Λύσεις τελικού διαγωνίσματος – 24 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο

1. **α.**
2. **β.**
3. **δ.**
4. **γ.**
5. **α. Σωστή.**
   β. Σωστή.
   γ. Λάθος.
   δ. Σωστή.
   ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

1. **Σωστή απάντηση είναι η β.**

   Για να συμβαίνει ακυρωτική συμβολή στο σημείο Σ θα πρέπει:

   $r_1 - r_2 = \left(2N+1\right)\dfrac{\lambda}{2}$, όπου r_1 = (ΠΑ) + (ΑΣ) = 2x και r_2 = (ΠΣ) = 2λ.

   Για να είναι ελάχιστη η απόσταση h, θα πρέπει στην παραπάνω σχέση να θέσουμε Ν = 0. Τότε:

   $$2x - 2\lambda = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2x = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{5\lambda}{4}$$

   Εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΠΟΑ προκύπτει:

   $$x^2 = h_{min}^2 + \lambda^2 \Rightarrow h_{min}^2 = \frac{25\lambda^2}{16} - \lambda^2 \Rightarrow h_{min} = \frac{3\lambda}{4}$$

2. **Σωστή απάντηση είναι η α.**

   Οι συχνότητες του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής από τις δύο πηγές είναι:

   Πηγή S_1: $f_1 = \dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_s$ και **Πηγή S_2:** $f_2 = \dfrac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s$.

   Η συχνότητα του σύνθετου ήχου που ακούει ο παρατηρητής είναι:

   $$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{\dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_s + \dfrac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s}{2} \Rightarrow \bar{f} = f_s$$

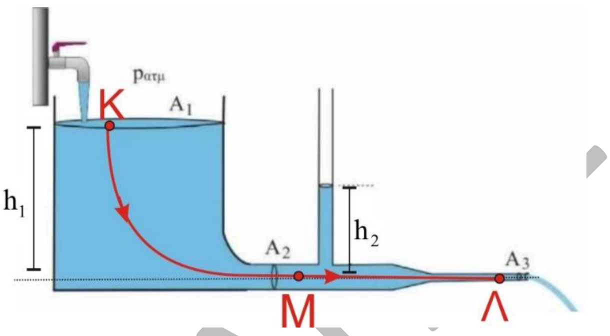
   ενώ η συχνότητα του διακροτήματος είναι:

   $$f_\delta = \left|f_1 - f_2\right| = \left|\frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_s - \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s\right| \Rightarrow f_\delta = \frac{2\upsilon_A f_s}{\upsilon}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που πραγματοποιεί το τύμπανο του αυτιού του παρατηρητή μεταξύ τριών διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του ήχου (δηλαδή μεταξύ $2T_\delta$) είναι ίσος με:

$$\Delta t = N\bar{T} \Rightarrow 2T_\delta = N\bar{T} \Rightarrow 2\frac{1}{f_\delta} = N\frac{1}{\bar{f}} \Rightarrow N = \frac{2\bar{f}}{f_\delta} = \frac{2f_s}{\frac{2\upsilon_A f_s}{\upsilon}} \Rightarrow N = \frac{\upsilon}{\upsilon_A}$$

3. Σωστή απάντηση είναι η β.



Εφαρμόζοντας εξίσωση Bernulli για τα σημεία Κ (της επιφάνειας του υγρού) και το σημείο Λ (σημείο από το οποίο εκρέει το νερό) και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την οριζόντια επιφάνεια της οπής στο σημείο Λ, προκύπτει:

$$p_K + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\kappa^2 = p_\Lambda + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \Rightarrow p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\Lambda = \sqrt{2gh_1} \; (1)$$

Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των σημείων Μ (κάτω από τον κατακόρυφο σωλήνα) και Λ, προκύπτει:

$$\Pi_M = \Pi_\Lambda \Rightarrow \upsilon_M \cdot A_M = \upsilon_\Lambda \cdot A_\Lambda \Rightarrow \upsilon_M \cdot A = \upsilon_\Lambda \cdot \frac{A}{2} \Rightarrow \upsilon_\Lambda = 2\upsilon_M \; (2)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernulli για τα σημεία (Μ) και (Λ) που βρίσκονται στο ίδιο ύψος θα έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \quad (3)$$

Για την πίεση στο σημείο Μ ισχύει:

$$p_M = p_{atm} + \rho g h_2 \quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1), (2) και (4) και αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει:

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\upsilon_\Lambda}{2}\right)^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \Rightarrow \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot \left(\frac{3}{4}\upsilon_\Lambda^2\right) \Rightarrow g h_2 = \frac{3}{8}\left(\sqrt{2gh_1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{3}{4}h_1 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Δύο σημεία που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης απέχουν οριζόντια απόσταση λ. Άρα:

$$\lambda = 0{,}4 \text{ m}$$

Αφού το σημείο Ο διέρχεται 12 φορές από τη θέση ισορροπίας σε χρόνο 2,4 s, σημαίνει ότι πραγματοποιεί 6 ταλαντώσεις σε χρόνο 2,4 s. Άρα:

$$6T = 2{,}4 \Rightarrow T = 0{,}4 \text{ s}$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου Ο είναι ίση με 4A, όπου A το πλάτος των αρχικών κυμάτων. Όμως: 4A = 2λ. Άρα:

$$A = 0{,}2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow \mathbf{y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x\cdot \eta\mu 5\pi t}$$

β1. Το σημείο P που είναι η επόμενη κοιλία μετά το σημείο Ο βρίσκεται σε αντίθεση φάσης με αυτό, οπότε ξεκινάει την ταλάντωση του από τη θέση ισορροπίας με μέγιστη αρνητική ταχύτητα. Επομένως για να βρεθεί για 1^{η} φορά στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης χρειάζεται χρόνο 3T/4 και για 2^{η} φορά τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{3T}{4} + T \Rightarrow t_1 = \frac{7T}{4} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 0{,}7\ s}$$

β2. Η θέση του σημείου P είναι: $x_P = \lambda/2 = 0{,}2$ m

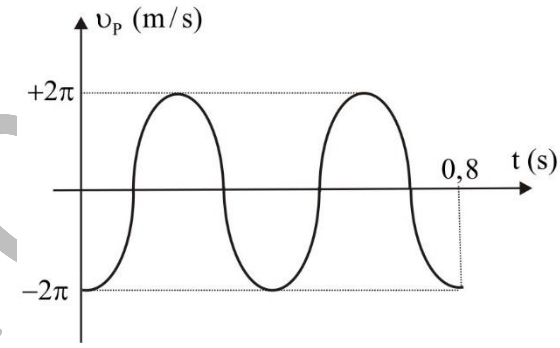
Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου P είναι:

$$y_P = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x_P \cdot \eta\mu 5\pi t = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi(0{,}2)\cdot \eta\mu 5\pi t \Rightarrow y_P = 0{,}4\eta\mu(5\pi t + \pi)$$

Οπότε η εξίσωση της ταχύτητάς του θα είναι:

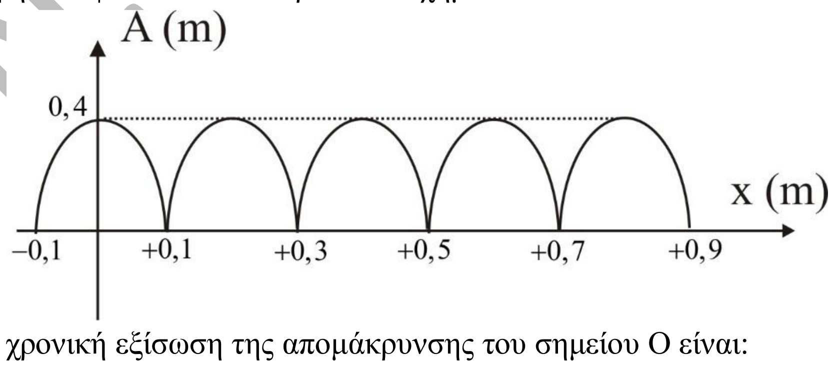
$$\upsilon_P = \omega A_P \sigma\upsilon\nu(5\pi t + \pi) =$$
$$= 5\pi\cdot 0{,}4\sigma\upsilon\nu(5\pi t + \pi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{\upsilon_P = 2\pi\sigma\upsilon\nu(5\pi t + \pi)}$$

Το διάγραμμα της εξίσωση της ταχύτητας του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



γ. Το συνολικό μήκος της χορδής είναι $L = \frac{5\lambda}{2} = \frac{5\cdot 0{,}4}{2} \Rightarrow L = 1\,\text{m}$.

Επειδή το σημείο Ο είναι η πρώτη κοιλία μετά το αριστερό άκρο A της χορδής, αυτό σημαίνει ότι το άκρο A της χορδής βρίσκεται στη θέση $x_A = -\lambda/4 = -0{,}1$ m. Η ζητούμενη γραφική παράσταση αφορά τη σχέση $A' = |0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x|$ και θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο είναι:

$$y_O = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x_O \cdot \eta\mu 5\pi t = 0{,}4\eta\mu 5\pi t$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K είναι:

$$y_K = 0,4\sigma\upsilon\nu 5\pi\frac{1}{3}\eta\mu 5\pi t = +0,4\frac{1}{2}\eta\mu 5\pi t = +0,2\eta\mu 5\pi t \Rightarrow y_K = 0,2\eta\mu 5\pi t$$

Επομένως τα δύο σημεία έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 0$, οπότε όταν το σημείο Ο έχει μέγιστη αρνητική ταχύτητα, το σημείο Κ θα έχει τη δική του μέγιστη αρνητική ταχύτητα δηλαδή θα έχει ταχύτητα ίση με:

$$\upsilon_K = -\omega A_\kappa = -5\pi \cdot 0,2\,\text{m/s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_K = -\pi\ \text{m/s}}$$

ε. Αν η συχνότητα των αρχικών κυμάτων ήταν διπλάσια, επειδή η ταχύτητα διάδοσης δεν θα άλλαζε, για το νέο μήκος κύματος λ΄ θα ίσχυε:

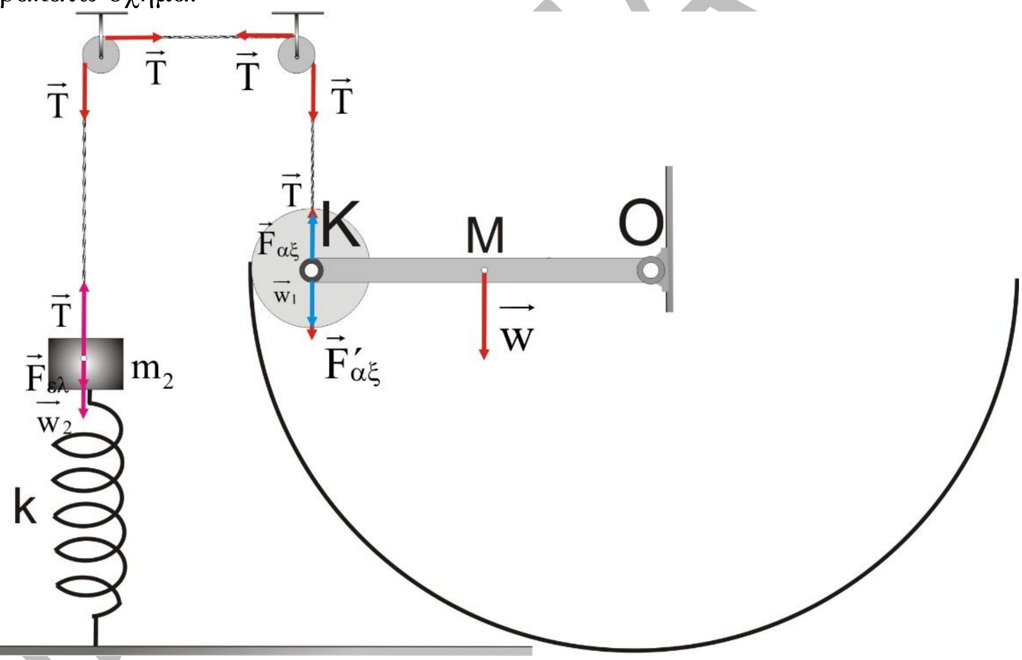
$$\upsilon_\delta{}' = \upsilon_\delta \Rightarrow \lambda' \cdot f' = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda' \cdot 2f = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} = 0,2\,\text{m}$$

Άρα για το μήκος L της χορδής θα ίσχυε: $L = N'\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow 1 = N' \cdot 0,1 \Rightarrow N = 10$

Δηλαδή το στάσιμο κύμα θα είχε 10 κοιλίες και **11 συνολικά δεσμούς.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Στη ράβδο, το δίσκο και το σώμα μάζας m_2 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Για την ισορροπία του δίσκου ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow w_\delta = F_{\alpha\xi} \Rightarrow F_{\alpha\xi} = 20\,\text{N}$

Για την ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow w \cdot (OM) + F_{\alpha\xi}{}' \cdot (OK) - T \cdot (OK) = 0 \Rightarrow 60 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,4 - T \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow T = 50\,\text{N}$$

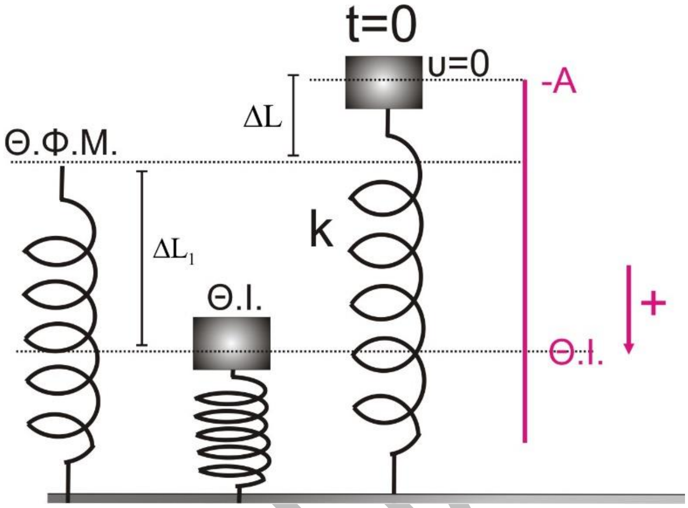
Τέλος, για την ισορροπία του σώματος ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + w_2 = T \Rightarrow k \cdot \Delta L + m_2 g = T \Rightarrow \Delta L = 0,2\,\text{m}$

Δηλαδή το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά 0,2 m, σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην κατάσταση ισορροπίας των σωμάτων θα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 0,2^2\right)J \Rightarrow \mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 1\ J}$$



β. Κόβοντας το νήμα το σώμα μάζας m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του σχήματος, για την οποία ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k\cdot \Delta L_1 = m_2 g \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta L_1 = 0,8\,m$

Επειδή τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα δεν έχει ταχύτητα, αυτό σημαίνει ότι ξεκινάει από ακραία θέση ταλάντωσης. Μάλιστα, λόγω της θετικής φοράς που μας δίνεται, ξεκινάει από τη θέση της μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_o = 3\pi/2$ rad.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \Delta L + \Delta L_1 = 1$ m.

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0,4\pi\sqrt{2}\,s$ και η γωνιακή συχνότητα

είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2,5\sqrt{2}\ rad/s$

Για την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης ισχύει:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \phi_o) = 1\cdot\eta\mu\left(2,5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Η ζητούμενη χρονική εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου θα είναι:

$$\Sigma\vec{F} = -Dy \Rightarrow \vec{w}_2 + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -ky \Rightarrow w_2 + F_{\varepsilon\lambda} = -50y \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -w_2 - 50y \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = -40 - 50\left[1\cdot\eta\mu\left(2,5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -40 - 50\eta\mu\left(2,5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Το ελατήριο θα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος, όταν θα έχει τη μέγιστη συσπείρωση, δηλαδή όταν θα βρεθεί στη θέση x = +A. Ο χρόνος λοιπόν που χρειάζεται μέχρι να βρεθεί από τη μία ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη για πρώτη φορά θα είναι: $\Delta t = T/2 \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,2\pi}\sqrt{2}\,s$**.**

γ. Αρχικά θα βρούμε σε ποια θέση η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια από τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης για πρώτη φορά.

Από την Α.Δ.Ε.Τ. της ταλάντωσης είναι: $E_T = K + U$ (1).

Επίσης K = 3U (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

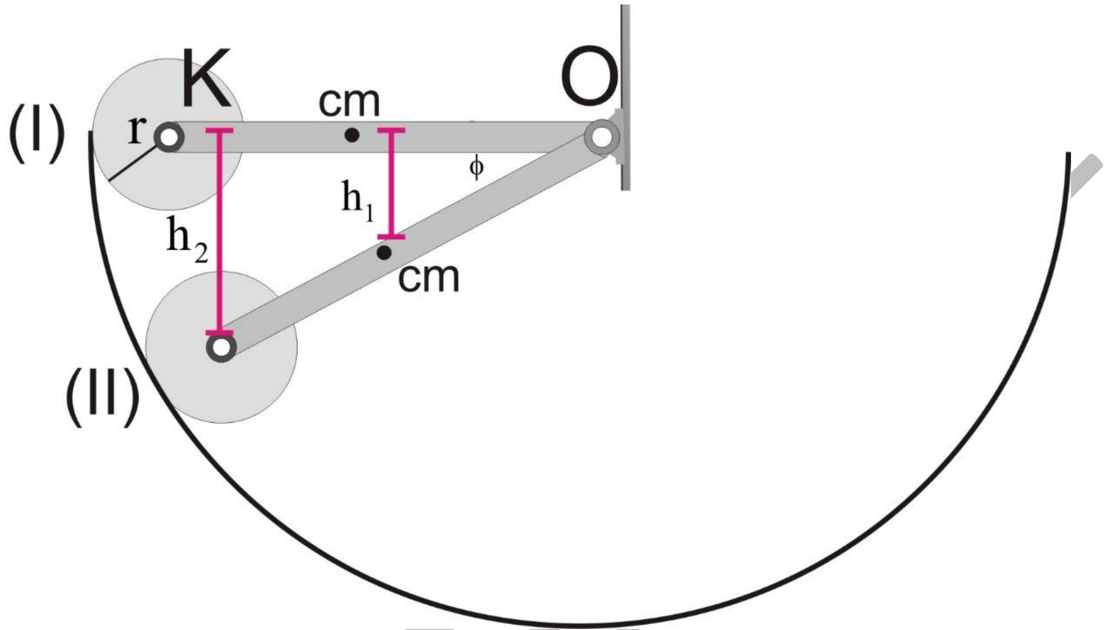
$$E_T = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 4\cdot\frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow y = \pm\frac{A}{2} = \pm 0,5\,m$$

Επειδή μας λέει για πρώτη φορά, δεκτή η λύση y = -0,5 m.

Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει παραμόρφωση σε σχέση με το φυσικό μήκος ίση με ΔL_3 = 0,3 m. Επομένως η δύναμη του ελατηρίου (ίδιου μέτρου ασκείται και στο σώμα αλλά και στο πάτωμα) θα έχει μέτρο:

$$F_{\varepsilon\lambda} = ky = (50 \cdot 0{,}3)\ \text{N} \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = 15\ N}$$

δ1. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη μετακίνηση του συστήματος από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ). Είναι:



$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_{w\delta} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 = +m_1 g h_2 + m g h_1 (1)$$

Για τα ύψη h_1 και h_2 ισχύει:

$$\eta\mu\phi = \frac{h_1}{\frac{L}{2}} \Rightarrow h_1 = \frac{L}{2} \cdot \eta\mu\phi = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2}\ \text{m} \Rightarrow h_1 = 0{,}1\ \text{m}$$

$$\eta\mu\phi = \frac{h_2}{L} \Rightarrow h_2 = L \cdot \eta\mu\phi = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2}\ \text{m} \Rightarrow h_2 = 0{,}2\ \text{m}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει το ζητούμενο. Είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = +m_1 g h_2 + M g h_1 = +2 \cdot 10 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \Rightarrow \mathbf{K_{\tau\varepsilon\lambda} = 10\ J}$$

δ2. Το spin του δίσκου (ιδιοστροφορμή) υπολογίζεται από τη σχέση: $L = I_\delta \omega_\delta$
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη μετακίνηση του συστήματος από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙΙ). Είναι:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_{w\delta} \Rightarrow K_{III} - 0 = +m_1 g L + M g \frac{L}{2} = \left(2 \cdot 10 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 10 \cdot \frac{0{,}4}{2}\right) \text{J} \Rightarrow$$

$$K_{III} = 20\ \text{J}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα:

• Της κινητικής ενέργειας της ράβδου λόγω της περιστροφής της γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_ρ ,δηλαδή $K_\rho = \frac{1}{2} I_\rho \omega_\rho{}^2$ (1) όπου $I_\rho = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{3}ML^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 0,4^2\right) kg\cdot m^2 = 0,32\, kg\cdot m^2$

• Της κινητικής ενέργειας του δίσκου λόγω της σύνθετης κίνησης (Κ.Χ.Ο.) που κάνει, δηλαδή $K_\delta = \frac{1}{2} I_\delta \omega_\delta{}^2 + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{cm,\delta}{}^2 = \frac{3}{4} m_1 \upsilon_{cm,\delta}{}^2$ (2) .

Όμως, το άκρο Κ της ράβδου και το κέντρο μάζας του δίσκου έχουν ίδιου μέτρου ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή, οπότε:
$\upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm,\delta} \Rightarrow \omega_\rho \cdot L = \omega_\delta \cdot r \Rightarrow \omega_\delta = 4\omega_\rho$ (3)
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$K_{III} = 20\, J \Rightarrow K_\rho + K_\delta = 20\, J \Rightarrow \frac{1}{2} I_\rho \omega_\rho{}^2 + \frac{3}{4} m_1 \upsilon_{cm,\delta}{}^2 = 20\, J \Rightarrow \frac{1}{2} I_\rho \omega_\rho{}^2 + \frac{3}{4} m_1 (\omega_\rho L)^2 = 20\, J$$

$$\Rightarrow \omega_\rho = 5\sqrt{2}\, rad/s$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι $\omega_\delta = 4\omega_\rho = 20\sqrt{2}\, rad/s$ και κατά συνέπεια το spin του θα είναι:

$$L = I_\delta \omega_\delta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega_\delta = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0,1^2 \cdot 20\sqrt{2}\right) kg\cdot m^2/s \Rightarrow L = 0,2\sqrt{2}\, kg\cdot m^2/s$$

Επιμέλεια
Νεκτάριος Πρωτοπαπάς
nprotopapas@avgouleaschool.gr