Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 4 Αυγούστου 2018

Θέμα Α

Α.1. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι κίνηση :

(δ) ευθύγραμμη περιοδική

Α.2. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου T και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση. Μετά από χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{T}{2}$, το σώμα:

(β) έχει αρνητική επιτάχυνση.

Α.3. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T. Αντικαθιστούμε το σώμα μάζας m με ένα άλλο σώμα τετραπλάσιας μάζας και το αναγκάζουμε πάλι να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος της νέας ταλάντωσης είναι:

(γ) $2T$,

Α.4. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και κάποια χρονική στιγμή η φάση της είναι ίση με $\frac{15\pi}{4} rad$. Αυτή την χρονική στιγμή το σώμα :

(β) έχει θετική επιτάχυνση και ταχύτητα.

Α.5.

(α) Η περίοδος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογη του πλάτους ταλάντωσης. **Λάθος**

(β) Στο σύστημα μάζας ελατηρίου η σταθερά επαναφοράς είναι ανάλογη της μάζας του σώματος. **Λάθος**

(γ) Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου. Αν συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα ίσης μάζας, τότε διπλασιάζεται η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης. **Λάθος**

(δ) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας ελατηρίου ταυτίζεται πάντα με την δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου. **Λάθος**

(ε) Η Κινητική και η Δυναμική Ενέργεια της ταλάντωσης μεγιστοποιούνται 4 φορές στην χρονική διάρκεια μιας ταλάντωσης. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στην οροφή ενός εργαστηρίου.

Με την βοήθεια μεταβλητής δύναμης μετακινούμε το σώμα μέχρι την θέση στην οποία δεν του ασκείται δύναμη από το ελατήριο. Από αυτήν την θέση το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα την στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$.

Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα είναι:

(α) $g\sqrt{\frac{m}{k}}$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται γνωστή και ίση με g.

Η περίοδος της ταλάντωσης και η χρονική στιγμή t_1 έχουν σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{4}$$

Η θέση του σώματος την χρονική στιγμή $t_o = 0$ ταυτίζεται με την ακραία θέση της ταλάντωσης, αλλά και με την θέση Φυσικού μήκους. Οπότε από την συνθήκη ισορροπίας στην ΘΙΤ υπολογίζουμε την αρχική παραμόρφωση που ταυτίζεται με το πλάτος της ταλάντωσης:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = A = \frac{mg}{k}$$

Την στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα θα είναι μέγιστη κατά μέτρο:

$$\upsilon = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{mg}{k}$$

Β.2. Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ εκτελούν ανεξάρτητες ταλαντώσεις για τις οποίες δίνεται το κοινό διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Αν F_1 και F_2 είναι το μέτρο της δύναμης επαναφοράς για το Σ_1 και το Σ_2 αντίστοιχα στην θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας για την κάθε ταλάντωση, τότε:

(γ) $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{2}$

Από το διάγραμμα προκύπτουν:

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1$$

$$\upsilon_{max(1)} = 2\upsilon_{max(2)} \Rightarrow \omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 \Rightarrow A_1 = 4A_2$$

Άρα προκύπτει:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{D_1 A_1}{D_2 A_2} = \frac{m_1 \omega_1^2 A_1}{m_2 \omega_2^2 A_2} = \frac{1}{2}$$

B.3. Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1 είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται πλαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2.

Αν η ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με το 25% της ενέργειας της ταλάντωσης του Σ_1 πριν την κρούση, τότε για τον λόγο των μαζών των δύο σωμάτων ισχύει ότι:

(β) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{3}$

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$m_1 \upsilon_{max} = (m_1 + m_2)\upsilon'_{max}$$

Η ταχύτητα πριν και μετά την κρούση είναι μέγιστη, αφού η κρούση πραγματοποιείται στην Θέση ισορροπίας. Για τις ενέργειες ισχύει:

$$E' = \frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon'^2_{max} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m_1 \upsilon^2_{max} \Rightarrow ....$$

Θέμα Γ

Σώμα μάζας $m = 0,5kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Η συνολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = 4J$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει τη μέγιστη κινητική του ενέργεια και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, ενώ τη χρονική στιγμή $\dfrac{T}{12}$ βρίσκεται στη θέση $x = -0.2m$.

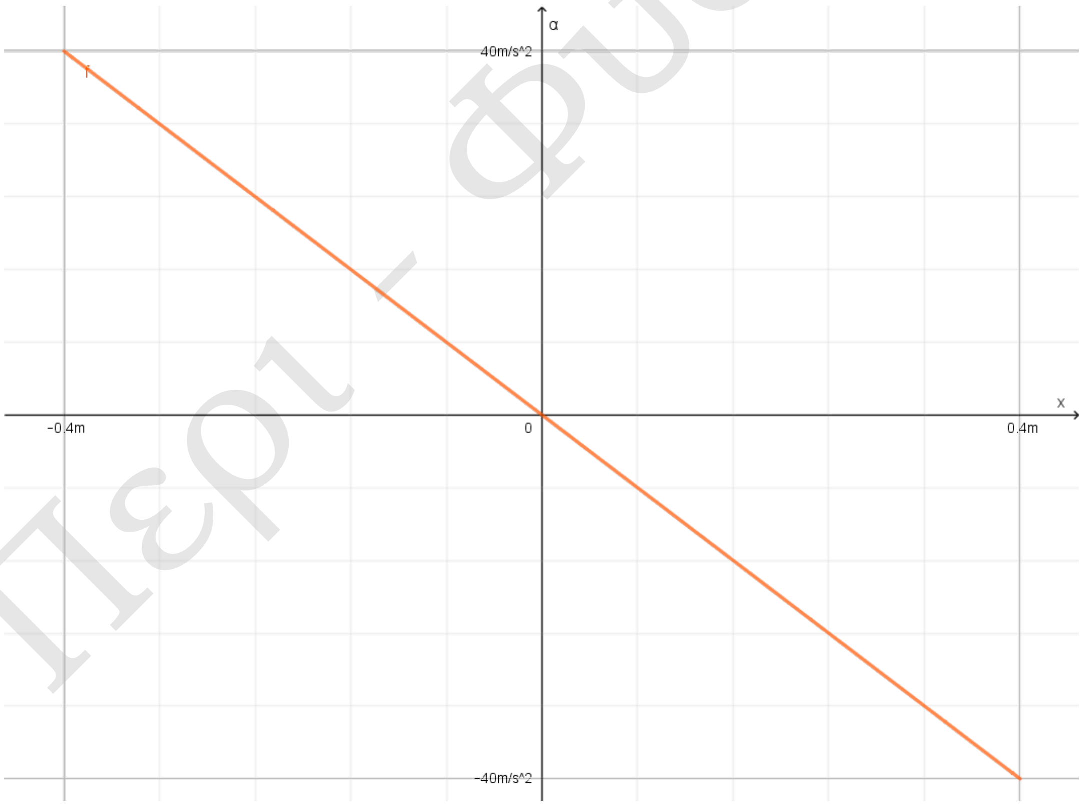
Γ.1 Να δικαιολογήσετε ότι η ταλάντωση έχει αρχική φάση και να υπολογίσετε την τιμή της.

Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας, αφού η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη και κινείται με αρνητική ταχύτητα.

$$A\eta\mu\phi_o = 0 \Rightarrow \phi_o = 0, \pi$$

$$\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_o = -\upsilon_{max} \Rightarrow \phi_o = \pi$$

Γ.2 Να βρείτε τη σχέση επιτάχυνσης- απομάκρυνσης και να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

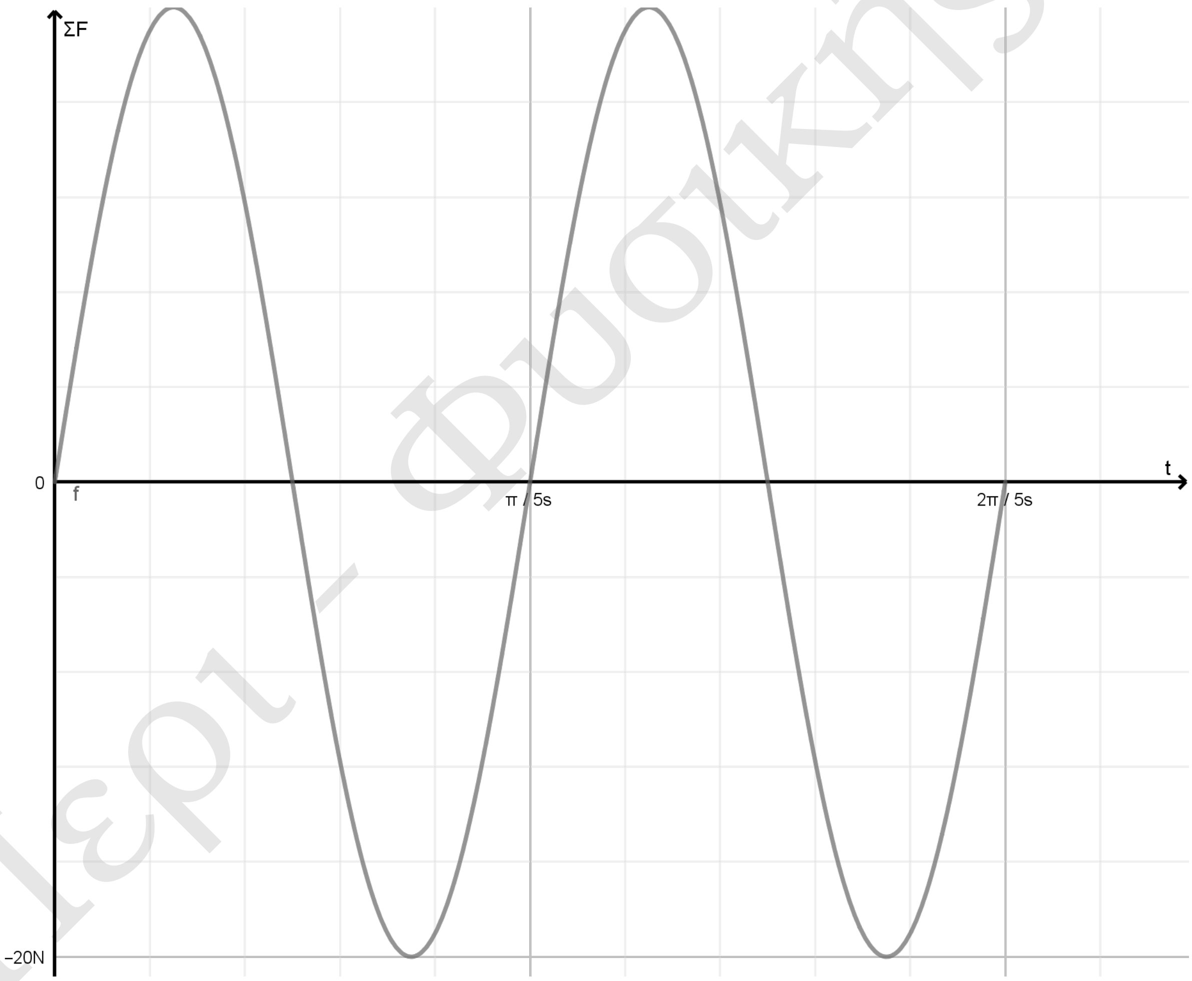


$$-0,2 = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12} + \pi\right) \Rightarrow -0,2 = -\frac{A}{2} \Rightarrow A = 0,4m$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s$$

Η σχέση επιτάχυνσης απομάκρυνσης θα είναι:

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -100x \quad , -0,4 \leq x \leq 0,4 \quad (S.I.)$$



Γ.3 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες για διάστημα δύο επαναλήψεων της κίνησης.

$$\Sigma F = -m\omega^2 x = -20\eta\mu\left(10t + \pi\right) = 20\eta\mu 10t \quad (S.I.)$$

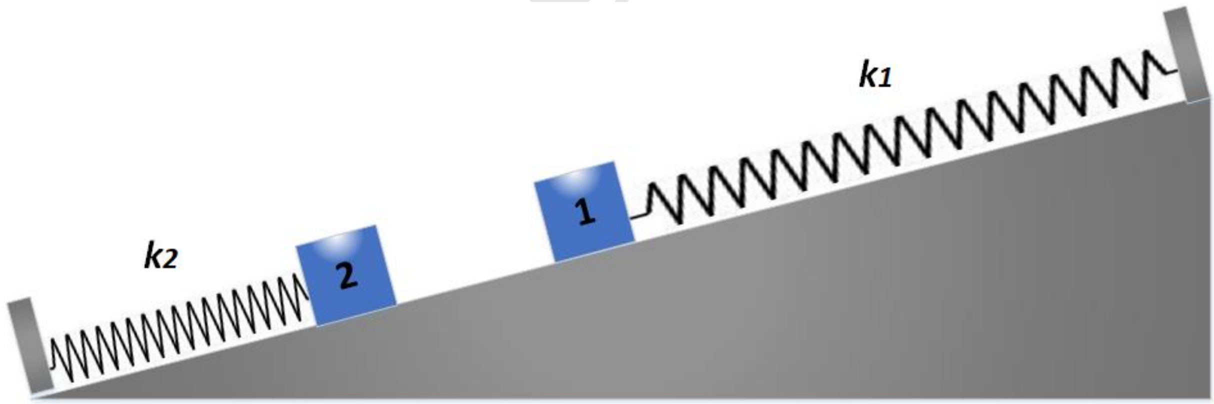
Γ.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$.

$$W = -\Delta U = 0 - 1 = -1J$$

Θέμα Δ

Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^o$ ισορροπούν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = m = 1kg$ αναρτημένα σε δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές $k_1 = k_2 = 100N/m$. Τα ελατήρια έχουν το ένα άκρο τους ακλόνητα στερεωμένο και όταν αυτά βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος, τα ελεύθερα άκρα τους απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 0,05m$.

Με κατάλληλη μεταβλητή δύναμη εκτρέπω το Σ_1 προς τα πάνω μέχρι το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά d από το φυσικό του μήκος. (Θέση Δ) και από αυτή την θέση το αφήνω ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε στην συνέχεια θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Δ.1 Να υπολογιστεί η ενέργεια που ξοδέψαμε για την εκτροπή του σώματος μέχρι την θέση Δ.

Αφού τα ελατήρια και τα σώματα είναι ίδια, στην θέση ισορροπίας τους θα έχουν την ίδια παραμόρφωση Δl_o επιμήκυνση για το (1) και συμπίεση για το (2), η οποία θα βρεθεί από την συνθήκη ισορροπίας.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg\eta\mu\phi = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = 0.05m$$

Η ενέργεια που ξοδέψαμε για την εκτροπή του σώματος είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης του, άρα:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}k\left(d + \Delta l_o\right)^2 = 0,5J$$

Το Σ_1 σε μια χρονική στιγμή που θα την θεωρήσουμε ως $t_o = 0$ συγκρούεται κεντρικά με το ακίνητο Σ_2 με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα.

Δ.2 Να δείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί ο χρόνος για μια πλήρη επανάληψη της κίνησης.

Απόδειξη στην θεωρία...

$$D = k_1 + k_2 = \left(m_1 + m_2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}s$$

Δ.3 Θεωρώντας ως θετική την ταχύτητα του Σ_1 πριν την κρούση να δείξετε ότι η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του συσσωματώματος δίνεται από την συνάρτηση:

$$x = 0,05\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (S.I.)$$

Το σώμα (1) πριν την κρούση βρίσκεται στην θέση $x = d$ και έχει ταχύτητα υ_1 την οποία θα βρούμε με την ΑΔΕΤ για την ταλάντωση του:

$$E = K + U \Rightarrow ....\upsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}m/s$$

Για την κρούση εφαρμόζουμε την ΑΔΟ ώστε να υπολογίζουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος που θα προκύψει:

$$m_1 \upsilon_1 = (m_1 + m_2)\, V \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{4} m/s$$

Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε νέα θέση, για την οποία έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = (m_1 + m_2)\, g \eta\mu\phi \Rightarrow$$
$$k_1(\Delta l_2 + d) + k_2 \Delta l_2 = (m_1 + m_2)\, g\eta\mu\phi \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{1}{40} = 0,025m$$

Η κρούση γίνεται στην θέση ισορροπίας του σώματος 2 στην οποία το ελατήριο 2 είναι συσπειρωμένο κατά 0,05, στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος το ελατήριο 2 είναι συσπειρωμένο κατά 0,025, άρα η θέση μετά τη κρούση είναι η $x = 0,05 - 0,025 = 0,025m$. *Για να βρεθεί το νέο πλάτος εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα στην θέση αυτή.*

$$\frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, V^2 + \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow A' = 0,05m$$

Για να υπολογιστεί η αρχική φάση αρκεί να λάβω υπόψη ότι την $t = 0$ $x = +0,025m$ *και η ταχύτητα είναι θετική.*

$$\eta\mu\phi_o = \frac{1}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$$

Άρα $\phi_o = \dfrac{\pi}{6} rad$

Δ.4 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του συσσωματώματος θα γίνει μέγιστη για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Η επιτάχυνση θα γίνει μέγιστη για πρώτη φορά όταν το σώμα φτάσει στην ακραία θετική θέση.

$$A\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{6}\right)=A\Rightarrow ...t=\frac{\pi}{30}s$$

Δ.5 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 την παραπάνω χρονική στιγμή.

$$\frac{dP_2}{dt}=\Sigma F_2=-D_2x=-m_2\omega^2x=-5kgm/s^2$$