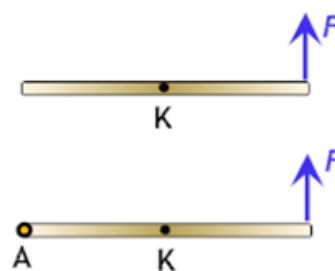
- 2.10.** Στο σχήμα φαίνονται σε κάτοψη δύο όμοιες ομογενείς ράβδοι (1) και (2), που βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η ράβδος (1) είναι ελεύθερη ενώ η ράβδος (2) είναι στερεωμένη ακλόνητα στο αριστερό άκρο της Α. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

Ασκούμε στο δεξιό άκρο τους την ίδια οριζόντια δύναμη F κάθετα σε κάθε ράβδο. Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων α_1 και α_2 , που θα αποκτήσουν αντίστοιχα οι δύο ράβδοι ισχύει:

(α) $\alpha_1 < \alpha_2$

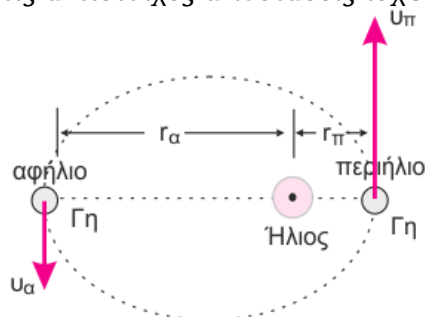
(β) $\alpha_1 > \alpha_2$

(γ) $\alpha_1 = \alpha_2$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.11.** Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο στον Ήλιο ονομάζεται Περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο Αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει $r_\alpha = 2r_\pi$, τότε:



(α) Για τις ταχύτητες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει $v_\alpha = 2v_\pi$

(β) Για τις κινητικές ενέργειες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει $K_\pi = 4K_\alpha$.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

2.12. Ένας ομογενής δίσκος στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Ένα κομμάτι γύψου μάζας m πέφτει κατακόρυφα και κολλάει στο δίσκο σε απόσταση l από τον άξονα περιστροφής.

- (α) Ο γύψος ελάχιστα πριν ακουμπήσει στον δίσκο, έχει ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου στροφορμή ίση με μηδέν.
- (β) Αμέσως μετά την κρούση η στροφορμή του συστήματος δίσκος-γύψος μειώνεται.
- (γ) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μειώνεται μετά την κρούση.
- (δ) Στην κρούση αυτή δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

2.13. Δυο χορευτές του καλλιτεχνικού πατινάζ πιάνονται αντικριστά με τεντωμένα χέρια και περιστρέφονται. Κάποια στιγμή λυγίζουν τα χέρια τους ώστε τα σώματά τους να πλησιάσουν μεταξύ τους. Ποιο από τα παρακάτω μεγέθη θα αυξηθεί:

- (α) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος.
- (β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος.
- (γ) Η στροφορμή του συστήματος.
- (δ) Η περίοδος περιστροφής.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

2.14. Ένα σωματίο μάζας m περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η απόσταση του σωματίου από τον άξονα διπλασιαστεί, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα, η στροφορμή του ως προς τον άξονα περιστροφής:

- (α) διπλασιάζεται.
- (β) τετραπλασιάζεται.
- (γ) παραμένει σταθερή.
- (δ) υποδιπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.15.** Στα άκρα μιας οριζόντιας αβαρούς ράβδου μήκους βρίσκονται δύο όμοιες μάζες $m_1 = m_2 = m$. Το σύστημα περιστρέφεται με συχνότητα f_1 γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου. Αν λόγω εσωτερικών δυνάμεων υποδιπλασιαστεί η απόσταση κάθε μάζας από τον άξονα περιστροφής, τότε:

- (α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποδιπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος υποδιπλασιάζεται.
 (β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποτετραπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
 (γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος παραμένει σταθερή και η στροφορμή του συστήματος υποδιπλασιάζεται.
 (δ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποδιπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.16.** Ένας κύβος και ένας δίσκος έχουν ίδια μάζα και αφήνονται από το ίδιο ύψος να κινηθούν κατά μήκος δύο κεκλιμένων επιπέδων. Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές και φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα v_1 . Ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα v_2 . Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι: $I = \frac{1}{2}MR^2$ τότε:

(α) $v_2 = v_1$ (β) $v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}v_1$ (γ) $v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}v_1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.17.** Ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου είναι v_{cm} . Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Η ολική κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

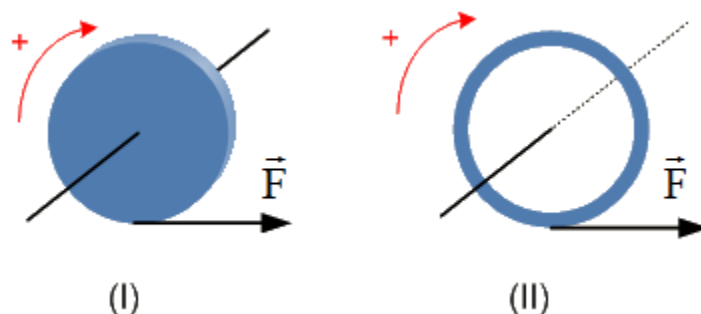
(α) $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ (β) $\frac{3}{4}Mv_{cm}^2$ (γ) $\frac{7}{8}Mv_{cm}^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.18.** Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (I) και ένας ομογενής κυκλικός δακτύλιος (II), που έχουν την ίδια ακτίνα R , την ίδια μάζα m και περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

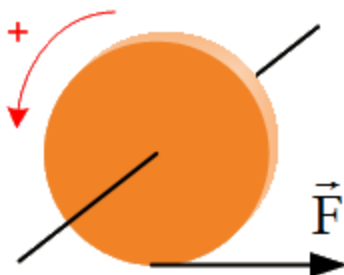
Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά σταθερές δυνάμεις ίδιου μέτρου F , εφαπτόμενες στην περιφέρεια και μετά από λίγο τα δύο σώματα σταματούν. Ο αριθμός των στροφών που θα εκτελέσουν, θα είναι:

(α) $N_I = N_{II}$ (β) $N_I > N_{II}$ (γ) $N_I < N_{II}$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.19.** Ο αρχικά ακίνητος δίσκος του σχήματος ξεκινά να στρέφεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στην επιφάνειά του.



Τη χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στροφορμή $\vec{L}_1$, ως προς τον άξονα περιστροφής του, και τη χρονική στιγμή t_2 ο δίσκος έχει στροφορμή $\vec{L}_2 = 2\vec{L}_1$. Η δύναμη από την αρχή μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 παράγει έργο $W_1 = 10J$. Από την αρχή μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη παράγει έργο:

- (α) $20J$
- (β) $30J$
- (γ) $40J$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

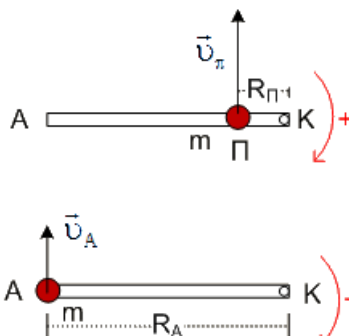
- 2.20.** Δυο συμπαγείς ομογενείς σιδερένιες σφαίρες με μάζες M_1 , M_2 και ακτίνες R_1 , R_2 , αφήνονται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ , οπότε κυλίσουν χωρίς να ολισθαίνουν. Αν δίνεται ότι $M_1 = 8M_2$ και ότι $I_{cm\sigma\phi} = \frac{2}{5}M_{\sigma\phi}R_{\sigma\phi}^2$, τότε για τις γωνιακές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν θα ισχύει:

- (α) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 4\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$
- (β) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1}$
- (γ) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 2\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$

Δίνεται ο όγκος της σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.21.** Η οριζόντια ράβδος ΑΚ του σχήματος είναι αβαρής και στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το άκρο της Κ. Η μάζα m συγκρατείται σε απόσταση (ΠΚ) = R_π από τον άξονα περιστροφής και το μέτρο της ταχύτητάς της είναι v_π .



Η μάζα αφήνεται ελεύθερη να μετακινηθεί στο σημείο Α που απέχει απόσταση (ΑΚ) = $R_A = 4R_\pi$. Για το λόγο των κινητικών ενεργειών που έχει η μάζα m στις παραπάνω θέσεις K_π και K_A αντίστοιχα, ισχύει:

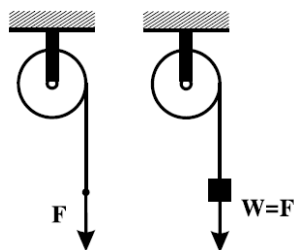
(α) $\frac{K_\pi}{K_A} = 1$

(β) $\frac{K_\pi}{K_A} = 4$

(γ) $\frac{K_\pi}{K_A} = 16$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.22.** Τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα.



Όταν στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω μέτρου F , η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων,1}$ ενώ, όταν κρεμάμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος σώμα βάρους $W = F$ η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων,2}$. Ισχύει:

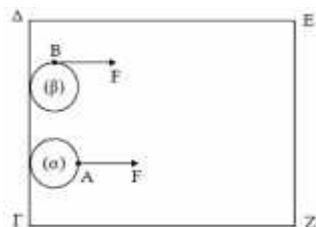
(α) $\alpha_{γων,1} = \alpha_{γων,2}$

(β) $\alpha_{γων,1} > \alpha_{γων,2}$

(γ) $\alpha_{γων,1} < \alpha_{γων,2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.23.** Δύο ίδιοι οριζόντιοι κυκλικοί δίσκοι (α) και (β) μπορούν να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο ορθογώνιο τραπέζι ΓΔΕΖ χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα.



Αρχικά οι δύο δίσκοι είναι ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν ίδια απόσταση από την πλευρά ΕΖ. Ίδιες σταθερές δυνάμεις F με διεύθυνση παράλληλη προς τις πλευρές ΔΕ και ΓΖ ασκούνται σε αυτούς. Στο δίσκο (α) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο Α του δίσκου. Στο δίσκο (β) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο Β του δίσκου.

Αν ο δίσκος (α) χρειάζεται χρόνο t_α για να φτάσει στην απέναντι πλευρά ΕΖ, ενώ ο δίσκος (β) χρόνο t_β , τότε:

(α) $t_\alpha > t_\beta$

(β) $t_\alpha = t_\beta$

(γ) $t_\alpha < t_\beta$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.24.** Χορεύτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ στρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα έχοντας τα χέρια της ανοιχτά. Όταν συμπύσσει τα χέρια της μεταβάλλει την γωνιακή της ταχύτητα κατά 60 %. Ο λόγος της αρχικής προς την τελική κινητική της ενέργεια είναι:

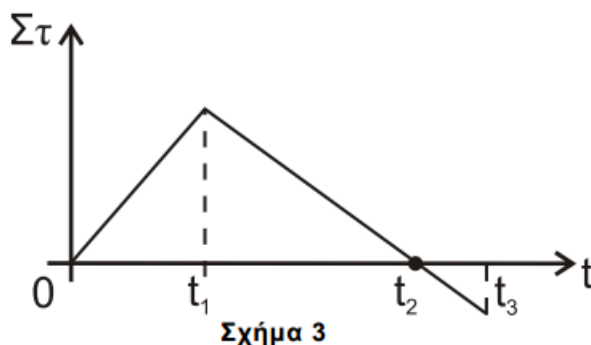
(α) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{8}$

(β) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{3}$

(γ) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{5}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

- 2.25.** Οριζόντιος, αρχικά ακίνητος, δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο δίσκο μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Τότε, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει τη μέγιστη τιμή της τη χρονική στιγμή:

(α) t_1 (β) t_2 (γ) t_3

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές Πανεληθίνες - Ιούνιος 2014

- 2.26.** Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (1) και ένας συμπαγής κυκλικός δακτύλιος (2), που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα.



Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια, όπως φαίνεται στο σχήμα και τα σώματα αρχίζουν να κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν στο οριζόντιο επίπεδο.

- α) Για τις ροπές αδράνειας I_1 και I_2 των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα, ισχύει:

(α) $I_1 = I_2$ (β) $I_1 > I_2$ (γ) $I_1 < I_2$

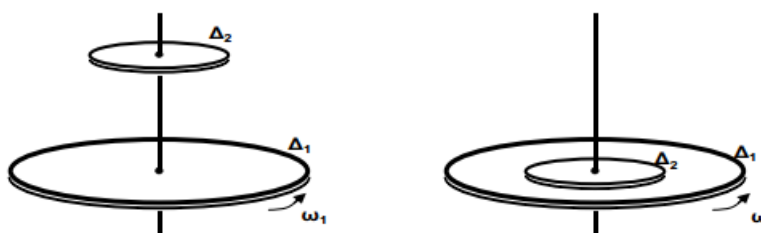
- β) Για τις επιταχύνσεις των κέντρων μάζας $a_{cm,1}$ και $a_{cm,2}$ των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα, ισχύει:

(α) $a_{cm,1} = a_{cm,2}$ (β) $a_{cm,1} < a_{cm,2}$ (γ) $a_{cm,1} > a_{cm,2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανεληθίνες Ομογενών - Σεπτέμβρης 2013

- 2.27.** Ένας δίσκος $\Delta 1$ με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ένας δεύτερος δίσκος $\Delta 2$ με ροπή αδράνειας $I_2 = \frac{I_1}{4}$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθετείται πάνω στο δίσκο $\Delta 1$, ενώ αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα. Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω .



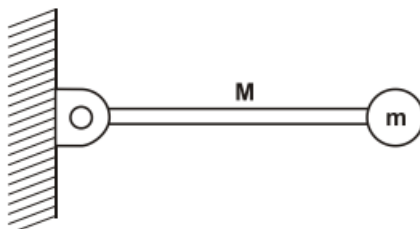
Αν L_1 είναι το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου **Δ1**, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου **Δ1** είναι:

(α) 0 (β) $\frac{1}{5}L_1$ (γ) $\frac{2}{5}L_1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Μάης 2013

- 2.28.** Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της ράβδου, είναι στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m = \frac{M}{2}$ (Σχήμα 1). Τη χρονική στιγμή που το σύστημα ράβδου-σφαιριδίου αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:



Σχήμα 1

(α) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \frac{1}{2}MgL$ (β) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = MgL$ (γ) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \frac{2}{5}MgL$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της που περνά από το άκρο της, είναι $I_\rho = \frac{1}{3}ML^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2015

- 2.29.** Ένα ομογενές σώμα (δακτύλιος ή σφαιρικός φλοιός ή συμπαγής σφαίρα) έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, που δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \alpha mR^2$, όπου m η μάζα του σώματος, R η ακτίνα του και α ένας θετικός αριθμός μικρότερος ή ίσος της μονάδας ($0 < \alpha \leq 1$). Το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω μεταφορικής κίνησης προς την ολική κινητική ενέργεια είναι $K_\mu/K_{ολ} = 5/7$, τότε το α έχει την τιμή:

(α) $\alpha = 1$ (β) $\alpha = \frac{2}{3}$ (γ) $\alpha = \frac{2}{5}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες Ομογενών - Σεπτέμβρης 2015

- 2.30.** Ένας απομονωμένος ομογενής αστέρας σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με αρχική κινητική ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής K_o . Ο αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσης του η ακτίνα του υποδιπλασιάζεται. Η νέα κινητική του ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής είναι ίση με K .

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς σφαίρας ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$. Ο λόγος $\frac{K}{K_o}$ είναι ίσος με:

(α) $\frac{1}{2}$

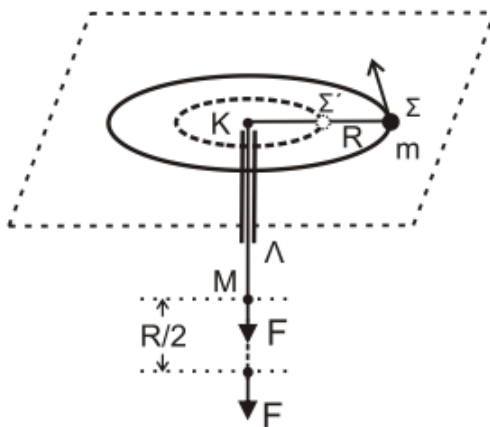
(β) 2

(γ) 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Σεπτέμβριος 2017

- 2.31.** Το σφαιρίδιο του σχήματος, μάζας m , διαγράφει οριζόντιο κύκλο ακτίνας $K\Sigma = R$ με γωνιακή ταχύτητα ω δεμένο στο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος, το οποίο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Στο άκρο Μ του νήματος ασκείται κατάλληλη δύναμη F , ώστε αυτό να κινηθεί χωρίς τριβή διαμέσου του σωλήνα μέχρι η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μάζας m να γίνει $K\Sigma' = R/2$.



Σε όλη τη διάρκεια της μεταβολής της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, θεωρούμε ότι το σφαιρίδιο κινείται εκτελώντας κυκλική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το έργο της δύναμης F για τη μετακίνηση του σφαιριδίου μάζας m θα είναι ίσο με:

(α) $\frac{1}{2}m\omega^2 R^2$

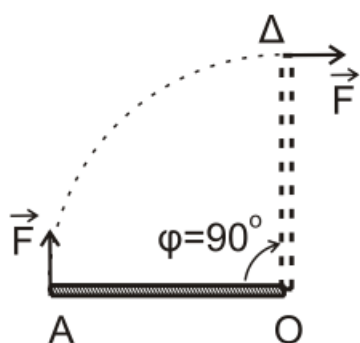
(β) $\frac{2}{3}m\omega^2 R^2$

(γ) $\frac{3}{2}m\omega^2 R^2$

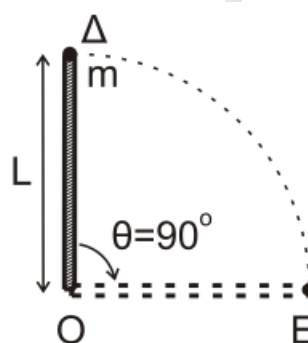
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2018

- 2.32.** Λεπτή ισοπαχής ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο. Η αρχικά ακίνητη ράβδος στη θέση (OA) , υπό την επίδραση δύναμης F σταθερού μέτρου, που ασκείται συνεχώς κάθετα στο άκρο της αρχίζει να κινείται (Σχήμα 4). Όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία $\phi = 90^\circ$ και φτάσει στη θέση (OD) , η δύναμη παύει ακαριαία να ασκείται και ταυτόχρονα συγκρούεται πλαστικά με ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m που ενσωματώνεται ακαριαία στο άκρο της Δ (Σχήμα 5).



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Ο χρόνος t που θα χρειαστεί η ράβδος με το σώμα μάζας m για να διαγράψει τη γωνία $\theta = 90^\circ$ από την θέση (OD) έως τη θέση (OE) είναι ίσος με :

(α) $\frac{1}{6}$

(β) $\frac{1}{3}$

(γ) $\frac{4}{3}$

Δίνονται :

- η ροπή αδράνειας της λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I = \frac{1}{3}ML^2$
- $M = 3kg, m = 1kg, L = 1m, F = 9\pi N$
- Όπου εμφανίζεται το π , να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση.

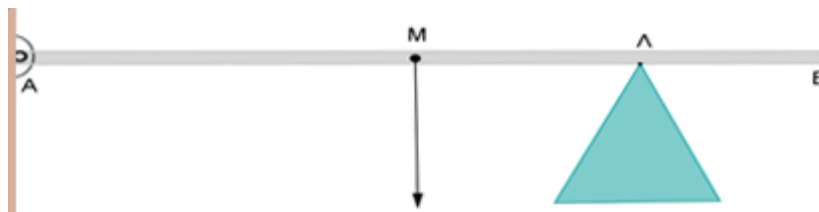
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2019

3. Θέμα Γ - Ασκήσεις

- 3.1.** Ομογενής ράβδος AB μήκους $L = 4m$ και βάρους $w = 100N$ ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και στο σημείο της Λ σε υποστήριγμα ($M\Lambda = L/4$). Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.

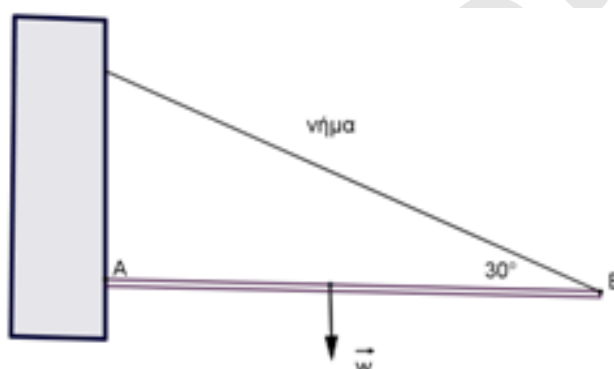
- (α) Να βρεθεί η δύναμη N που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα.



(β) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

(γ) Μετακινούμε το υποστήριγμα και το τοποθετούμε στο Z, το οποίο είναι το μέσο του AM. Πόση είναι πλέον η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στη ράβδο ;

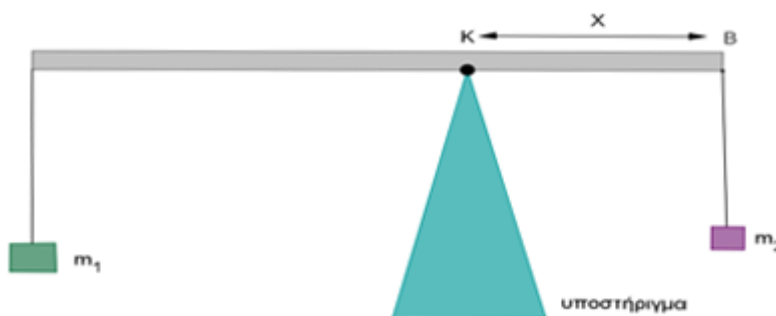
3.2. Η ράβδος AB του παρακάτω σχήματος είναι ομογενής, έχει μήκος L και βάρος $w = 100N$ και ισορροπεί οριζόντια.



(α) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος.

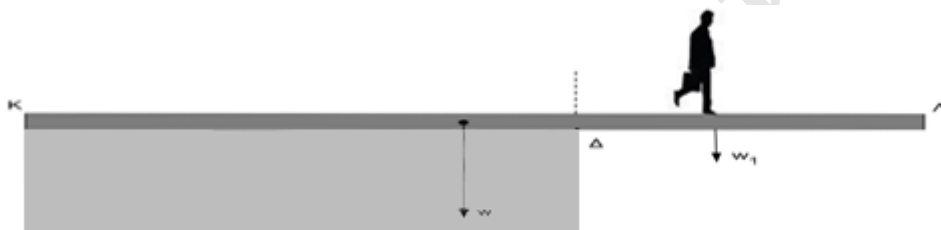
(β) Στο σημείο A η ράβδος εφάπτεται στον τοίχο. Αν η τριβή που δέχεται η ράβδος είναι μέγιστη δυνατή ώστε να ισορροπεί, να βρεθεί ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τοίχου.

3.3. Στα άκρα A και B της ομογενούς ράβδου μήκους $L = 1m$ έχουμε κρεμάσει 2 σώματα με μάζες $m_1 = 3kg$ και $m_2 = 1kg$. Δίνεται $g = 10m/s^2$.



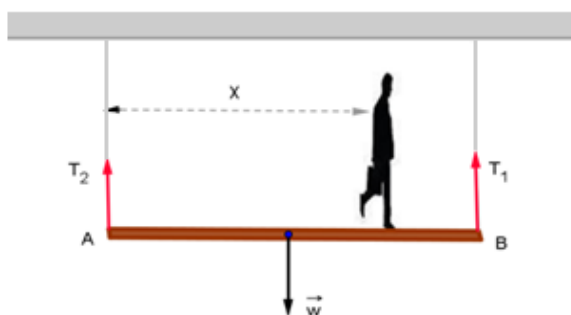
- (α) Αν η ράβδος είναι αβαρής, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα έτσι ώστε το σύστημα των τριών σωμάτων να ισορροπεί ;
- (β) Αν η ράβδος έχει βάρος $w = 60N$, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα ώστε το σύστημα να ισορροπεί ;
- (γ) Αφαιρούμε το m_1 και από τη ράβδο κρέμεται μόνο το m_2 . Πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα για να ισορροπεί η ράβδος; Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στην ράβδο ;

- 3.4.** Μια ομογενής σανίδα ΚΛ μήκους $L = 10m$ και βάρους $w = 1200N$ τοποθετείται πάνω σε μια επιφάνεια ώστε το τμήμα ΔΛ μήκους $L = 4m$ να προεξέχει της επιφάνειας. Ένας άνθρωπος βάρους $w_1 = 800N$ ξεκινάει από το άκρο Κ και κινείται πάνω στη σανίδα με κατεύθυνση προς το Λ.



- (α) Μέχρι ποια απόσταση x από το σημείο Δ μπορεί να περπατήσει ώστε να μην ανατραπεί η σανίδα ;
- (β) Πόσο είναι η μέτρο της αντίδρασης Ν εκείνη την στιγμή ;

- 3.5.** Ένας μηχανικός βάρους $w_1 = 800N$ βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ομογενή σανίδα ΑΒ, μήκους $L = 10m$ και βάρους $w = 500N$. Η σανίδα κρέμεται από δύο κατακόρυφα σχοινιά που είναι δεμένα στα άκρα Α και Β. Όλο το σύστημα ισορροπεί οριζόντιο όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α) Να βρεθούν τα μέτρα των τάσεων T_1 και T_2 των δύο σχοινιών αν $x = 8m$.
- (β) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης T_1 ;
- (γ) Για ποια τιμή της απόστασης x , το μέτρο της τάσης T_1 είναι ίσο με το μέτρο της τάσης T_2 ;

- 3.6.** Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας $R = 0,1m$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και τη χρονική στιγμή $t = 0$ δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του αριστερόστροφη δύναμη μέτρου $F_1 = 10N$ και η οποία του προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων} = 20rad/s^2$.

A. Να υπολογίσετε:

(α) Τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

(β) Τη μάζα M του δίσκου.

(γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5s$.

B. Τη χρονική στιγμή t_1 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F_1 .

(δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που θα κάνει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 15s$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

- 3.7.** Μια ομογενής λεπτή δοκός ΚΑ, μάζας $M = 6kg$ και μήκους $L = 2m$, μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Κ. Στο άκρο Α της δοκού ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού $F = 10N$ κάθετα στη δοκό και η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται αριστερόστροφα. Κατά την περιστροφή της δοκού υπάρχουν τριβές, που δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής μέτρου $\tau_T = 4N \cdot m$. Να υπολογίσετε:

(α) Το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα περιστροφής, κατά τη διάρκεια της περιστροφής της δοκού.

(β) Τη ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της.

(γ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης.

(δ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της, όταν η δοκός έχει διαγράψει $N = \frac{8}{\pi}$ περιστροφές.

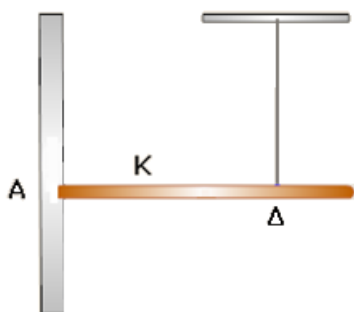
Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα κάθετο στη δοκό, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

- 3.8.** Ομογενής συμπαγής κύλινδρος ακτίνας $R = 0,05m$, μπορεί να στρέφεται (τριβές αμελητέες) γύρω από κατακόρυφο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Στην περιφέρειά του έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να σύρουμε το άκρο του νήματος, ασκώντας εφαπτομενική δύναμη μέτρου $F = 1N$. Τη χρονική στιγμή $t = 4s$, ο κύλινδρος περιστρέφεται αριστερόστροφα και έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20rad/s$. Να υπολογίσετε:

(α) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

- (β) Τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας κυλίνδρου.
- (γ) Το μέτρο της γωνιακής μετατόπισης του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 4s$.
- (δ) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίχθηκε μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 4s$, θεωρώντας ότι αυτό δεν ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

3.9. Μια ομογενής ράβδος, μάζας $M = 3kg$ και μήκους $L = 2m$, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, στηριζόμενη με το αριστερό άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και δεμένη στο σημείο Δ στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος, του οποίου το πάνω άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Αν η τάση του νήματος είναι $T = 20N$, να υπολογίσετε:



- (α) την απόσταση του σημείου Δ, από το άκρο Α.
- (β) τη δύναμη στήριξης από την άρθρωση.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα, οπότε η ράβδος πέφτει στρεφόμενη γύρω από την άρθρωση. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή:

- (γ) της εκκίνησης.
- (δ) κατά την οποία η ράβδος σχηματίζει με την αρχική θέση γωνία ϕ , τέτοια ώστε $\sin\phi = 0,8$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

3.10. Ο τροχός ενός αναποδογυρισμένου ποδηλάτου, αποτελείται από ομογενή στεφάνη αμελητέου πάχους, με μάζα $M = 1kg$ και ακτίνα $R = 0,5m$, και τις ακτίνες του, μάζας $m = 0,02kg$ η καθεμία και μήκους $L = R$. Ο τροχός στρέφεται αρχικά γύρω από τον άξονά του, στο κέντρο του, έχοντας γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 100rad/s$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, "πατάμε" το φρένο, οπότε ο τροχός ακινητοποιείται με σταθερό ρυθμό σε $t_1 = 2s$. Να υπολογίσετε:

- (α) τη ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

(β) τον αριθμό των ακτίνων του τροχού.

(γ) τον αριθμό των στροφών, που έκανε ο τροχός μέχρι να ακινητοποιηθεί.

(δ) το μέτρο της δύναμης της τριβής, που εφαρμόστηκε από το φρένο στη στεφάνη.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της κάθε ακτίνας ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα διερχόμενο από το άκρο της: $I_{\alpha} = \frac{1}{3}ML^2$, η ροπή αδράνειας ολόκληρου του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από τον άξονά του είναι $I_{\text{το}} = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3.11. Ομογενής λεπτή ράβδος μήκους $L = 1,5 \text{ m}$ και μάζας $M = 4 \text{ kg}$ μπορεί να στραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο σε αυτήν στο άκρο της Ο. Ένα σωματίδιο, μάζας $m = 2 \text{ kg}$, είναι στερεωμένο στο άλλο άκρο της Α. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη, οπότε περιστρέφεται ως προς τον άξονα στο Ο σε κατακόρυφο επίπεδο.

A. Να υπολογίσετε:

(α) την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος.

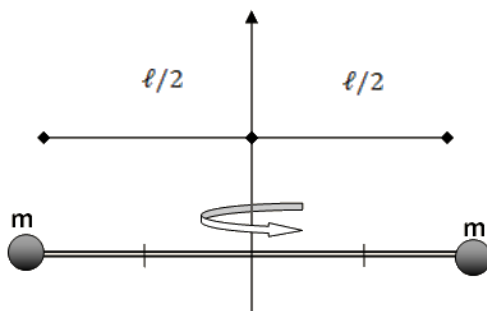
(β) το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα στο Ο τη χρονική στιγμή t_1 , που η ράβδος έχει διαγράψει γωνία ϕ , τέτοια ώστε $\sin\phi = 0,5$.

(γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 .

B. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση του συνημιτόνου της γωνίας ϕ , που σχηματίζει η ράβδος με τον οριζόντιο ημιάξονα Οχ, κατά την περιστροφή της από την αρχική οριζόντια θέση έως την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3.12. Δύο σημειακές μεταλλικές σφαίρες από σιδηρομαγνητικό υλικό, που η καθεμιά έχει μάζα $m = 0,05 \text{ kg}$ είναι τοποθετημένες σε μια πλαστική κούφια αβαρή ράβδο, μήκους $l = 1 \text{ m}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε αυτή.

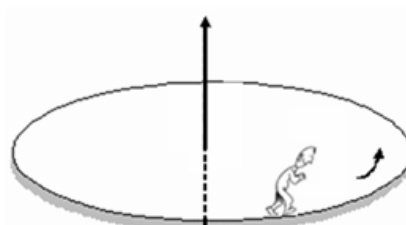


Στο μέσον της ράβδου και εσωτερικά είναι τοποθετημένος ένας αβαρής ηλεκτρομαγνήτης τον οποίο μπορούμε να ενεργοποιούμε από απόσταση. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου. Αρχικά ο ηλεκτρομαγνήτης είναι απενεργοποιημένος, το σύστημα στρέφεται με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi} \text{Hz}$ και οι σφαίρες βρίσκονται στα άκρα της ράβδου συγκρατούμενες με λεπτό αβαρές νήμα που διατρέχει την κούφια ράβδο. Ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη οπότε οι σφαίρες μετακινούνται ταυτόχρονα και πλησιάζουν σε απόσταση $\frac{l}{4}$ η καθεμιά από το μέσον της ράβδου Ο, όπου και σταματούν με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού.

- (α) Να υπολογιστεί η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος.
- (β) Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του συστήματος.
- (γ) Να υπολογιστεί η νέα συχνότητα περιστροφής του συστήματος.
- (δ) Πόσο τοις εκατό θα μεταβληθεί η συχνότητα περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών;

3.13. Ένας άνθρωπος μάζας $m = 60 \text{kg}$ στέκεται ακίνητος στην περιφέρεια ακίνητης οριζόντιας πλατφόρμας μάζας $M = 160 \text{kg}$ και ακτίνας $R = 1,5 \text{m}$.

Η πλατφόρμα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Την στιγμή $t = 0$, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά πάνω στην περιφέρεια της πλατφόρμας, με ταχύτητα σταθερού μέτρου, $v = 2 \text{m/s}$ ως προς το έδαφος, κινούμενος αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

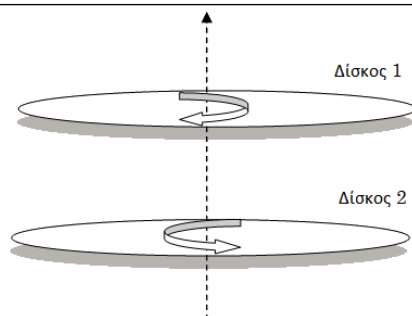


- (α) Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της στροφορμής του ανθρώπου. Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της στροφορμής του. Ο άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί σημειακό αντικείμενο.
- (β) Θα κινηθεί η πλατφόρμα; Αν ναι, με ποια γωνιακή ταχύτητα και προς ποια κατεύθυνση;
- (γ) Μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο άνθρωπος θα ξαναβρεθεί στη θέση της πλατφόρμας από την οποία ξεκίνησε;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το κέντρο της, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

3.14. Οριζόντιος ομογενής δίσκος (1) μάζας $m = 1 \text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{m}$, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 10 \text{rad/s}$ κατά τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Δεύτερος, όμοιος δίσκος (2) περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$ με φορά αντίθετη από αυτήν της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από τα κέντρα και των δύο δίσκων και είναι κάθετος σε αυτούς.

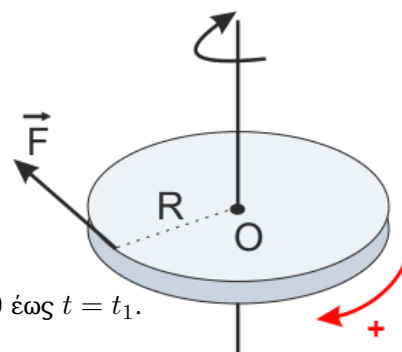


- (α) Να σχεδιάσετε τις στροφορμές των δύο δίσκων ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
- (β) Τη χρονική στιγμή ο δίσκος 1 αφήνεται πάνω στο δίσκο 2, οπότε λόγω τριβών οι δύο δίσκοι αποκτούν την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Να υπολογιστεί η κοινή γωνιακή τους ταχύτητα.
- (γ) Από τη στιγμή που οι δίσκοι έρχονται σε επαφή, μέχρι να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα πέρασε χρόνος $\Delta t = 0,1 \text{ s}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής της τριβής που ασκήθηκε σε κάθε δίσκο στο χρονικό διάστημα αυτό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν και διέρχεται από το κέντρο μάζας του, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

- 3.15.** Οριζόντιος ομογενής και συμπαγής δίσκος, μάζας $M = 6 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 1 \text{ m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (O). Αρχικά ο δίσκος ηρεμεί.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο δίσκο δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου 6 N η οποία εφάπτεται συνεχώς στην περιφέρειά του, οπότε ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται. Κάποια χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στροφορμή μέτρου $L = 60 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Για αυτή τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε:

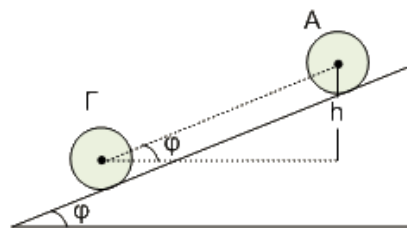


- (α) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = t_1$.
- (β) τον αριθμό των στροφών που έχει διαγράψει ο δίσκος στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
- (γ) το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρει ενέργεια στο δίσκο τη χρονική στιγμή t_1 .
- (δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 . Τι εκφράζει ο ρυθμός αυτός;

Δίνονται: $\frac{50}{\pi} \simeq 16$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

- 3.16.** Μια ομογενής και συμπαγής σφαίρα μάζας $M = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$ αφήνεται (θέση A) να κυλήσει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης ϕ , με $\eta\mu\phi = 0,35$.

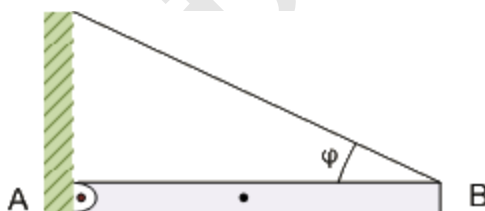
Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Τη στιγμή που το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει κατακόρυφη μετατόπιση $h = 7m$ (θέση Γ), να υπολογίσετε:



- (α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.
- (β) τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει μέχρι τότε.
- (γ) το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας σε κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της κίνησής της.
- (δ) Για τη μετατόπιση της σφαίρας από τη θέση Α έως τη θέση Γ να υπολογίσετε με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου-ενέργειας το έργο της στατικής τριβής: (δ1) κατά τη μεταφορική κίνηση. (δ2) κατά τη περιστροφική κίνηση. Τι παρατηρείτε;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονά της $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

- 3.17.** Η ράβδος AB είναι ομογενής και ισοπαχής με μήκος $L = 2m$ και μάζα $M = 3kg$. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Β συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα που σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με τη ράβδο, η οποία ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

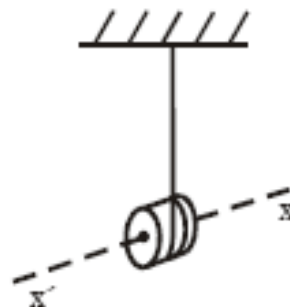


- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το νήμα. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα στο άκρο Β και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από την άρθρωση σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε:
- (β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.
- (γ) Την κινητική ενέργεια της ράβδου, τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.
- (δ) Σε ποια θέση της ράβδου, καθώς αυτή κινείται από την οριζόντια αρχική της θέση και μέχρι να διέλθει από την κατακόρυφη θέση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της είναι στιγμιαία μηδέν

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

- 3.18.** Το γιο-γιο του σχήματος αποτελείται από ομογενή συμπαγή κύλινδρο που έχει μάζα $m = 0,12kg$ και ακτίνα $R = 1,5 \times 10^{-2}m$. Γύρω από τον κύλινδρο έχει τυλιχτεί νήμα.

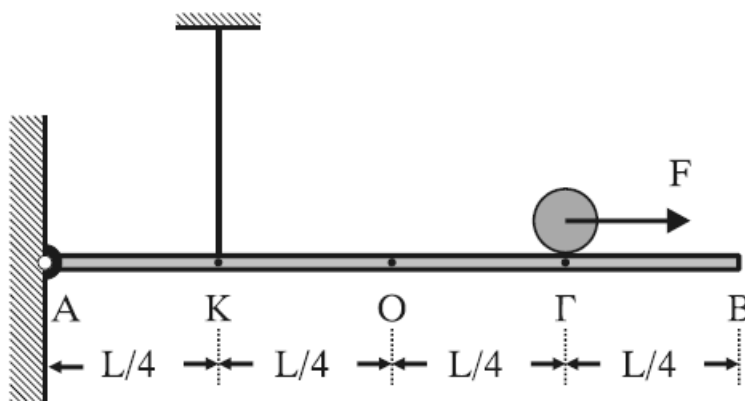
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Το νήμα σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου παραμένει κατακόρυφο και τεντωμένο και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $l = 20R$, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = 2m/s$.



- (α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, καθώς αυτός κατέρχεται.
- (γ) Τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = 2m/s$, κόβουμε το νήμα. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του μετά την πάροδο χρόνου $0,8s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.
- (δ) Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της στροφορμής σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο $0,8s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

- 3.19.** Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L = 4m$ και μάζας $M = 2kg$ ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Σε σημείο Κ της ράβδου έχει προσδεθεί το ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς νήματος σταθερού μήκους, με το επάνω άκρο του συνδεδεμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στο σημείο Γ ισορροπεί ομογενής σφαίρα μάζας $m = 2,5kg$ και ακτίνας $r = 0,2m$. Δίνονται $(AK) = \frac{L}{4}$ και $(AG) = \frac{3L}{4}$.

- (α) Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στη ράβδο.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο κέντρο μάζας της σφαίρας με κατάλληλο τρόπο, σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 7N$, με φορά προς το άκρο Β. Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

(β) Να υπολογισθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας κατά την κίνησή της.

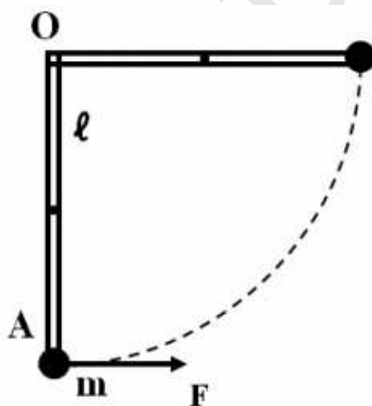
(β) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο Β.

(β) Να υπολογισθεί το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο Β.

Δίνονται: $g = 10m/s^2$, και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.

Πανελλήνιες Εξετάσεις Μάης 2008

- 3.20.** Ομογενής και ισοπαχής δοκός (ΟΑ), μάζας $M = 6kg$ και μήκους $l = 0,3m$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο της άκρο Α υπάρχει στερεωμένη μικρή σφαίρα μάζας $m = \frac{M}{2}$.



(α) Βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος δοκού - σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F = \frac{120}{\pi}N$ που είναι συνεχώς κάθετη στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(β) Βρείτε το έργο της δύναμης F κατά την περιστροφή του συστήματος μέχρι την οριζόντια θέση της.

(γ) Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκού - σφαίρας στην οριζόντια θέση.

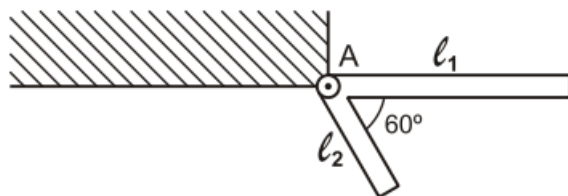
Επαναφέρουμε το σύστημα δοκού-σφαίρας στην αρχική κατακόρυφη θέση του. Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F' = 30\sqrt{3}N$, που είναι συνεχώς κάθετη στη δοκό.

(δ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφο τη στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται μέγιστη.

Δίνονται: $g = 10\text{m/s}^2$, $I_{cm} = \frac{1}{12}Ml^2$, η ροπή αδράνειας ομογενούς δοκού μάζας M και μήκους l , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν.

(Πανελλήνιες Εξετάσεις Μάης 2012, Πρόβλημα στην διατύπωση του (δ), θεωρήστε ότι η γωνία είναι μικρότερη από 2π .)

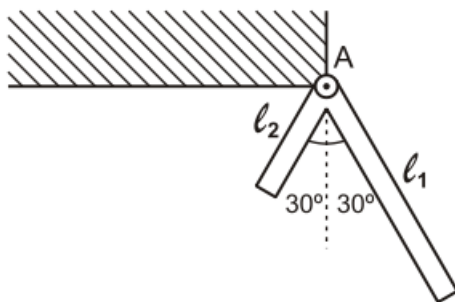
- 3.21.** Δύο ράβδοι είναι συνδεδεμένες στο άκρο τους Α και σχηματίζουν σταθερή γωνία 60° μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Οι ράβδοι είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά κάθε μία είναι ομογενής. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άρθρωση, που είναι στερεωμένη σε τοίχο, στο άκρο Α, χωρίς τριβές. Το σύστημα αφήνεται να περιστραφεί υπό την επίδραση της βαρύτητας από τη θέση του Σχήματος 7, όπου η ράβδος l_1 είναι οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μηδέν.



Σχήμα 7

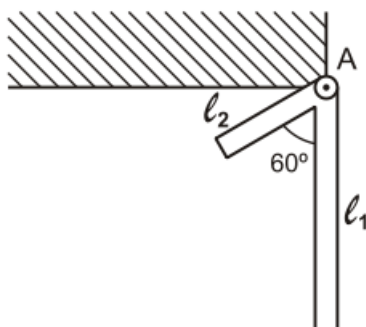
Δίνεται ότι τα μήκη των δύο ράβδων είναι $l_1 = 4\text{m}$ και $l_2 = 2\text{m}$, ενώ η μάζα της ράβδου l_2 είναι $m_2 = 10\text{kg}$

- (α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους l_1 , εάν το σύστημα αποκτά τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8

- (β) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 της ράβδου μήκους l_1 , εάν το σύστημα σταματά στιγμιαία, όταν η ράβδος μήκους l_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση που φαίνεται στο Σχήμα 9.
- (γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δύο ράβδων του ερωτήματος (β) στη θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 9.
- (δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου μήκους l_2 του ερωτήματος (β) στη θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 9.

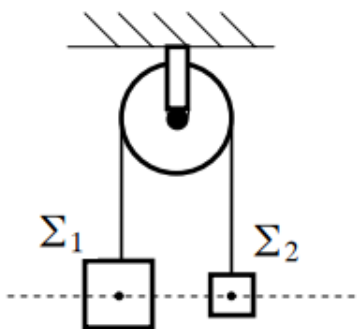


Σχήμα 9

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας ράβδου μήκους l και μάζας m που περιστρέφεται γύρω από το άκρο της A, $I = \frac{1}{3}ml^2$, και ότι $\sqrt{3} = 1,7$ (προσεγγιστικά).

Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις Ιούνης 2015

- 3.22.** Η ομογενής τροχαλία του σχήματος 3 έχει μάζα $M = 4\text{kg}$ και ακτίνα $R = 0,1\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Τα σώματα Σ1 και Σ2 έχουν μάζες $m_1 = 2\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$ αντίστοιχα και είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς σχοινιού που διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας. Αρχικά, τα σώματα Σ1 και Σ2 διατηρούνται ακίνητα και τα κέντρα μάζας τους βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τα σώματα αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν.



Σχήμα 3

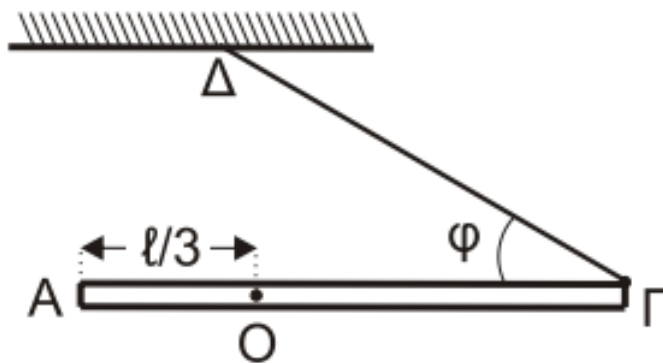
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ1 τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$.
- Να υπολογίσετε τον αριθμό περιστροφών της τροχαλίας μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των σωμάτων Σ1, Σ2 και τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$, Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Να θεωρήσετε ότι : Μεταξύ σχοινιού και τροχαλίας η τριβή είναι μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Το μήκος του σχοινιού παραμένει σταθερό. Τα σώματα Σ1 και Σ2 δεν φθάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

Θέματα Ομογενών - Σεπτέμβρης 2016

- 3.23.** Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 1,2\text{m}$ και μάζας $M = 1\text{kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο σε απόσταση $\ell/3$ από το άκρο Α της ράβδου. Το άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με αβαρές νήμα που σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με τη ράβδο, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο Δ όπως στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται.



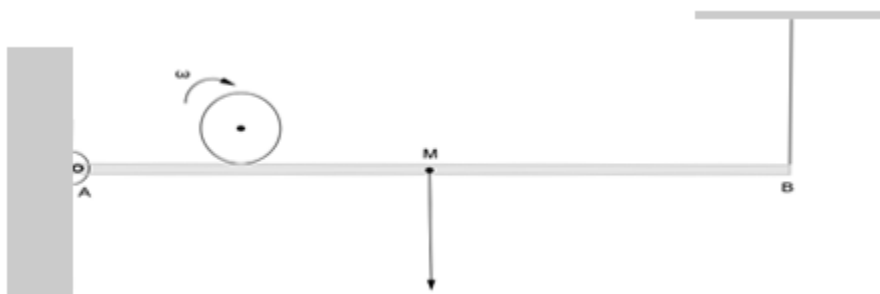
- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στη ράβδο και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, πριν κοπεί το νήμα.
- (β) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της και τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή κατά την οποία κόβεται το νήμα.
- (γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του άκρου Γ της ράβδου τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ράβδος διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου τη χρονική στιγμή που σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφη, μετά τη διέλευσή της για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$

Πανελλήνιες(παλαιό σύστημα) - Μάης 2016

4. Θέμα Δ - Προβλήματα

- 4.1.** Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος $w_1 = 10N$ και μήκος $L = 4m$. Το ένα της άκρο αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο και το άλλο της άκρο κρέμεται από κατακόρυφο σχοινί με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια.

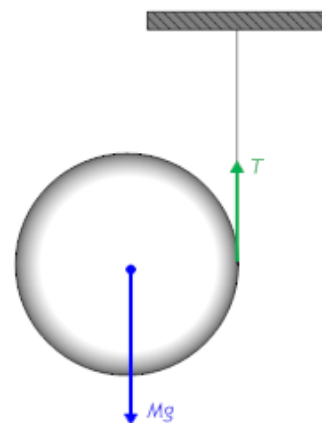


- (α) Να βρεθεί η τάση του νήματος.
 (β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.
 Τη χρονική στιγμή $t = 0$, από το άκρο Α ξεκινάει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ένας κύλινδρος βάρους $w_2 = 10N$ με επιτάχυνση $a_{cm} = 1m/s^2$. Ζητείται:
 (γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t = \sqrt{3}s$.
 (δ) Η γωνιακή ταχύτητα και η θέση του κυλίνδρου, όταν η τάση του νήματος γίνει $T = 10N$.
 (Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου $R = 0,1m$)

- 4.2.** Στο κυρτό μέρος της περιφέρειας ενός ομογενούς κυλίνδρου μικρού πάχους, έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα.

Σταθεροποιούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει κατακόρυφα. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση: μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω και περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, που περνά από το κέντρο του.

Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το νήμα παραμένει κατακόρυφο και δεν γλιστρά στην περιφέρεια του κυλίνδρου.



- (α) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου a_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνσή του $a_{γων}$ συνδέονται με τη σχέση: $a_{cm} = a_{γων} \cdot R$.
 Να υπολογίσετε:
 (β) τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.
 (γ) την τάση T του νήματος.
 (δ) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί όταν ο κύλινδρος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 75rad/s$.

Δίνονται: η μάζα του κυλίνδρου $M = 0,09kg$, η ακτίνα του $R = \frac{8}{3}cm$, η ροπή αδράνειάς του ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

4.3. Μια μπάλα, μάζας m και ακτίνας R , αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης ϕ , οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

(α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις, που ασκούνται στη μπάλα και να αιτιολογήσετε το σχεδιασμό της στατικής τριβής.

Να υπολογίσετε:

(β) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της μπάλας.

(γ) το μέτρο της στατικής τριβής, αν η μάζα της μπάλας είναι $m = 0,5kg$.

(δ) τις επιτρεπτές τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μ_s για τις οποίες η μπάλα μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται ότι $\eta\mu\phi = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,866$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η μπάλα θεωρείται κοίλη σφαίρα με ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{2}{3}mR^2$

4.4. Ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 2kg$ και ακτίνας $R = 0,2m$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο (Α) με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 2m/s$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο κύλινδρος δέχεται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 6N$, που ασκείται στο κέντρο μάζας του. Ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά την άσκηση της δύναμης F .

(α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο:

(β1) της στατικής τριβής.

(β2) της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

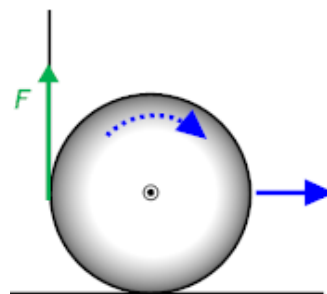
(β3) της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$.

(γ) Στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$, ο κύλινδρος εισέρχεται σε λείο δάπεδο (Β), το οποίο είναι συνέχεια του προηγούμενου. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10s$, να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου του κυλίνδρου, που είναι εκείνη τη στιγμή σ' επαφή με το λείο δάπεδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονά του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

- 4.5.** Ένας ομογενής δίσκος, μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,3\text{m}$, που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο, φέρει στην περιφέρειά του αυλάκι, στο οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ασκούμε στο δίσκο μέσω του νήματος σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 9\text{N}$. Καθώς ξετυλίγεται το νήμα χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, ο δίσκος κυλίζει επίσης χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση, πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.



- (α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

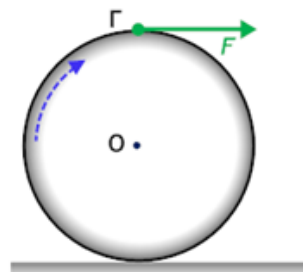
- (β) Να υπολογίσετε:

- (β1) το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος.
 (β2) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου.
 (β3) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί από τη στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή t_1 , κατά την οποία το ανώτερο σημείο του δίσκου έχει αποκτήσει ταχύτητα $v_A = 12\text{m/s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονά του: $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

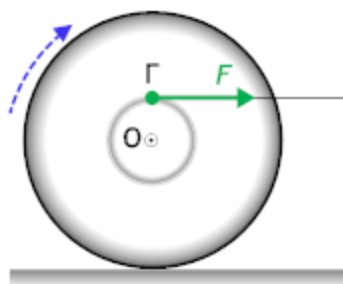
- 4.6.** Γύρω από ένα ομογενή δίσκο, ακτίνας R , μάζας $m = 2\text{kg}$ και ροπής αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, μέσω του οποίου, τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκούμε στο ανώτερο σημείο Γ οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 6\text{N}$.

Ο τροχός κυλίζει χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο, που έχει τέτοια τιμή συντελεστή στατικής τριβής μ_s , ώστε οριακά να αποφεύγεται η ολίσθηση. Να υπολογίσετε:



- (α) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας Ο.
 (β) το μέτρο της επιτάχυνσης του ανώτερου σημείου Γ.
 (γ) τη δύναμη της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο.
 (δ) το συντελεστή στατικής τριβής.

- 4.7.** Ένας κύλινδρος ακτίνας R έχει μάζα $m = 4kg$. Στο εσωτερικό του υπάρχει μία κυλινδρική εγκοπή, ακτίνας $r = \frac{R}{3}$ πολύ μικρού πάχους, στην οποία έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο άκρο του νήματος και πάνω από το κέντρο μάζας, ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 9N$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε τον κύλινδρο ομογενή με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$. Να υπολογίσετε:



- (α) το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
 (β) το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο και να την σχεδιάσετε σε κατάλληλο σχήμα.
 (γ) το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης του σημείου επαφής Γ νήματος - κυλίνδρου.
 (δ) το μήκος του νήματος, που ξετυλίχτηκε, έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$.

- 4.8.** Συμπαγής και ομογενής τροχός μάζας $m = 10kg$ και ακτίνας $R = 0,2m$ κυλίνεται ανερχόμενος κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi = 10^\circ$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου $v_{cm} = 10m/s$. Να υπολογίσετε:

- (α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας και το μέτρο της στροφορμής του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 0$.
 (β) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού καθώς ανέρχεται.
 (γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού καθώς ανέρχεται.
 (δ) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού, όταν αυτός ανερχόμενος έχει διαγράψει $N = \frac{54}{4\pi}$ περιστροφές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν και διέρχεται από το κέντρο μάζας του, $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ και $g = 10m/s^2$.

- 4.9.** Ένα γιο-γιο αποτελείται από κύλινδρο μάζας $m = 0,1\text{kg}$ και ακτίνας $R = \frac{1}{15}m$, γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Κρατάμε ακίνητο το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Αυτός εκτελεί σύνθετη κίνηση κινούμενος κατακόρυφα χωρίς να ολισθαίνει. Να βρείτε:

- (α) τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου καθώς κατέρχεται.
- (β) το ρυθμό αύξησης της στροφορμής του κυλίνδρου καθώς κατέρχεται.
- (γ) την ταχύτητα του χαμηλότερου σημείου του δίσκου, τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $l = 30\text{cm}$.
- (δ) την ταχύτητα του χαμηλότερου σημείου του δίσκου, τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $l = 30\text{cm}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

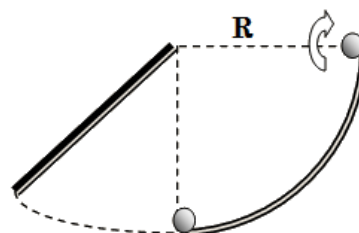
- 4.10.** Η κυκλική εξέδρα μιας παιδικής χαράς έχει ακτίνα $R = 1\text{m}$, μάζα $M = 80\text{kg}$, είναι ακίνητη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Ένα αγόρι μάζας $m = 20\text{kg}$ ενώ τρέχει στο έδαφος γύρω γύρω έξω από την εξέδρα με ταχύτητα μέτρου $v = 3\text{m/s}$, ξαφνικά πηδάει στην περιφέρεια της εξέδρας και μένει εκεί χωρίς να ολισθήσει. Να βρείτε:

- (α) τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, όταν το αγόρι ανέβει στην περιφέρεια της εξέδρας.
- (β) τη δύναμη της στατικής τριβής που ασκείται στο αγόρι, αν στέκεται στη περιφέρεια της εξέδρας χωρίς να κρατιέται από τα στηρίγματα.
- (γ) τη σταθερή εξωτερική δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε εφαπτομενικά στην εξέδρα, ώστε αυτή να σταματήσει να περιστρέφεται μετά από χρόνο $t = 3\text{s}$.
- (δ) πόσες περιστροφές έκανε η εξέδρα στο χρονικό διάστημα των 3s .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

- 4.11.** Μία κατακόρυφη ράβδος μάζας $M = 3\text{kg}$ και μήκους $l = 1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω άκρο της και είναι κάθετος σε αυτή.

Εκτρέπουμε τη ράβδο από τη θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη. Τη στιγμή που περνάει από την κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο της συγκρούεται με σφαίρα ακτίνας $r = 0,1\text{m}$ και μάζας $m = 1\text{kg}$ που βρίσκεται ακίνητη στο κατώτατο σημείο τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 1\text{m}$, του οποίου το κέντρο συμπίπτει με το σημείο εξάρτησης της



ράβδου. Το κάτω άκρο της ράβδου την στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα $v_1 = 5\text{ m/s}$.

Αμέσως μετά την κρούση η ράβδος ακινητοποιείται. Η σφαίρα ανέρχεται στο τεταρτοκύκλιο στην αρχή ολισθαίνοντας και μετά κυλιόμενη. Τελικά εγκαταλείπει το ανώτερο άκρο του τεταρτοκυκλίου με γωνιακή ταχύτητα $\omega_3 = 8\text{ rad/s}$. Να βρεθούν:

- (α) η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- (β) η ταχύτητα v_2 της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
- (γ) το ύψος h , πάνω από το τεταρτοκύκλιο, στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα.
- (δ) η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σ' αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{cm} = \frac{1}{12}Ml^2$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.

- 4.12.** Μια ξύλινη ράβδος μήκους $l = 0,4\text{ m}$ και μάζας $M = 0,04\text{ kg}$ ισορροπεί ελεύθερη σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Ένα σώμα Σ μάζας $m = 0,01\text{ kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v = 4\text{ m/s}$ χτυπά κάθετα στο άκρο Α της ράβδου. Μετά την κρούση το σώμα Σ ακινητοποιείται. Αν γνωρίζουμε ότι το σώμα Σ ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου έχει στροφορμή που βρίσκεται από τη σχέση $L = \frac{mvl}{2}$, να βρείτε:

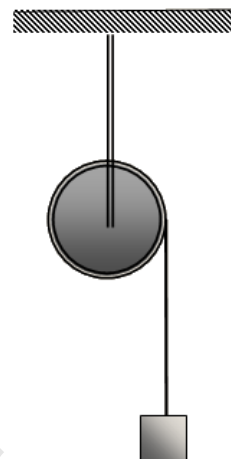
- (α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
- (β) τον άξονα γύρω από τον οποίο θα περιστραφεί η ράβδος και τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει.
- (γ) τον αριθμό των περιστροφών που θα εκτελέσει η ράβδος στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μετατοπιστεί το κέντρο μάζας της κατά 1 m .
- (δ) Την ταχύτητα του πάνω άκρου της ράβδου (Β), όταν αυτή θα έχει συμπληρώσει 1,5 περιστροφές.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{cm} = \frac{1}{12}Ml^2$.

- 4.13.** Μια κατακόρυφη τροχαλία έχει τυλιγμένο γύρω της ένα λεπτό αβαρές σχοινί, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σώμα (Σ) μάζας $m = 1\text{ kg}$.

Η τροχαλία έχει ακτίνα $R = 0,1\text{m}$, μάζα $M = 2\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της τροχαλίας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί. Να βρείτε:

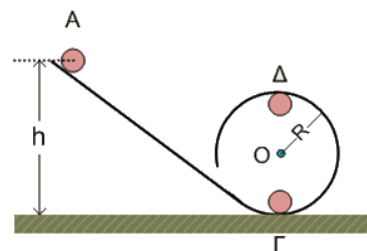


- (α) Την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Σ.
- (β) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας περιστροφής στην τροχαλία.
- (γ) Για τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ ζητούνται:
 - (γ1) Η στροφορμή της τροχαλίας
 - (γ2) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. Τριβές δεν υπάρχουν.

- 4.14.** Η ομογενής και συμπαγής σφαίρα του σχήματος έχει μάζα $m = 1\text{kg}$ και ακτίνα $r = 0,2\text{m}$ και αφήνεται από ύψος h , να κινηθεί κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου και στη συνέχεια στο εσωτερικό της κυκλικής στεφάνης ακτίνας $R = 10,2\text{m}$.

Η σφαίρα κυλίνεται συνεχώς χωρίς να ολισθαίνει. Για να κάνει η σφαίρα με ασφάλεια ανακύκλωση, να υπολογιστεί:

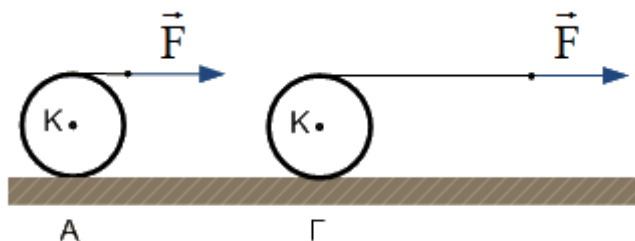


- (α) το μέτρο της ελάχιστης τιμής της ταχύτητάς της στο σημείο Δ.
- (β) το μέτρο της ελάχιστης γωνιακής ταχύτητας ως προς τον άξονα περιστροφής της, στο σημείο Γ.
- (γ) το μέτρο της κάθετης δύναμης που δέχεται από το οριζόντιο επίπεδο στη θέση Γ αν από τη θέση αυτή διέρχεται με γωνιακή ταχύτητα ίση με αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα β.
- (δ) το ελάχιστο ύψος h .

Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονά της $I_{cm} = \frac{2}{5}Mr^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και $\sqrt{\frac{27}{7}} \simeq 1,96$.

- 4.15.** Στην επιφάνεια ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,3\text{m}$, έχουμε τυλίξει λεπτό σχοινί αμελητέας μάζας, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 6N , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το σχοινί ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίνεται χωρίς ολίσθηση και αρχικά ηρεμούσε στη θέση Α. Όταν βρεθεί στη θέση Γ έχει ξετυλιχθεί σχοινί τόσο, ώστε το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ να έχει μετατοπιστεί κατά $L = 4\text{m}$. Να υπολογισθεί:



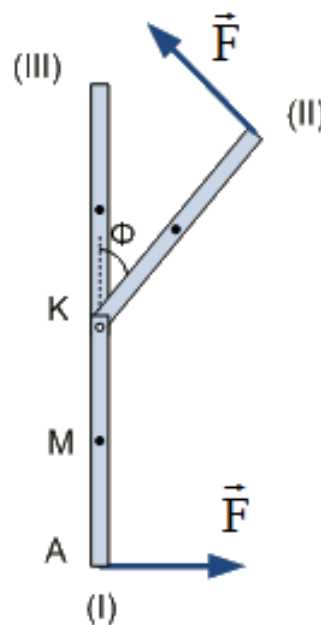
- (α) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- (β) η στατική τριβή.
- (γ) η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στη θέση Γ.
- (δ) το ποσοστό της κινητικής του ενέργειας που είναι στροφική στη θέση Γ.

Δίνονται: η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

- 4.16.** Η ομογενής ράβδος ΑΚ στηρίζεται στο άκρο της Κ μέσω άρθρωσης και αρχικά κρέμεται κατακόρυφα (θέση Ι). Η ράβδος ΑΚ έχει μήκος $L = 0,15\text{m}$ και μάζα $M = 2\text{kg}$.

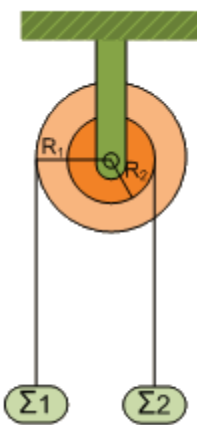
Στο άκρο της Α ασκούμε συνεχώς μια δύναμη $\vec{F}$ κάθετη στη ράβδο η οποία έχει σταθερό μέτρο, οπότε η ράβδος αρχίζει να ανεβαίνει. Όταν η ράβδος φτάσει στη θέση (ΙΙ), όπου σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με την κατακόρυφη, καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ και η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση (ΙΙΙ), χωρίς γωνιακή ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

- (α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στη θέση (ΙΙ).
- (β) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για τη περιστροφή της ράβδου από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ).
- (γ) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- (δ) Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια της ράβδου κατά τη περιστροφή της από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ).



Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το άκρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm} = \frac{1}{3}ML^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

- 4.17.** Στο σχήμα φαίνεται σε τομή μια τροχαλία που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες $R_1 = 0,2m$ και $R_2 = 0,1m$, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της τροχαλίας. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 2kg$ και είναι στερεωμένα μέσω νημάτων που είναι τυλιγμένα στους κυλίνδρους. Η τροχαλία και τα σώματα Σ_1, Σ_2 είναι αρχικά ακίνητα και τα κέντρα μάζας των Σ_1, Σ_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί και τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 έχει κατέβει κατά $h_1 = 0,4m$.



A. Να δείξετε:

- (α) ότι η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι συνέχεια διπλάσια της ταχύτητας του σώματος Σ_2 .
- (β) ότι το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 είναι συνέχεια διπλάσιο του διαστήματος που διανύει το σώμα Σ_2 .

B. Τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε:

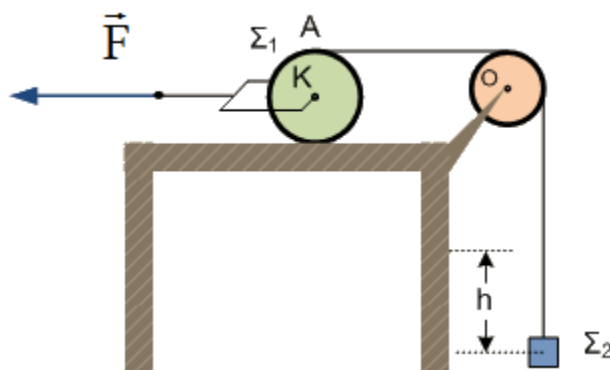
- (γ) τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.
- (δ) το ρυθμό με τον οποίο το βάρος του σώματος Σ_1 μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{cm} = 0,1kg \cdot m^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Το νήμα είναι αβαρές. Να θεωρήσετε ότι τα σώματα Σ_1 και Σ_2 δεν φτάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

- 4.18.** Η κατακόρυφη τροχαλία του σχήματος, μάζας $m = 3kg$ και ακτίνας $r = 0,1m$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο αυλάκι της τροχαλίας περνά νήμα που από το ένα άκρο του κρέμεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2kg$ και στο άλλο άκρο του είναι δεμένος ένας κατακόρυφος τροχός (Σ_1) που έχει μάζα $M = 4kg$ και ακτίνα $R = 0,2m$.

- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμείνει ακίνητο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε τη δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F = 80\text{N}$.

- (β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος Σ_2 . Για τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_2 έχει ανέλθει κατά $h = 2\text{m}$, να υπολογίσετε:
- (γ) Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- (δ) Τη μετατόπιση του τροχού από την αρχική του θέση.
- (ε) Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του τροχού Σ_1 κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ_2 κατά h .

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}mr^2$ και του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$.

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Το νήμα είναι αβαρές. Ο τροχός Σ_1 κυλίεται χωρίς ολίσθηση.

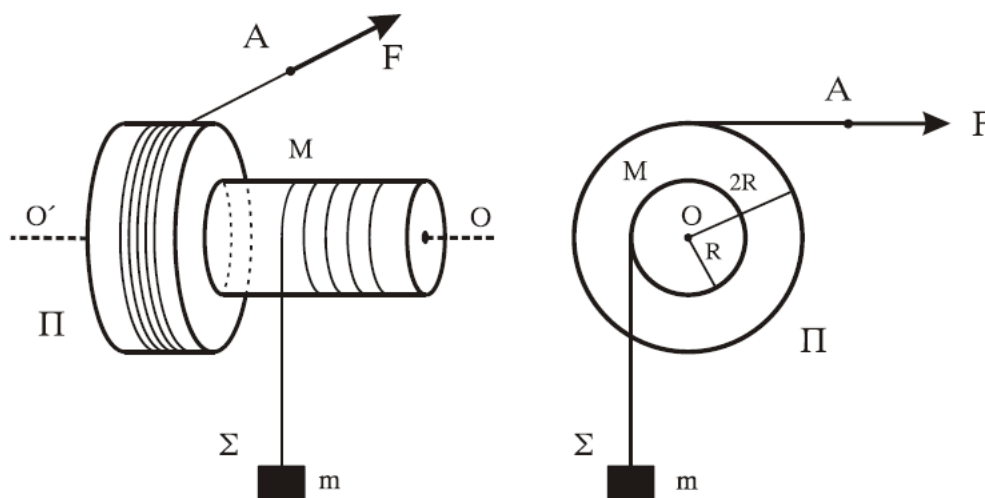
- 4.19.** Στερεό Π μάζας $M = 10\text{kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,2\text{m}$ όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$. Το στερεό Π περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα $O'O$, που συμπίπτει με τον άξονα του. Το σώμα Σ μάζας $m = 20\text{kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας R . Γύρω από το τμήμα του στερεού Π με ακτίνα $2R$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου μπορεί να ασκείται οριζόντια δύναμη F .

- (α) Να βρείτε το μέτρο της αρχικής δύναμης F_0 που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος, ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμένει ακίνητο.

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε την δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F = 115\text{N}$.

- (β) Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ.

Για την χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει ανέλθει κατά $h = 2\text{m}$, να βρείτε:



(γ) Το μέτρο της στροφορμής του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του.

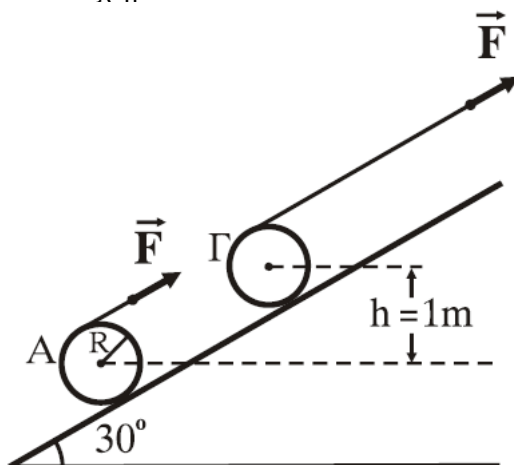
(δ) Την μετατόπιση του A από την αρχική του θέση.

(ε) Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του στερεού Π κατά την μετατόπιση του σώματος Σ κατά h .

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Το συνολικό μήκος κάθε νήματος περιμένει σταθερό.

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2009

- 4.20.** Στην επιφάνεια ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας $M = 40 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, έχουμε τυλίξει λεπτό σχοινί αμελητέας μάζας, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη F παράλληλη προς την επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως 30° , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σχοινί ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος κυλίζει πάνω στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου χωρίς ολίσθηση.

- (α) Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης F , ώστε ο κύλινδρος να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα.

Αν αρχικά ο κύλινδρος είναι ακίνητος με το κέντρο μάζας του στη θέση Α και στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού ασκηθεί σταθερή δύναμη $F = 130\text{N}$, όπως στο σχήμα:

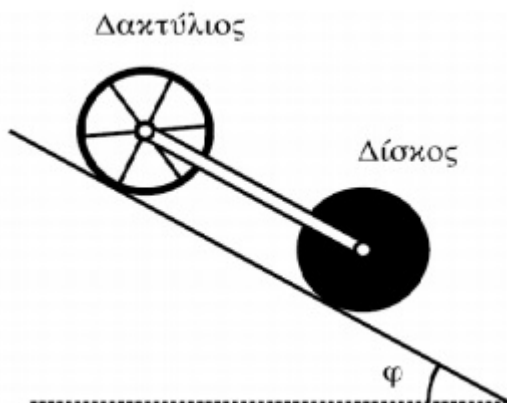
- (β) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- (γ) Να υπολογισθεί το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του όταν το κέντρο μάζας του περνάει από τη θέση Γ του σχήματος, η οποία βρίσκεται $h = 1\text{m}$ ψηλότερα από τη θέση Α.
- (δ) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης F κατά τη μετακίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου από τη θέση Α στη θέση Γ και να δείξετε ότι αυτό ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του κυλίνδρου κατά τη μετακίνηση αυτή.

Δίνονται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}MR^2$

Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις - Ιούλης 2009

- 4.21.** Θέλουμε να μετρήσουμε πειραματικά την άγνωστη ροπή αδράνειας δίσκου μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $r = 1\text{m}$. Για το σκοπό αυτό αφήνουμε τον δίσκο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\phi = 30^\circ$ ξεκινώντας από την ηρεμία. Διαπιστώνουμε ότι ο δίσκος διανύει την απόσταση $x = 2\text{m}$ σε χρόνο $t = 1\text{s}$.

- (α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.



- (β) Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου αφήνονται να κυλίσουν ταυτόχρονα δίσκος και δακτύλιος ίδιας μάζας M και ίδιας ακτίνας R . Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ και του δακτυλίου $I_2 = MR^2$ ως προς τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους και είναι κάθετοι στα επίπεδά τους. Να υπολογίσετε ποιο από τα σώματα κινείται με τη μεγαλύτερη επιτάχυνση.

Συνδέουμε με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας των δύο στερεών, όπως φαίνεται και στο σχήμα, με ράβδο αμελητέας μάζας, η οποία δεν εμποδίζει την περιστροφή τους και δεν ασκεί τριβές. Το σύστημα κυλίζει στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.

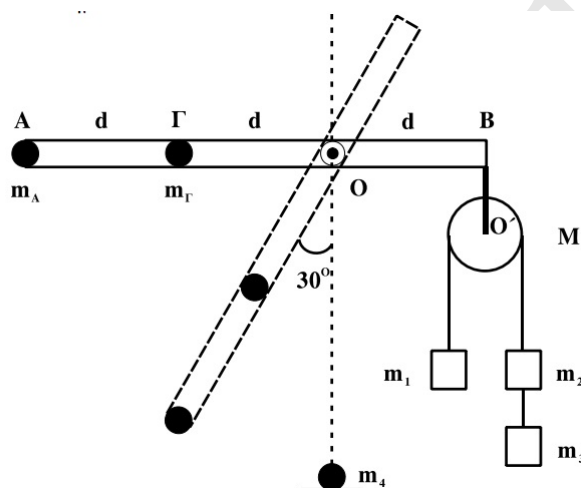
- (γ) Να υπολογίσετε το λόγο των κινητικών ενεργειών $\frac{K_1}{K_2}$ όπου K_1 η κινητική ενέργεια του δίσκου και K_2 η κινητική ενέργεια του δακτυλίου.

- (δ) Αν η μάζα κάθε στερεού είναι $M = 1,4\text{kg}$, να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκεί η ράβδος σε κάθε σώμα. Να σχεδιάσετε τις πιο πάνω δυνάμεις.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2010

- 4.22.** Αβαρής ράβδος μήκους $3d$ ($d = 1\text{m}$) μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το O . Στο άκρο A που βρίσκεται σε απόσταση $2d$ από το O υπάρχει σημειακή μάζα $m_A = 1\text{kg}$ και στο σημείο Γ , που βρίσκεται σε απόσταση d από το O έχουμε επίσης σημειακή μάζα $m_\Gamma = 6\text{kg}$. Στο άλλο άκρο της ράβδου, στο σημείο B , είναι αναρτημένη τροχαλία μάζας $M = 4\text{kg}$ από την οποία κρέμονται οι μάζες $m_1 = 2\text{kg}$, $m_2 = m_3 = 1\text{kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα O' .

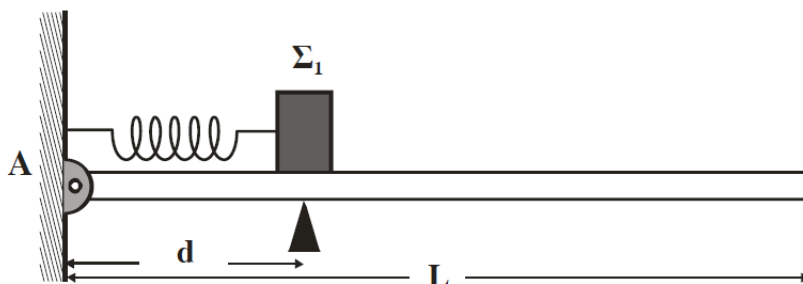


- (α) Αποδείξτε ότι το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο στην οριζόντια θέση.
Κόβουμε το $O'B$, που συνδέει την τροχαλία με τη ράβδο στο σημείο B .
- (β) Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.
Όταν η σημειακή μάζα m_A φτάνει στο κατώτατο σημείο, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σημειακή μάζα $m_4 = 5\text{kg}$.
- (γ) Βρείτε τη γραμμική ταχύτητα του σημείου A αμέσως μετά τη κρούση.
Στην αρχική διάταξη, όταν η τροχαλία με τα σώματα είναι δεμένη στο B , κόβουμε το νήμα που συνδέει μεταξύ τους τα σώματα m_2 και m_3 και αντικαθιστούμε την m_A με μάζα m .
- (δ) Πόση πρέπει να είναι η μάζα m , ώστε η ράβδος να διατηρήσει την ισορροπία της κατά τη διάρκεια περιστροφής της τροχαλίας ;

Τα νήματα είναι αβαρή, τριβές στους άξονες δεν υπάρχουν και το νήμα δεν ολισθαίνει στη τροχαλία. Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$, και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{MR^2}{2}$

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2011

- 4.23.** Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3m$ και μάζας $M = 0,4kg$ αρθρώνεται στο άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόσταση $d = 1m$ από τον τοίχο, η σανίδα στηρίζεται ώστε να διατηρείται οριζόντια. Ιδανικό αβαρές ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$ συνδέεται με το ένα άκρο του στον τοίχο και το άλλο σε σώμα Σ1 μάζας $m_1 = 1kg$. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ο άξονάς του είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος Σ1.



Το κέντρο μάζας του σώματος Σ1 βρίσκεται σε απόσταση d από τον τοίχο. Στη συνέχεια, ασκούμε στο σώμα Σ1 σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40N$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα Σ1 διανύσει απόσταση $s = 5cm$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και, στη συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

- (α) Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ1.
- (β) Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_A που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος Σ1 και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ κινείται σώμα Σ2 μάζας $m_2 = 1kg$ με ταχύτητα $v_2 = 2\sqrt{3}m/s$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, όταν η απομάκρυνση του σώματος Σ1 είναι x_1 , όπου $x_1 \geq 0$. Το σώμα Σ1 μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

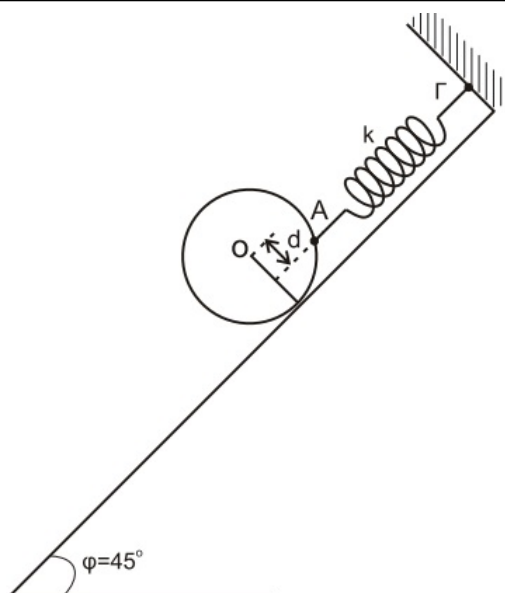
- (γ) Να βρείτε την απομάκρυνση x_1 .
- (δ) Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης τα δύο σώματα θα συγκρουστούν για δεύτερη φορά.

Θεωρούμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης προς το Γ. Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν. **Δίνεται:** επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

Επαναληπτικές Εξετάσεις- Ιούνης 2011

- 4.24.** Συμπαγής ομογενής δίσκος, μάζας $M = 2\sqrt{2}kg$ και ακτίνας $R = 0,1m$, είναι προσδεμένος σε ιδανικό ελατήριο, σταθεράς $k = 100N/m$ στο σημείο Α και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, που σχηματίζει γωνία $\phi = 45^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Το ελατήριο είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και ο άξονας του ελατηρίου απέχει απόσταση $d = \frac{R}{2}$ από το κέντρο (Ο) του δίσκου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο Γ.

- (α) Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου.



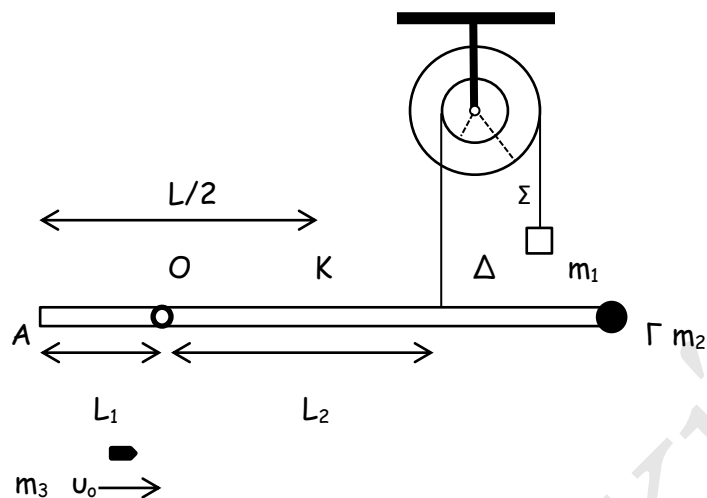
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της. Κάποια στιγμή το ελατήριο κόβεται στο σημείο Α και ο δίσκος αμέσως κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.
- (γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου.
- (δ) Να υπολογίσετε τη στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, όταν το κέντρο μάζας του έχει μετακινηθεί κατά διάστημα $s = 0,3\sqrt{2}m$ στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}MR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$

Επαναληπτικές Εξετάσεις Ιούνης 2012

- 4.25.** Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $L = 4m$ και μάζας $M = 3kg$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο της Ο, το οποίο απέχει απόσταση $L_1 = 1m$ από το άκρο Α. Στο άκρο Γ της ράβδου έχουμε κολληθεί σημειακή μάζα $m_2 = 2kg$, ενώ στο σημείο Δ που απέχει απόσταση $L_2 = 1,8m$ από το σημείο Ο, είναι δεμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι τυλιγμένο στο μικρό αυλάκι διπλής τροχαλίας ακτίνας r . Στην περιφέρεια της τροχαλίας ακτίνας $R = 0,1m$ είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1 = 1kg$. Το σύστημα στην αρχή ισορροπεί.

- (α) (α1) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο και να βρεθεί η ακτίνα r του μικρού αυλακιού της διπλής τροχαλίας.
- (α2) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σώματος m_2 , ως προς τον άξονα περιστροφής.
- (β) Κάποια στιγμή το νήμα που συνδέει την ράβδο με την τροχαλία κόβεται, οπότε η ράβδος μαζί με το σώμα που είναι στερεωμένο στο άκρο της αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να κατέρχεται περιστρέφοντας την τροχαλία, μέσω του τεντωμένου νήματος που δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της. Να υπολογίσετε:



(β1) Την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα.

(β2) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 , όταν θα έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $l = 2m$.

(β3) Την ταχύτητα του σώματος m_2 στο άκρο της ράβδου την στιγμή που φτάνει στην κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά.

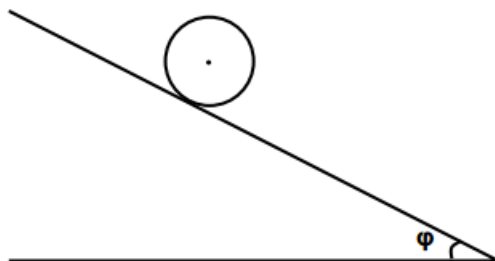
(γ) Όταν η ράβδος φτάσει στην κατακόρυφη θέση, συγκρούεται πλαστικά με σημειακή μάζα $m_3 = 11kg$, οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα u_0 με φορά προς τα δεξιά. Η σύγκρουση γίνεται στο κέντρο K της ράβδου. Αμέσως μετά την σύγκρουση η ράβδος έχει φορά περιστροφής αντίθετη της αρχικής και ακινητοποιείται στιγμιαία όταν γίνει οριζόντια. Να υπολογίσετε:

(γ1) Το μέτρο της στροφορμής της ράβδου ελάχιστα πριν τη σύγκρουση.

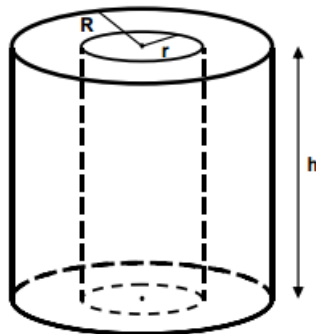
(γ2) Το μέτρο της ταχύτητας u_0 .

Δίνεται $g = 10m/s^2$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, ενώ η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας είναι $I_{τροχ} = 0,09kgm^2$.

4.26. Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ , όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



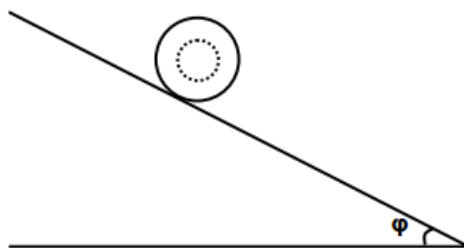
- (α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος.
- (β) Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h , αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r , όπου $r < R$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα: Να



αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι:

$$I_{\text{κοιλ}} = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



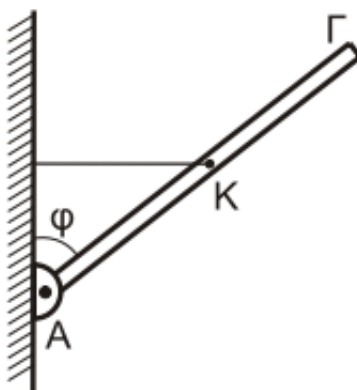
- (γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος.
- (δ) Όταν $r = \frac{R}{2}$, να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Δίνονται : Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R , ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2}MR^2$. Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h : $V = \pi R^2 h$.

Πανελλήνιες Εξετάσεις - Μάης 2013

- 4.27.** Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $L = 2m$ και μάζας $M = 5,6kg$ ισορροπεί με τη βοήθεια οριζώντιου νήματος, μη εκτατού, που συνδέεται στο μέσο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Δίνεται: $\eta\mu\phi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,8$



- (α) Να προσδιορίσετε τη δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

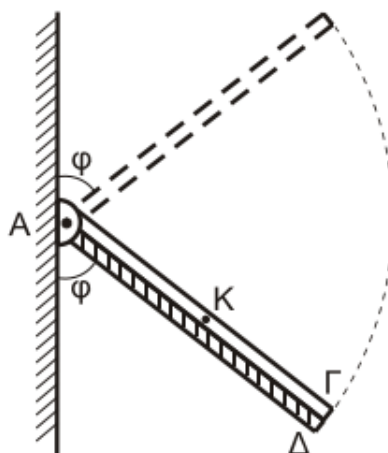
Μικρή ομογενής σφαίρα, μάζας $m = 0,4kg$ και ακτίνας $r = \frac{1}{70}m$ κυλίεται χωρίς ολίσθηση, έχοντας εκτοξευθεί κατά μήκος της ράβδου από το σημείο Κ προς το άκρο Γ.

- (β) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας κατά την κίνησή της από το Κ μέχρι το Γ.

- (γ) Με δεδομένο ότι η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ, να βρείτε τη σχέση που περιγράφει την τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση του σημείου επαφής της σφαίρας με τη ράβδο, από το σημείο Κ.

Αφού η σφαίρα έχει εγκαταλείψει τη ράβδο, κόβουμε το νήμα. Η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές.

- (δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στη θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Α, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Δεύτερη λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους $L' = L$ και μάζας $M' = 3M$ είναι αρθρωμένη και αυτή στο σημείο Α γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής με την ράβδο ΑΓ. Η ράβδος ΑΔ συγκρατείται ακίνητη, με κατάλληλο μηχανισμό, σε θέση όπου σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι συγκρούονται και ταυτόχρονα ο μηχανισμός ελευθερώνει τη ράβδο ΑΔ, χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι ράβδοι μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα, χωρίς τριβές. Ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος.

(ε) Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνονται :

- Η ροπή αδράνειας I_ρ λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο και είναι κάθετος σε αυτή: $I_\rho = \frac{1}{3}ML^2$
- Η ροπή αδράνειας $I_{\sigma\phi}$ ομογενούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της : $I_{\sigma\phi} = \frac{2}{5}mr^2$
- $g = 10\text{m/s}^2$

Πανελλήνιες - Ιούνης 2014

- 4.28.** Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $L = 1,5\text{m}$ και μάζας M μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο σε αυτή, ο οποίος διέρχεται από σημείο Κ της ράβδου και απέχει από το άκρο Γ απόσταση $d = \frac{L}{6}$. Στο άκρο Γ τοποθετούμε σώμα μάζας $m = 3,2\text{kg}$ αμελητέων διαστάσεων και το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση.



Να υπολογίσετε :

- (α) τη μάζα M της ράβδου και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.
 (β) τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Απομακρύνουμε το σώμα μάζας m και τη στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να περιστραφεί από την οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε :

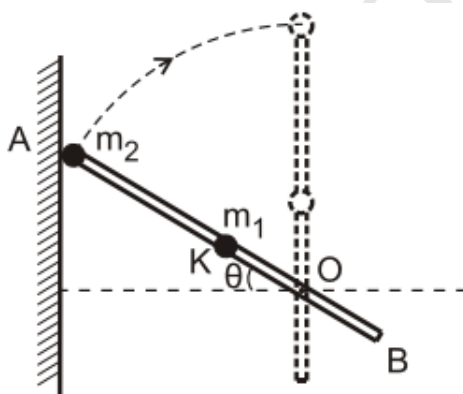
- (γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή $t = 0$
 (δ) το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει με την αρχική της οριζόντια θέση γωνία φ ($\eta\mu\varphi = 0,7$) για πρώτη φορά.

Δίνονται :

- η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο : $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$
- $g = 10m/s^2$

Πανελλήνιες Ομογενών - Σεπτέμβρης 2013

- 4.29.** Λεπτή, άκαμπτη και ισοπαχής ράβδος AB μήκους $L = 1m$ και μάζας $M = 3kg$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο O αυτής, είναι κάθετος στη ράβδο και απέχει από το άκρο της B απόσταση $OB = d = \frac{L}{4}$. Στο μέσο K της ράβδου και στο άκρο της A στερεώνουμε δύο σφαιρίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, όπου $m_1 = m_2 = 1kg$. Δίνοντας κατάλληλη ώθηση το σύστημα περιστρέφεται και χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο με το άκρο A, τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ , τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = 0,83$ (σχήμα 6).

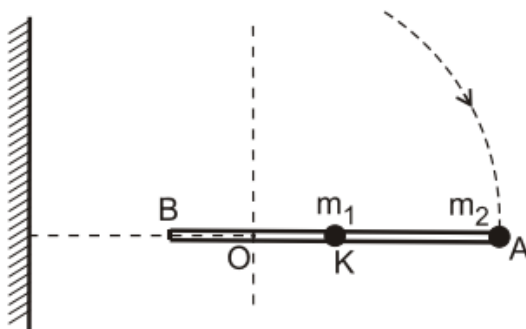


Σχήμα 6

- (α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του συστήματος ράβδου- σφαιριδίων αμέσως μετά την κρούση, ώστε αυτό να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση.
- (γ) Κατά την κρούση με τον τοίχο, το ποσοστό απωλειών της κινητικής ενέργειας είναι το 75% της κινητικής ενέργειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων πριν την κρούση. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κατά την κρούση.
- (δ) Όταν το σύστημα ράβδου-σφαιριδίων περνά από την οριζόντια θέση για πρώτη φορά, να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου m_2 ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O (σχήμα 7).

Δίνονται :

- $g = 10m/s^2$

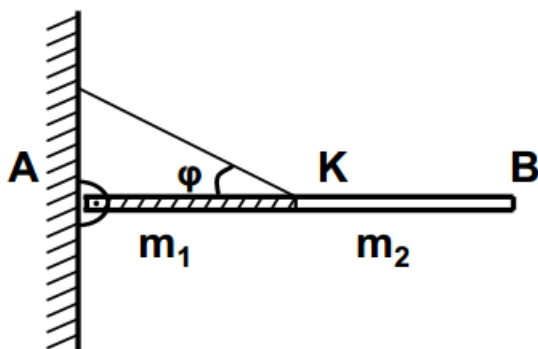


Σχήμα 7

- η ροπή αδράνειας της λεπτής ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο : $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

Πανελλήνιες Εσπερινών - Ιούνης 2014

- 4.30.** Μια ισοπαχής δοκός AB αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα AK και KB, μήκους $\frac{L}{2}$ το καθένα, με μάζες $m_1 = 5m_2$ και $m_2 = 0,5kg$, αντίστοιχα. Τα κομμάτια αυτά είναι κολλημένα μεταξύ τους στο σημείο K, ώστε να σχηματίζουν τη δοκό AB μήκους $L = 1m$. Η δοκός ισορροπεί σε οριζόντια θέση, με το άκρο της A να στηρίζεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης, ενώ το μέσο της K συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη δοκό.

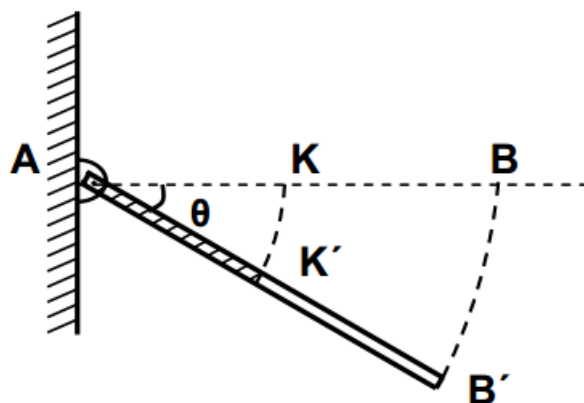


- (α)** Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σχοινί και την άρθρωση.

Κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άκρο της A σε κατακόρυφο επίπεδο.

- (β)** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου σε συνάρτηση με τη γωνία θ , που σχηματίζει αυτή με την αρχική της θέση ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)
- (γ)** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του άκρου B' της ράβδου (v'_B) σε συνάρτηση με τη γωνία θ .

Τη στιγμή που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = 30^\circ$, συγκρούεται πλαστικά με αρχικά ακίνητο σφαιρίδιο αμελητέων διαστάσεων και μάζας $m = m_2$, το οποίο σφηνώνεται στο μέσο K' της ράβδου.



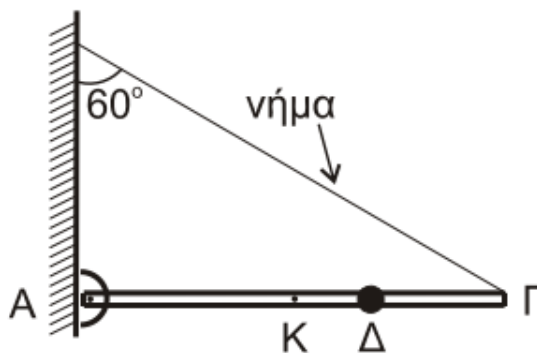
(δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

Δίνονται :

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- ροπή αδράνειας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$
- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Επαναληπτικές Πανελληνίες - Ιούνης 2013

- 4.31.** Ομογενής δοκός ΑΓ με μήκος $L = 3\text{m}$ και μάζα $M = 6\text{kg}$ φέρει σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 3\text{kg}$ στη θέση Δ, για την οποία ισχύει $(\Delta\Gamma) = L/3$. Η δοκός στηρίζεται με το άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Το άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα, που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με τον κατακόρυφο τοίχο και το σύστημα δοκός-σώμα ισορροπεί σε οριζόντια θέση.



Σχήμα 2

- (α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος δοκός-σώμα, ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος 2.

- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σύστημα αρχίζει να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου.

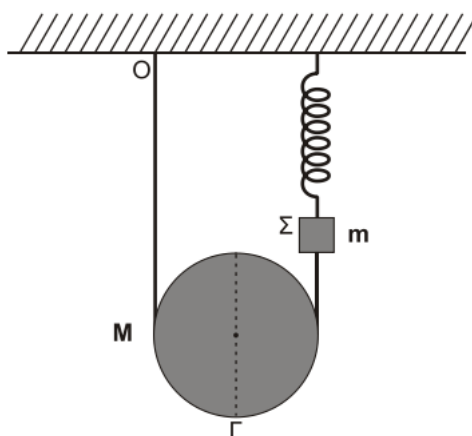
- (γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την αρχική οριζόντια θέση της.
- (δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα v του σώματος μάζας m τη στιγμή που το σύστημα δοκός-σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται:

- ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο $I_{cm} = \frac{ML^2}{12}$
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$

Πανεληθίνες Ομογενών- Σεπτέμβρης 2015

- 4.32.** Ομογενής τροχαλία ισορροπεί έχοντας το νήμα τυλιγμένο γύρω της πολλές φορές. Η μία άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην οροφή Ο και η άλλη στο σώμα Σ, το οποίο ισορροπεί κρεμασμένο από κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 40 \text{ N/m}$, που είναι στερεωμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Η μάζα της τροχαλίας είναι $M = 1,6 \text{ kg}$, η ακτίνα της $R = 0,2 \text{ m}$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό της και ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας, της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$. Το σώμα Σ θεωρείται σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1,44 \text{ kg}$. Το νήμα και το ελατήριο έχουν αμελητέες μάζες.



Σχήμα 10

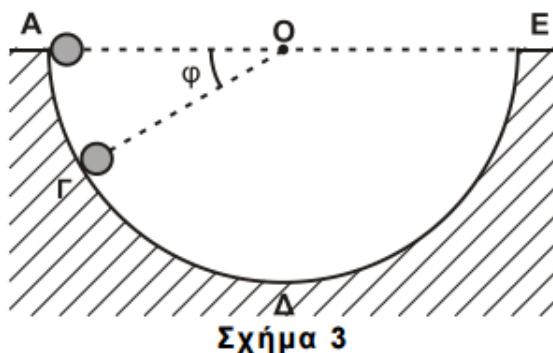
- (α) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ.

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα Σ, και το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος Σ, για πρώτη φορά, το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

- (β) Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση h της τροχαλίας.
- (γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ότι η τιμή $t = 0s$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που κόπηκε το νήμα και ότι η φορά απομάκρυνσης του σώματος Σ προς τα πάνω είναι θετική.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κάτω άκρου Γ της τροχαλίας, όταν το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h .

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, $\pi = \sqrt{10}$ και $\pi^2 = 10$ (προσεγγιστικά).
Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούνης 2015

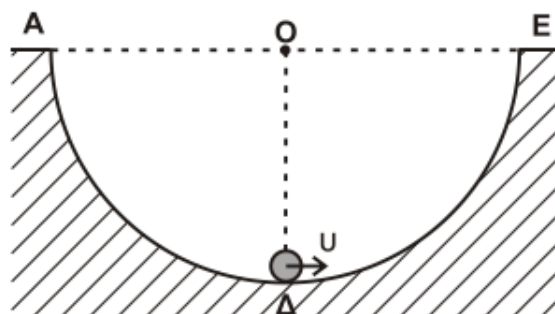
- 4.33.** Από το εσωτερικό άκρο Α ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R = 1,6m$, αφήνεται να κυλήσει μία συμπαγής μικρή σφαίρα μάζας $m = 1,4kg$, και ακτίνας $r = \frac{R}{8}$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.



- (α) Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_S που ασκείται στη σφαίρα σε συνάρτηση με το συνημίτονο της γωνίας ϕ που σχηματίζει η ακτίνα ΟΓ του ημισφαιρίου με την ευθεία ΑΕ της επιφάνειας του εδάφους.
- (β) Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\phi = 30^\circ$ (Σχήμα 3).

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη, εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα $v = 6m/s$ και κυλιέται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του με κατεύθυνση το άκρο Ε (Σχήμα 4).

- (γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της



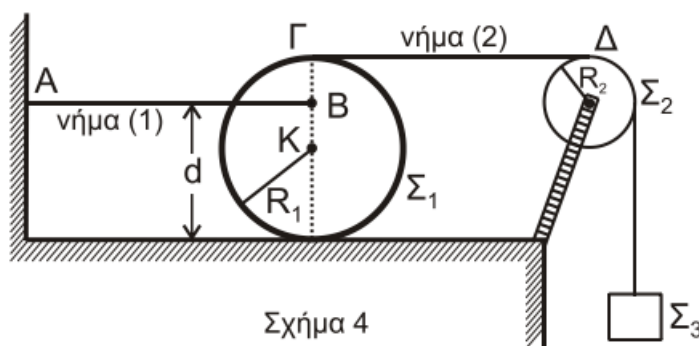
Σχήμα 4

- (δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, αμέσως μόλις αυτή χάσει την επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου στο σημείο E.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Πανελλήνιες - Μάης 2015

- 4.34.** Ομογενής δίσκος Σ1 έχει μάζα $M_1 = 8\text{kg}$ και ακτίνα $R_1 = 0,2\text{m}$. Στο σημείο B της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου, που απέχει απόσταση $d = \frac{3R_1}{2}$ από το οριζόντιο επίπεδο, είναι στερεωμένο οριζόντιο αβαρές μη εκτατό νήμα (1). Το άλλο άκρο A του νήματος (1) είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Γύρω από την περιφέρεια του δίσκου Σ1 είναι τυλιγμένο πολλές φορές άλλο δεύτερο αβαρές μη εκτατό νήμα (2), το οποίο διέρχεται από τροχαλία Σ2, μάζας $M_2 = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R_2 = 0,1\text{m}$. Στο άλλο άκρο του νήματος (2) είναι συνδεδεμένο σώμα Σ3, μάζας $M_3 = 1\text{kg}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Το τμήμα ΓΔ του νήματος (2) είναι οριζόντιο.



Σχήμα 4

- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης που ασκεί το νήμα (1) στο δίσκο Σ1.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το νήμα (1) κόβεται. Το σώμα Σ3 κατέρχεται με επιτάχυνση. Η τροχαλία Σ2 αρχίζει να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά της και ο δίσκος Σ1 αρχίζει να κυλιέται, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

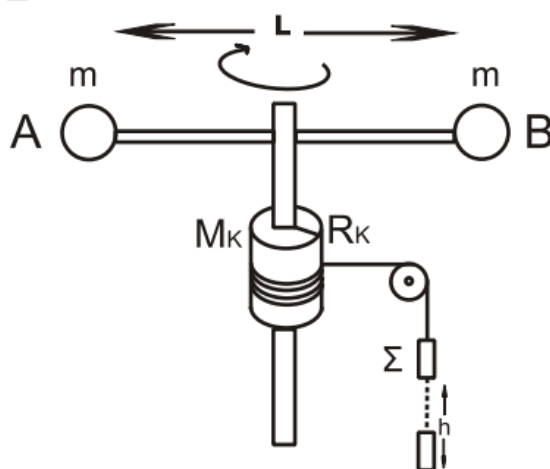
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου Σ1.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας Σ2 τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$.
- (δ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ3 για την κίνηση του από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$

Δίνονται: η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I = \frac{1}{2}M_1R_1^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I = \frac{1}{2}M_2R_2^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$

Να θεωρήσετε ότι : η τριβή του νήματος (2) τόσο με το δίσκο Σ1, όσο και με την τροχαλία Σ2, είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Κατά τη διάρκεια όλου του φαινομένου, ο δίσκος παραμένει στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να συγκρούεται με την τροχαλία. Ο άξονας περιστροφής του δίσκου δεν αλλάζει κατεύθυνση, κατά τη διάρκεια της κίνησής του. Το σώμα Σ3 έχει αμελητέες διαστάσεις. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Επαναληπτικές Πανελλήνιες - Ιούνης 2016

- 4.35.** Η οριζόντια και ομογενής ράβδος ΑΒ του παρακάτω σχήματος, έχει μήκος $L = 0,6m$ και μάζα $M = 3Kg$. Στα άκρα της ράβδου, έχουν στερεωθεί δύο σφαιρίδια αμελητέων διαστάσεων μάζας $m = 0,5Kg$ το καθένα. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο λεπτό σωλήνα, που περνά από το κέντρο της και έχει αμελητέα μάζα και ακτίνα. Στο σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ομογενής κύλινδρος μάζας $M_K = 1Kg$ και ακτίνας $R_K = 0,2m$. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό, αβαρές νήμα σταθερού μήκους, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται μέσω αβαρούς τροχαλίας, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 1,25Kg$. Αρχικά το σώμα Σ και το σύστημα (ράβδος, σφαιρίδια και κύλινδρος) είναι ακίνητα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί κατακόρυφα και το σύστημα ξεκινά να περιστρέφεται, ενώ το νήμα δεν ολισθαίνει.



Να υπολογίσετε :

- (α) Τη συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος που αποτελείται από τη ράβδο, τα σφαιρίδια και τον κύλινδρο.

(β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

(γ) Το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκεί το νήμα στο σώμα Σ.

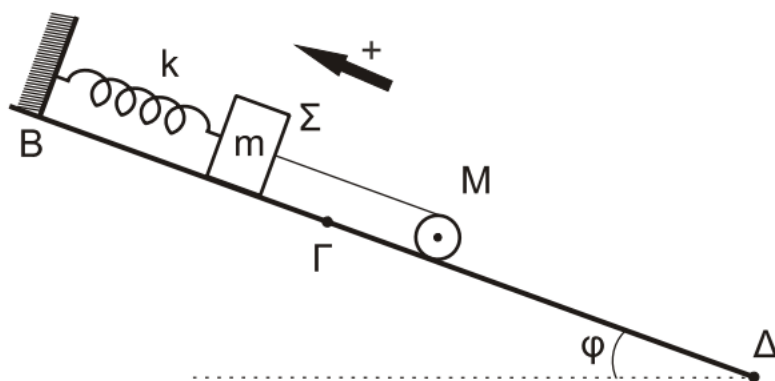
(δ) Την κινητική ενέργεια του συστήματος λόγω περιστροφής, τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σύστημα έχει εκτελέσει $N = \frac{5}{2\pi}$ περιστροφές.

(ε) Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ την παραπάνω χρονική στιγμή t_1 .

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm,K} = \frac{1}{2}M_K R_K^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

Επαναληπτικές Πανελλήνιες (Παλαιό σύστημα) - Ιούνης 2016

- 4.36.** Σώμα Σ, μάζας $m = 1\text{kg}$, είναι δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\phi = 30^\circ$. Το τμήμα ΒΓ του κεκλιμένου επιπέδου είναι λείο. Ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,1\text{m}$ συνδέεται με το σώμα Σ με τη βοήθεια αβαρούς νήματος που δεν επιμηκύνεται. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι οριζόντιος. Το νήμα και ο άξονας του ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σύστημα των σωμάτων ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και την επιμήκυνση του ελατηρίου

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβεται το νήμα. Το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς ολίσθηση.

(β) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς για το σώμα Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως θετική φορά την προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

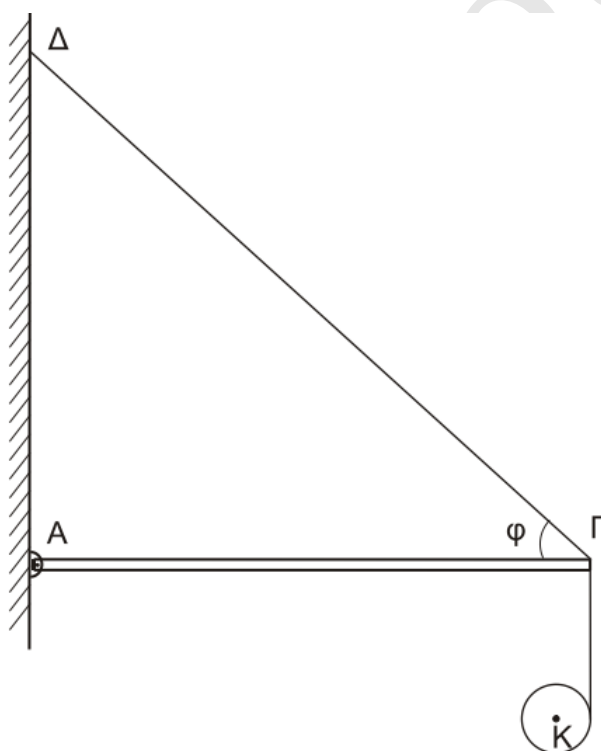
(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου, όταν θα έχει διαγράψει $N = \frac{12}{\pi}$ περιστροφές κατά την κίνηση του στο κεκλιμένο επίπεδο.

- (δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, κατά την κίνηση του στο κεκλιμένο επίπεδο, τη χρονική στιγμή $t = 3s$.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς τον άξονα του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$,

Πανελλήνιες - Μάης 2016

- 4.37.** Μία ομογενής άκαμπτη ράβδος ΑΓ σταθερής διατομής έχει μάζα $M = 4Kg$. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και το άκρο της Α συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο Γ της ράβδου συνδέεται μέσω αβαρούς μη εκτατού νήματος ΓΔ με τον κατακόρυφο τοίχο. Το νήμα σχηματίζει με τη ράβδο γωνία ϕ . Γύρω από ένα λεπτό ομογενή δίσκο κέντρου Κ, μάζας $m = 2kg$ και ακτίνας $R = 0,1m$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές ένα λεπτό μη εκτατό αβαρές νήμα. Το ελεύθερο άκρο του νήματος έχει στερεωθεί στο άκρο Γ της ράβδου ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος αφήνεται να κινηθεί και το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει.



Σχήμα 4

- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου, καθώς αυτός κατέρχεται.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος ΑΓ στο άκρο της Γ από το νήμα ΓΔ, όταν ο δίσκος κατέρχεται.

Τη χρονική στιγμή που το κέντρο μάζας Κ του δίσκου έχει κατέλθει κατακόρυφα κατά $h_1 = 0,3m$ το νήμα που συνδέει το δίσκο με τη ράβδο κόβεται.

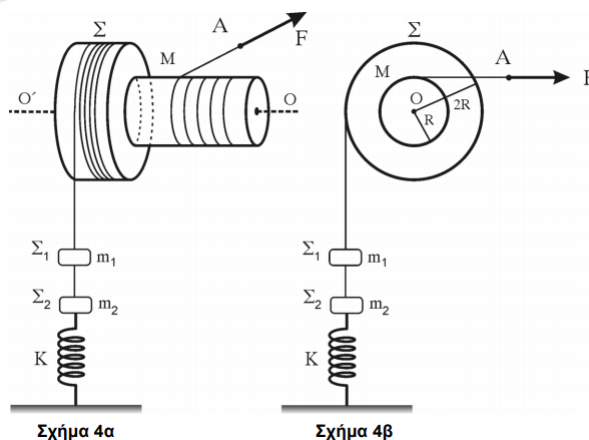
(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, μετά από χρονικό διάστημα Δt από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

(δ) Να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης του δίσκου μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t' = 0,1s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, $\eta\mu\phi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,6$. Ο άξονας περιστροφής του δίσκου παραμένει συνεχώς οριζόντιος και κινείται σε κατακόρυφη τροχιά σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του και ο δίσκος δεν φτάνει στο έδαφος στη διάρκεια του φαινομένου.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2017

- 4.38.** Ομογενές στερεό σώμα Σ συνολικής μάζας $M = 8kg$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,1m$ όπως φαίνεται στα σχήματα 4α και 4β (το 4β αποτελεί εγκάρσια τομή του 4α). Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{3}{2}MR^2$. Το στερεό Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα $O'O$. Ο οριζόντιος άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Γύρω από τον κύλινδρο του στερεού ακτίνας R είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στο ελεύθερο άκρο A του οποίου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 100N$. Στο ελεύθερο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος μεγάλου μήκους, που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας $2R$, είναι δεμένο σώμα $\Sigma 1$ μάζας $m_1 = 2kg$. Το σώμα $\Sigma 1$ συνδέεται με αβαρές μη εκτατό νήμα με σώμα $\Sigma 2$ μάζας $m_2 = 1kg$, που συγκρατείται στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k . Το σύστημα του στερεού Σ και των σωμάτων $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ αρχικά ισορροπεί, με το ελατήριο να έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l = 0,2m$ από το φυσικό του μήκος. Τη χρονική στιγμή μηδέν ($t_0 = 0s$) το νήμα που συνδέει τα σώματα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ κόβεται. Το σώμα $\Sigma 2$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το στερεό Σ αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής του $O'O$.



(α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου

- (β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ2. Θεωρήστε ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ1 και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του στερεού Σ.
- (ε) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F , όταν το στερεό Σ έχει εκτελέσει $\frac{20}{\pi}$ περιστροφές

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. Όπου εμφανίζεται το π να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση. **Να θεωρήσετε ότι :** κατά τη διάρκεια της περιστροφής του στερεού Σ το σώμα Σ1 δεν συγκρούεται με το στερεό Σ. η τριβή του νήματος με τους κυλίνδρους του στερεού είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ2, ο άξονας του ελατηρίου παραμένει κατακόρυφος. η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Πανελλήνιες - Σεπτέμβρης 2017

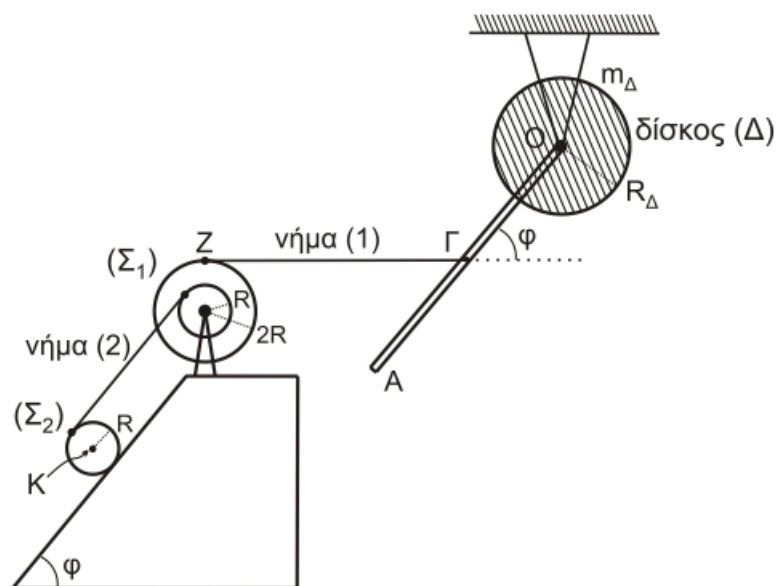
- 4.39.** Λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους $\ell = 3\text{m}$ και μάζας $M = 8\text{kg}$ είναι σταθερά συγκολλημένη με το ένα άκρο της Ο στο κέντρο ομογενούς δίσκου Δ μάζας $m_\Delta = 4\text{kg}$ και ακτίνας $R_\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2}m$. Το σύστημα των δύο αυτών σωμάτων (ράβδου-δίσκου) μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές ως ένα σώμα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Το μέσον Γ της ράβδου ΟΑ έχει δεθεί με τη βοήθεια λεπτού οριζόντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος ΖΓ (νήμα 1) με διπλή τροχαλία Σ₁ και η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την προέκταση του οριζόντιου νήματος ΖΓ. Η διπλή τροχαλία αποτελείται από δύο ομογενείς συγκολλημένους ομοαξονικούς δίσκους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,2\text{m}$ και η ροπή αδράνειάς της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της είναι ίση με $I_{cm(\text{τροχαλίας})} = 1,95\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Ένα δεύτερο λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα (2), που είναι παράλληλο σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ , είναι τυλιγμένο πολλές φορές σε ένα λεπτό αυλάκι του εσωτερικού δίσκου ακτίνας R της τροχαλίας Σ₁ και το άλλο του άκρο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια ενός ομογενούς κυλίνδρου Σ₂ μάζας $m = 30\text{kg}$ και ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα όλων των σωμάτων του σχήματος ισορροπεί στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

- (α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής Ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το νήμα ΖΓ που συνδέει τη ράβδο με την τροχαλία κόβεται και ο κύλινδρος αρχίζει να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.

- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής Ο τη χρονική στιγμή $t = 0$.



- (γ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου τη χρονική στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος.
- (δ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας K του ομογενούς κυλίνδρου καθώς και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν έχει διανύσει διάστημα $s = 2m$ στο κεκλιμένο επίπεδο.

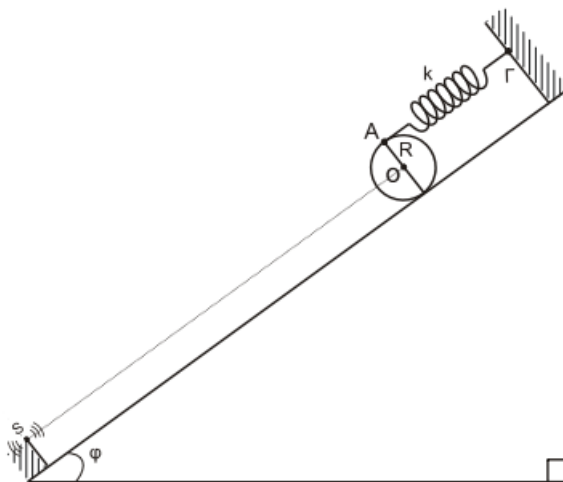
Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$
- η ροπή αδράνειας του δίσκου Δ ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm(\Delta)} = \frac{1}{2}m_{\Delta}R_{\Delta}^2$
- η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι ίση με $I_{cm(\rho)} = \frac{1}{12}M\ell^2$
- η ροπή αδράνειας του ομογενούς κυλίνδρου Σ_2 ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm(\text{κυλίνδρου})} = \frac{1}{2}mR^2$
- $\eta\mu\phi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,6$
- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου Σ_2 παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Το κεκλιμένο επίπεδο είναι μεγάλου μήκους, η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές, το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο και στην τροχαλία και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα.

Πανελλήνιες - Ιούνης 2018

4.40. (Εκτός ύλης για το νέο σύστημα) Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας μ και ακτίνας $R = 0,1m$ είναι προσδεμένος σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$ στο σημείο Α και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους γωνίας κλίσης φ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο Γ. Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta A = 0,06m$.

(α) Να υπολογίσετε τη μάζα του κυλίνδρου.



Σχήμα 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο κύλινδρος αποσπάται από το ελατήριο και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Να υπολογίσετε:

- (β) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου,
- (γ) το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο κατά τη διάρκεια της κύλισής του,
- (δ) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 1sec$

Έστω ότι στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου είναι ενσωματωμένος σημειακός ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων, ο οποίος φέρει λαμπάκι. Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι στερεωμένη πηγή S ηχητικών κυμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, συχνότητας $f_s = 1700Hz$. Το λαμπάκι του ανιχνευτή ανάβει όταν ανιχνεύονται συχνότητες μεταξύ των τιμών $f_1 = 1750Hz$ και $f_2 = 1800Hz$.

- (ε) Κατά την κύλιση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο να εξετάσετε αν το λαμπάκι θα ανάψει από τη χρονική στιγμή $t_1 = 1sec$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 2sec$.

Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$
- η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

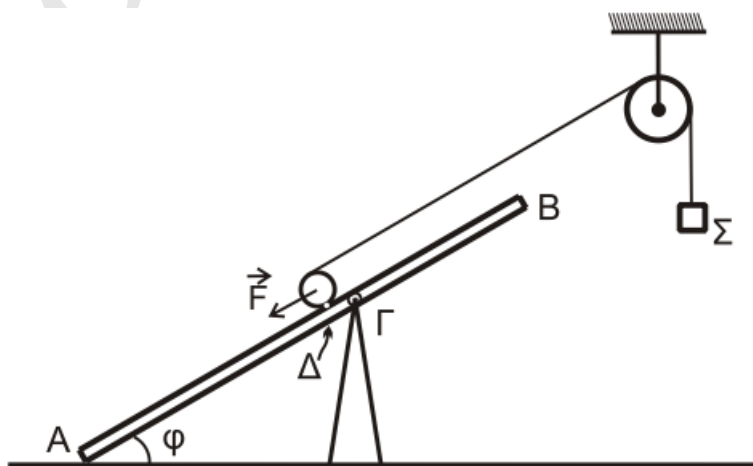
- $\eta\mu\phi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,6$
- η ταχύτητα του ήχου στον αέρα ίση με $v_{\text{ήχ}} = 340\text{m/s}$.

Να θεωρήσετε ότι:

- ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου παραμένει συνεχώς σε οριζόντια θέση σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα
- η ευθεία που ενώνει την πηγή και τον ανιχνευτή είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο.
- λήψη των ηχητικών κυμάτων από τον ανιχνευτή δεν επηρεάζεται από την κύλιση και το υλικό του κυλίνδρου.

Πανελλήνιες - Σεπτέμβρης 2018

- 4.41.** Ομογενής, άκαμπτη και μικρού πάχους σανίδα AB μάζας $M = 2\text{kg}$ και μήκους $\ell = 4\text{m}$ ισορροπεί σε πλάγια θέση με τη βοήθεια υποστηρίγματος, το οποίο έχουμε στερεώσει σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η σανίδα ακουμπά με το άκρο της A στο λείο δάπεδο σχηματίζοντας γωνία $\phi = 30^\circ$ με αυτό. Η σανίδα συνδέεται με την κορυφή του υποστηρίγματος με άρθρωση σε σημείο της Γ, το οποίο απέχει από το άκρο της B απόσταση $(BG) = 1,5\text{m}$. Η σανίδα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ (κάθετος στο επίπεδο του σχήματος). Ομογενής κύλινδρος μάζας $M_K = 2\text{kg}$ και ακτίνας R_K βρίσκεται σε επαφή με τη σανίδα στο σημείο Δ, το οποίο απέχει από το Γ απόσταση $(\Gamma\Delta) = 0,2\text{m}$. Στο μέσο της επιφάνειας του κυλίνδρου, που φέρει ένα λεπτό αυλάκι, έχουμε τυλίξει πολλές φορές λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα Σ μικρών διαστάσεων μάζας $M_\Sigma = 2\text{kg}$



Σχήμα 7

Το νήμα περνάει από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας $M_T = 2\text{kg}$ και ακτίνας R_T , την οποία έχουμε στερεώσει σε ακλόνητο σημείο. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας. Το τμήμα του νήματος που συνδέει τον κύλινδρο με την τροχαλία έχει διεύθυνση παράλληλη με τη σανίδα. Αρχικά ασκούμε δύναμη F στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου με διεύθυνση παράλληλη προς την διεύθυνση AB, ώστε το σύστημα κύλινδρος -τροχαλία-σώμα να ισορροπεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ καταργούμε ακαριαία τη δύναμη και το σώμα Σ αρχίζει να κατέρχεται κατακόρυφα, ενώ ο κύλινδρος αρχίζει να ανέρχεται στη σανίδα εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

(β) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ είναι ίσο με $4m/s^2$ και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5\text{s}$ κόβουμε ακαριαία το νήμα στο σημείο που εφάπτεται με τον κύλινδρο και στο σημείο πρόσδεσης με το σώμα Σ . Μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό δεν εμποδίζει την κίνηση του κυλίνδρου και του σώματος. Ο κύλινδρος συνεχίζει την κίνησή του εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση.

(γ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία να κινείται πάνω στη σανίδα.

(δ) Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο κύλινδρος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .

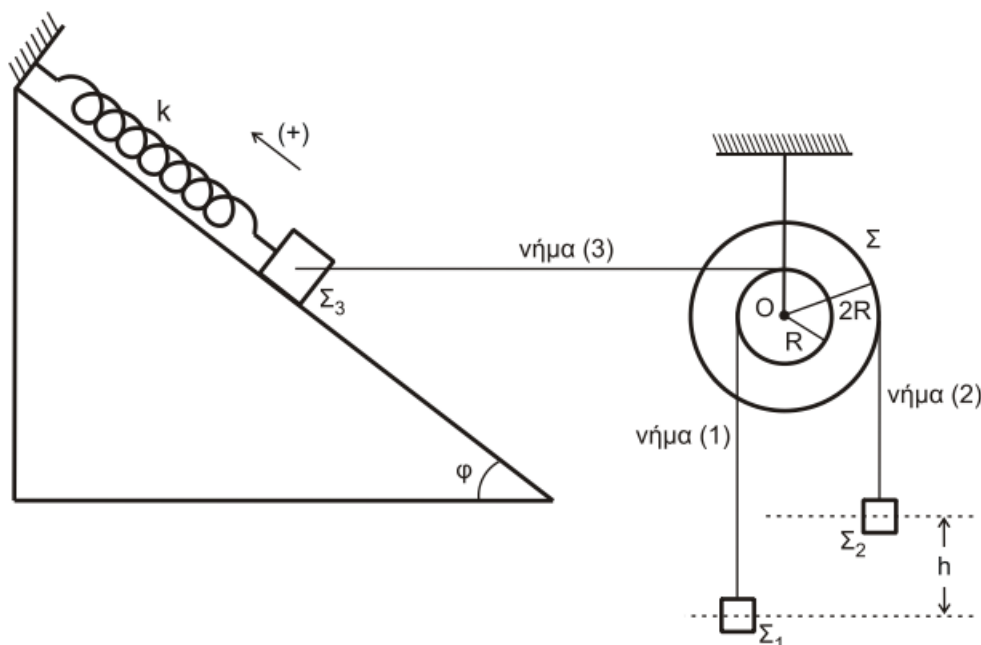
(ε) Να δείξετε ότι κατά τη διάρκεια της ανόδου του κυλίνδρου πάνω στη σανίδα, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 , που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται.

Δίνονται:

- $\eta\mu\phi = 0,5$
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$
- η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm(\text{κυλίνδρου})} = \frac{1}{2}M_K R_K^2$
- η ροπή αδράνειας της ομογενούς τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι ίση με $I_{cm(\text{τροχαλίας})} = \frac{1}{2}M_T R_T^2$
- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα
- ο χαρακτηρισμός λεπτό νήμα αφορά νήμα αμελητέου πάχους.

Πανελλήνιες - Ιούνιος 2019

- 4.42.** Στερεό σώμα Σ μάζας $M = 1,5\text{kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$ αντίστοιχα, όπου $R = 0,1\text{m}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Το στερεό Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O δίνεται από τη σχέση $I_{\Sigma} = 2MR^2$.



Σχήμα 5

Τα σώματα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ και Σ_2 μάζας $m_2 = 1,5\text{kg}$ κρέμονται στα ελεύθερα άκρα αβαρών και μη εκτατών νημάτων (1) και (2). Τα νήματα είναι πολλές φορές τυλιγμένα στους κυλίνδρους ακτίνας R και $2R$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.

Στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους γωνίας κλίσης ϕ , όπου $\eta\mu\phi = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,6$ στερεώνεται ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 300\text{N/m}$ στο άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 3\text{kg}$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα Σ_3 συνδέεται με τον κύλινδρο ακτίνας R με τη βοήθεια οριζώντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος (3), όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Το σύστημα των σωμάτων αρχικά ισορροπεί και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 απέχουν κατακόρυφα μεταξύ τους απόσταση $h = 0,48\text{m}$.

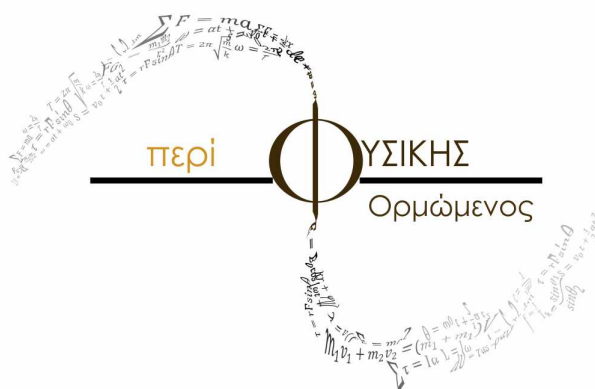
(α) Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση του φυσικού του μήκους.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα (3). Το σώμα Σ_3 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και θετική φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα 5 και το στερεό σώμα Σ αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονά του.

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_3 τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{5}\text{s}$

- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού σώματος Σ .
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του στερεού σώματος Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή που τα σώματα Σ_1 και Σ_2 διέρχονται από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού σώματος Σ τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει διαγράψει $\frac{20}{\pi}$ στροφές. περιστροφές.
- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \text{ m/s}^2$
 - Να θεωρήσετε ότι τα μήκη των νημάτων (1) και (2) είναι πολύ μεγάλα ώστε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 να μη συγκρούονται με το στερεό Σ , κατά τη διάρκεια της κίνησής τους.
 - Να θεωρήσετε ότι τα σώματα Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 είναι πολύ μικρών διαστάσεων.
 - Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
 - Να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση του αριθμού π .

Πανελλήνιες - Σεπτέμβριος 2019



Βασικές πηγές: study4exams.gr - Θέματα Πανελληνίων