Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ταλαντώσεις

Σύνολο Σελίδων: Ενδεικτικές Λύσεις

Κυριακή 30 Σεπτέμβρη 2018

Θέμα Α

Α.1. Ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης. Η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας ($F = -bv$). Η περίοδος της ταλάντωσης:

(γ) παραμένει σταθερή.

Α.2. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του είναι μέγιστος σε απόλυτη τιμή όταν:

(β) η ορμή του σώματος είναι μηδέν.

Α.3. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση κατάλληλης εξωτερικής περιοδικής δύναμης. Αντικαθιστούμε το σώμα μάζας m με ένα άλλο σώμα τετραπλάσιας μάζας και το αναγκάζουμε πάλι να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση της ίδιας εξωτερικής δύναμης. Η περίοδος της νέας ταλάντωσης:

(α) παραμένει σταθερή.

Α.4. Κατά τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που εκτελούνται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις $x_1 = A\eta\mu\,(100\pi t)$ (S.I.) και $x_2 = A\eta\mu\,(104\pi t)$ (S.I.) δημιουργούνται διακροτήματα. Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι ίση με:

(γ) $2Hz$

Α.5.

(α) Σε μια φθίνουσα ταλάντωση η ενέργεια του ταλαντωτή παραμένει σταθερή. **Λάθος**

(β) Η περίοδος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογη του πλάτους ταλάντωσης.**Λάθος**

(γ) Κατά το συντονισμό, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b. **Σωστό**

(δ) Το σύστημα αναρτήσεων ενός αυτοκινήτου νέας τεχνολογίας είναι ένα σύστημα φθινουσών ταλαντώσεων με μικρή σταθερά αποσβεσης. **Λάθος**

(ε) Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο ταλαντώσεων, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με ίδιο πλάτος και παραπλήσιες συχνότητες, είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1 Ένα σώμα μικρών διαστάσεων εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης με το πλάτος να μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση $A = A_o e^{-\Lambda t}$, όπου Λ μια θετική σταθερά.

Αν στο τέλος της δεύτερης περιόδου το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος ισούται με $\dfrac{A_o}{25}$, τότε στο τέλος της πρώτης περιόδου το πλάτος έχει μειωθεί κατά :

(γ) $\dfrac{4A_o}{5}$

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1^2 = A_o A_2 = \frac{A_o^2}{25} \Rightarrow A_1 = \frac{A_o}{5}$$

Άρα το πλάτος θα έχει μειωθεί κατά $A_o - A_1 = \dfrac{4A_o}{5}$

Β.2 Ένα σώμα μικρών διαστάσεων εκτελεί μια ευθύγραμμη κίνηση της οποίας η θέση προκύπτει από την επαλληλία δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση, με πλάτος A και γωνιακές συχνότητες $\omega_1 = 98\pi\, rad/s$ και $\omega_2 = 100\pi\, rad/s$.

Η χρονική εξίσωση της θέσης δίνεται παρακάτω:

$$x = A\eta\mu\left(\omega_1 t\right) + A\eta\mu\left(\omega_2 t\right)$$

Σε μια χρονική στιγμή t_1 η διαφορά φάσης ανάμεσα στις επιμέρους ταλαντώσεις είναι ίση με $\frac{\pi}{2} rad$. Η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή t_1 θα είναι ίση με:

(β) A

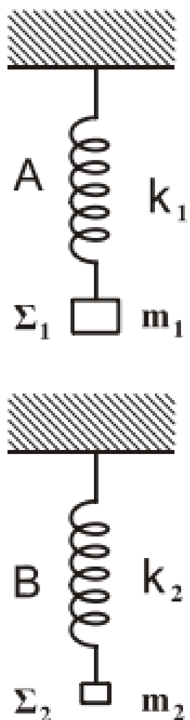
Για την διαφορά φάσης ισχύει:

$$\Delta\phi = \left(\omega_2 - \omega_1\right) t_1 \Rightarrow t_1 = 0,25s$$

Η ζητούμενη απομάκρυνση θα είναι:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t_1\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t_1\right) = A$$

Β.3 Δύο ιδανικά ελατήρια Α και Β με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα κρέμονται από δύο ακλόνητα σημεία. Στα κάτω άκρα των ελατηρίων Α και Β είναι δεμένα και ισορροπούν δύο σώματα Σ_1 μάζας m_1 και Σ_2 μάζας m_2.



Στην κατάσταση αυτή το ελατήριο Α έχει διπλάσια επιμήκυνση από το ελατήριο Β. Εκτρέπουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κατακόρυφα μέχρις ότου τα ελατήρια αποκτήσουν το φυσικό τους μήκος και τα αφήνουμε ελεύθερα. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργειες ταλάντωσης E_1 και $E_2 = 2E_1$ αντίστοιχα.

Ο λόγος των σταθερών k_1 και k_2 των δύο ελατηρίων Α και Β είναι ίσος με:

$$\textbf{(β)}\ \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{8}$$

Στην θέση ισορροπίας ενός σώματος μάζας m που είναι αναρτημένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς k η επιμήκυνση του ελατηρίου Δl υπολογίζεται από την συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Εκτρέποντας το σώμα μέχρι την θέση Φυσικού μήκους του ελατηρίου και αφήνοντας το ελεύθερο, η θέση φυσικού μήκους θα ταυτίζεται με την ακραια θέση, οπότε για το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει ότι: $A = \Delta l$

Στις παραπάνω περιπτώσεις της εκφώνησης έχουμε:

$$\Delta l_A = 2\Delta l_B \Rightarrow \frac{m_1 g}{k_1} = 2\frac{m_2 g}{k_2} \Rightarrow A_1 = 2A_2$$

$$E_1 = 2E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k_1 A_1^2 = 2\frac{1}{2}k_2 A_2^2 \Rightarrow ...k_2 = 8k_1$$

Θέμα Γ

Σώμα μάζας $m = 0,5kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με τις παρακάτω χρονικές εξισώσεις στο S.I.

$$x_1 = A\eta\mu\left(\omega t\right) \qquad x_2 = A\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t\right)$$

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται πάνω στον άξονα $x'Ox$, η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται κάθε $0,25s$ και η απόσταση που διανύει το σώμα στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι $1,6m$.

Γ.1 Να υπολογιστεί η περίοδος και η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται κάθε φορά που διέρχεται από ακραία θέση, άρα κάθε μισή περίοδο ($\Delta t = T/2 = 0,25 \Rightarrow T = 0,5s$) *και το διάστημα που διανύει ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς είναι* $2A' = 1,6m \Rightarrow A' = 0,8m$. *Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης* $\frac{\pi}{2}$.

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow A' = 2A \Rightarrow A = 0,4m$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A'^2 \Rightarrow E = 25,6J$$

Γ.2 Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας την χρονική στιγμή που η φάση της πρώτης ταλάντωσης ισούται με $\dfrac{4\pi}{3} rad$.

$$\phi_1 = \omega t = \frac{4\pi}{3}$$

$$x = x_1 + x_2 = A\eta\mu(\omega t) + A\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(\omega t) = -0,4\sqrt{3}m$$

Γ.3 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Δυναμικής Ενέργειας, την παραπάνω χρονική στιγμή.

Η ταχύτητα την παραπάνω στιγμή μπορεί να βρεθεί τόσο από την ΑΔΕΤ, όσο και από την αρχή της επαλληλίας:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) + \omega\sqrt{3}A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1,6\pi m/s$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής θα είναι:

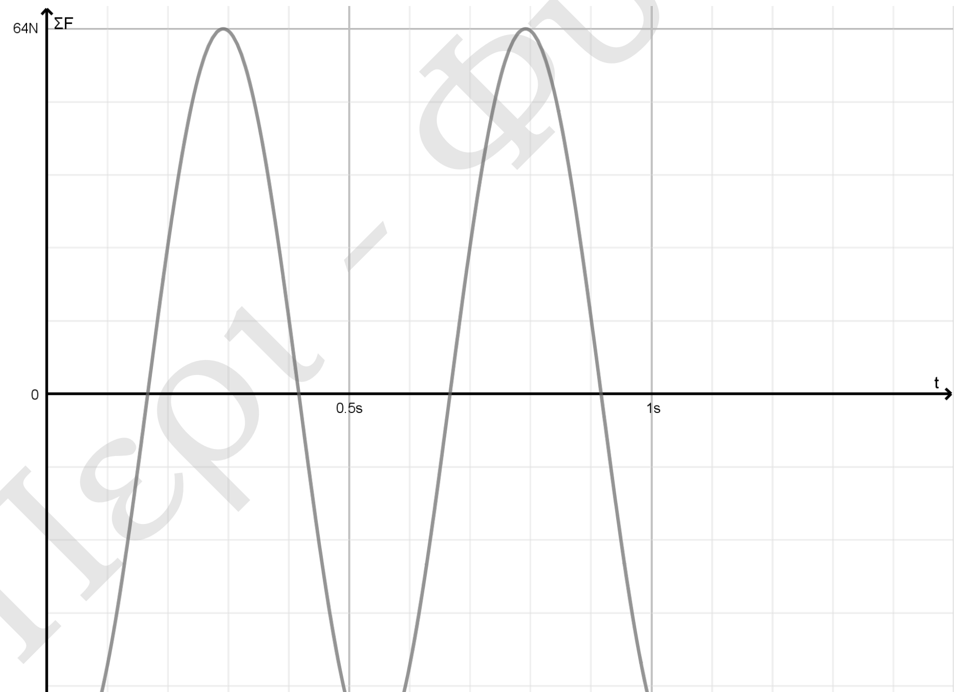
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \upsilon = +m\omega^2 x \upsilon = -83,2\sqrt{3}\pi J/s$$

Γ.4 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή που για πρώτη φορά $x_1 = -x_2$.

Υπολογίζω αρχικά την αρχική φάση θ της σύνθετης ταλάντωσης

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A\sqrt{3}\eta\mu(\pi/2)}{A + A\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(\pi/2)} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A'\eta\mu\left(\omega t' + \theta\right) = 0$$



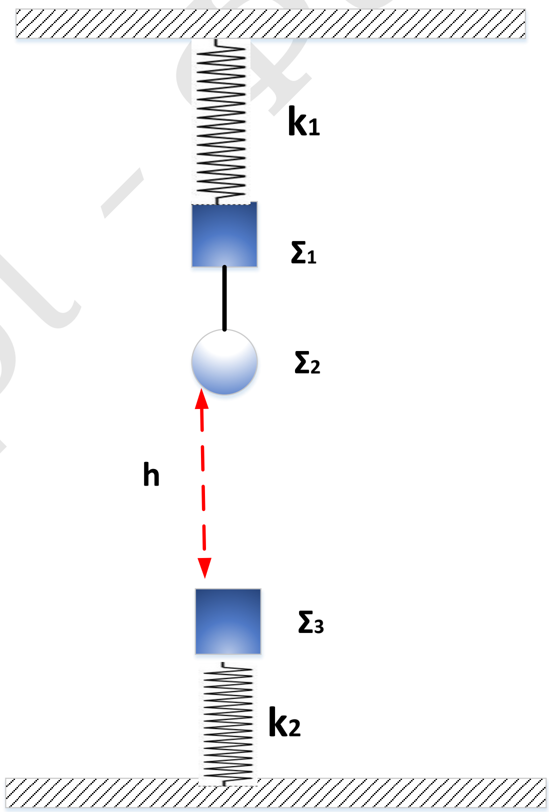
$$\omega t' + \theta = 2\kappa\pi + 0 \quad \text{ή} \quad \omega t' + \theta = 2\kappa\pi + \pi - 0 .... \Rightarrow t' = \frac{1}{6}s$$

Γ.5 Να βρείτε την χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα $\Sigma F = f(t)$ για το χρονικό διάστημα του πρώτου δευτερολέπτου της κίνησης.

$$\Sigma F = -m\omega^2 x = -64\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (S.I.)$$

Θέμα Δ

Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = m_2 = m = 1kg$ και συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα. Το Σ_1 είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1 = 100N/m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οροφή. Τα δύο σώματα ισορροπούν, όπως φαίνεται στο σχήμα και σε κάποια χρονική στιγμή κόβεται το νήμα που συνδέει τις δύο μάζες.



Δ.1 Να αποδείξετε ότι το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

Για την θέση ισορροπίας που το ελατήριο είναι σε επιμήκυνση κατά Δl_o:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1 \Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \quad (1)$$

Για μια τυχαία θέση κάτω από την Θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F = mg - k_1(\Delta l_1 + y) \Rightarrow \Sigma F = -k_1 y \quad (2)$$

Για την περίοδο:

$$D = k_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

Δ.2 Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του Σ_1 σε συνάρτηση με τον χρόνο και να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το αντίστοιχο διάγραμμα. Να θεωρήσετε ως χρονική στιγμή $t_o = 0$ την στιγμή που κόβουμε το νήμα και ως θετική την φορά προς τα κάτω.

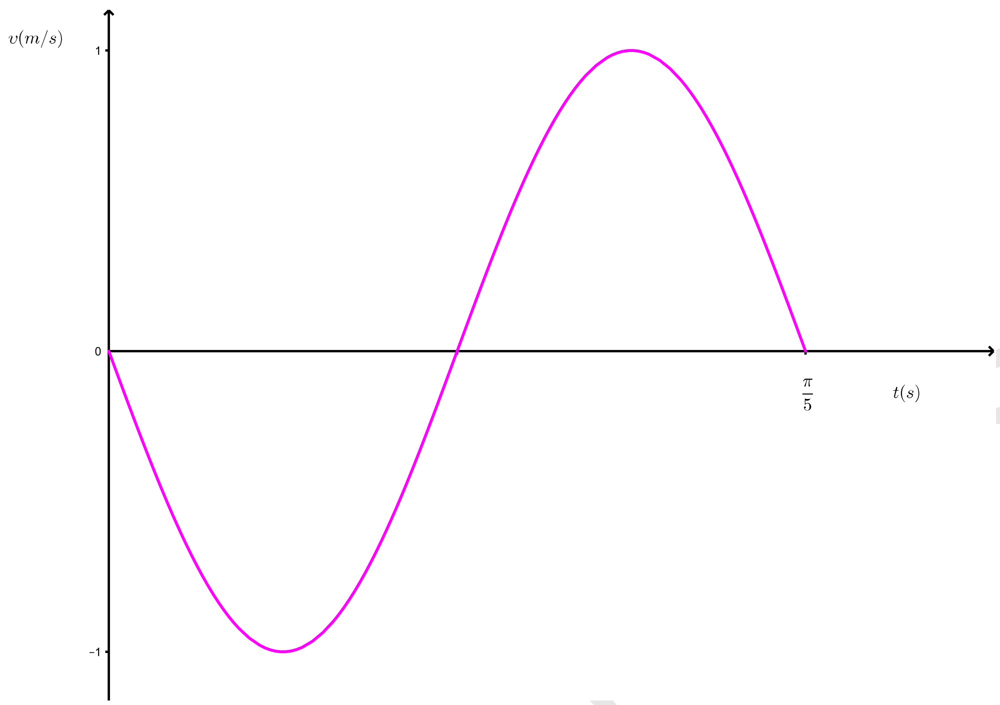
Στην αρχική θέση ισορροπίας και των δύο σωμάτων, πριν κοπεί το νήμα το ελατήριο είναι σε επιμήκυνση Δl_2. Αυτή η θέση είναι και η ακραία θέση.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1 \Delta l_2 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k_1}$$

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{k_1} = 0,1 m$$

Αφού θετική είναι η φορά προς τα κάτω το σώμα ξεκινά από την ακραία θετική θέση άρα $\phi_o = \pi/2$

$$y = 0.1 \eta\mu \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = \sigma\upsilon\nu \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$



Δ.3 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_{\varepsilon\lambda}} + \vec{w} = -D\vec{y}$$

$$mg - F_{\varepsilon\lambda} = -k_1 y \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10 + 100y \ (S.I.) \ \ -0,1m \leq y \leq +0,1m$$

Στο κάτω μέρος του Σ_2 και σε απόσταση h από την αρχική του θέση ισορροπεί σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 2m$ δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_2 = 200N/m$. Πριν κόψουμε το νήμα εκτρέπουμε το Σ_3 από την θέση ισορροπίας του συμπιέζοντας επιπλέον το ελατήριο κατά $d = \frac{\pi}{5}m$.

Την στιγμή που θεωρήσαμε ως στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το Σ_3 από την θέση αρχικής εκτροπής με αποτέλεσμα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Το Σ_3 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_2, που κινείται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, την χρονική στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από την Θέση ισορροπίας του.

Δ.4 Να βρεθεί το ύψος h και η μεταβολή της ορμής του Σ_2 εξαιτίας της κρούσης.

Το Σ_3 θα εκτελέσει ταλάντωση ξεκινώντας από την ακραία του θέση, άρα σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T_3}{4}$ θα συγκρουστεί με το Σ_2 έχοντας την μέγιστη ταχύτητα του, αφού η κρούση γίνεται στην Θέση ισορροπίας του.

$$k_2 = m_3\omega_3^2 \Rightarrow T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_3}{k_2}} = \frac{\pi}{5}s$$

Για την ελεύθερη πτώση του Σ_2 ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{8}m.$$

$$\upsilon_2 = g\Delta t \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\pi}{2}m/s$$

Η ταχύτητα του Σ_3 πριν την κρούση θα έχει φορά προς τα πάνω και το μέτρο της θα είναι:

$$\upsilon_3 = \omega_3 A_3 = \omega_3 d \Rightarrow \upsilon_3 = 2\pi m/s$$

Για την ελαστική κρούση ισχύει ($\upsilon_2 = +\pi/2m/s$, $\upsilon_3 = -2\pi m/s$):

$$\upsilon_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}\upsilon_3 + \frac{2m_2}{m_2 + m_3}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3' = -\frac{\pi}{3}m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_3 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_3}{m_2 + m_3}\upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_2' = -\frac{14\pi}{3}m/s$$

Η μεταβολή της ορμής για το Σ_2 θα είναι:

$$\Delta p_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 = -\frac{17\pi}{6}$$

Δ.5 Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Σ_3 μετά την κρούση , προς την ενέργεια της ταλάντωσης του πριν την κρούση.

Η ταχύτητα του Σ_3 μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα για την νέα ταλάντωση του, αφού η θέση μετά την κρούση είναι η Θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2}{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2} = \left(\frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3}\right)^2 = \frac{5}{180}$$