Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

1ο Επαναληπτικό

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Καθώς μια στοιχειώδης επιφάνεια αλλάζει προσανατολισμό χωρίς όμως το κέντρο της να αλλάξει βάθος εντός του υγρού, τότε αλλάζει :

(γ) Η κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται πάνω της.

Α.2. Σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα έχοντας στροφορμή μέτρου L.Ασκούμε σε αυτό ροπή δύναμης μέτρου τ που το επιβραδύνει με σταθερή γωνιακή επιβράδυνση. Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει το σώμα είναι :

(α) $t = \dfrac{L}{\tau}$

Α.3. Το ιξώδες ενός ρευστού οφείλεται στις:

(β) Εσωτερικές δυνάμεις τριβών που αναπτύσσονται όταν αυτό είναι πραγματικό.

Α.4. Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα χωρίς απώλειες ενέργειας. Καθώς απομακρυνόμαστε από την πηγή του κύματος:

(δ) Η φάση της ταλάντωσης των σημείων της χορδής μειώνεται.

Α.5.

(α) Στη φθίνουσα ταλάντωση το ποσό της ενέργειας που χάνεται από το ταλαντευόμενο σύστημα σε κάθε περίοδο είναι σταθερό. **Λάθος**

(β) Ένα στερεό σώμα είναι δυνατό να έχει κινητική ενέργεια, χωρίς να έχει ορμή. **Σωστό**

(γ) Στην πλάγια κρούση εμφανίζεται πάντα θερμότητα. **Λάθος**

(δ) Τα πραγματικά ρευστά ονομάζονται και Νευτώνεια ρευστά. **Λάθος**

(ε) Σύγχρονες ονομάζονται οι πηγές που δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια κατεύθυνση. οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων είναι παραπλήσιες με αποτέλεσμα την δημιουργία διακροτημάτων με περίοδο T_δ. Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2T_\delta$ το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του N φορές για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\textbf{(β)}\ N = \frac{2(T_1 + T_2)}{|T_2 - T_1|}$$

Το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας 2 φορές σε κάθε ταλάντωση, άρα αρκεί να υπολογίσω πόσες ταλαντώσεις κάνει στο χρονικό διάστημα Δt.

Για την ταλάντωση ισχύει ότι:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Για το διακρότημα ισχύει ότι:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

Άρα αν N' ο αριθμός των ταλαντώσεων που κάνει τότε:

$$N = 2N' = 2f\Delta t = 2f2T_\delta = 2\frac{f_1+f_2}{2}2\frac{1}{|f_1-f_2|} \Rightarrow N = \frac{2(f_1+f_2)}{|f_1-f_2|}$$

Όμως γενικά $T = 1/f$ και προκύπτει η σχέση σε συνάρτηση με τις περιόδους.

B.2. Σε σημεία Κ και Λ της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων με εξίσωση ταλάντωσης $y = A\eta\mu(\omega t)$, παράγουν κύματα με μήκος κύματος λ. Το πρώτο υλικό σημείο δεξιά της μεσοκαθέτου του ΚΛ που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και ταλαντώνεται με μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max} = \omega A\sqrt{3}$ απέχει από την μεσοκάθετο απόσταση:

(α) $d = \dfrac{\lambda}{12}$

Για το σημείο μετά την συμβολή των κυμάτων από τις δύο πηγές θα ισχύει ότι:

$$\upsilon_{max} = \omega A\sqrt{3} = \omega 2A|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)| \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right) = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{6}$$

Αφού είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ $= S$ πρέπει $r_1 + r_2 = S$. Άρα προκύπτει από τις δύο σχέσεις ότι:

$$2r_1 = S + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow r_1 = \frac{S}{2} + \frac{\lambda}{12}$$

Άρα βρίσκεται σε απόσταση $\lambda/12$ δεξιά της μεσοκαθέτου

Β.3. Κυλινδρικό δοχείο περιέχει ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ το οποίο ισορροπεί με την ελεύθερη επιφάνεια του σε επαφή με τον ατμοσφαιρικό αέρα μέσα σε πεδίο βαρύτητας με σταθερή επιτάχυνση g. Μέσα στο υγρό ισορροπεί κυλινδρικό σώμα πυκνότητας $\rho_\sigma = \frac{\rho}{2}$, ύψους h και εμβαδού βάσης A,με την βοήθεια κατακόρυφης εξωτερικής δύναμης. Το σώμα αρχικά είναι εν μέρη βυθισμένο κατά d. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί, εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους. Αν κατά την διάρκεια της κίνησης του σώματος η στάθμη του ρευστού παραμένει σταθερή, τότε το σώμα αποκτά για πρώτη φορά την μέγιστη κινητική ενέργεια την χρονική στιγμή t_1 για την οποία ισχύει:

(β) $t_1 = \pi\sqrt{\frac{h}{8g}}$

Στο δοχείο κατά την ταλάντωση, ασκείται το βάρος και η Άνωση λόγω της διαφοράς πίεσης ανάμεσα στο πάνω και το κάτω μέρος του. Αφού σχεδιάσουμε το σώμα στην Θέση ισορροπίας. στην οποία είναι βυθμισμένο κατά d_1, έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = \rho g d_1 A$$

Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση y κάτω από την θέση ισορροπίας για την οποία θα ισχύει ότι:

$$\Sigma F = mg - \rho g(d_1 + y)A = mg - \rho g d_1 A - \rho g y A \Rightarrow \Sigma F = -\rho g A y$$

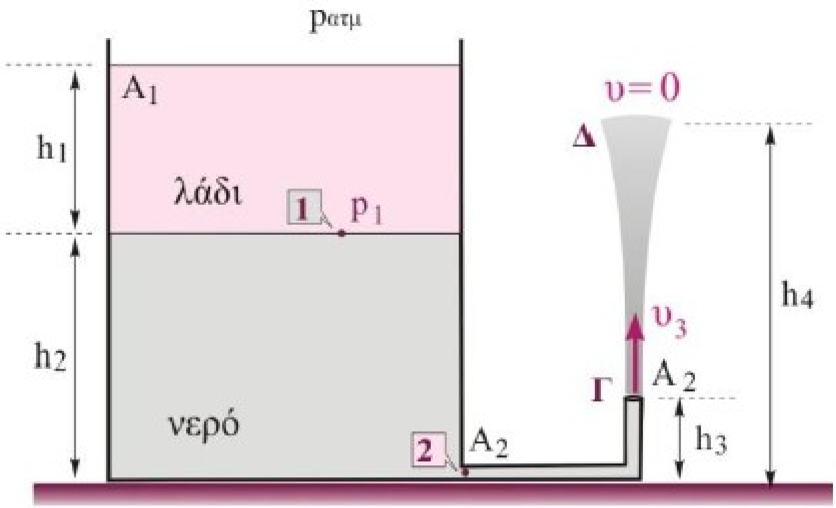
Άρα αφού υπολογίσαμε την σταθερά επαναφοράς μπορούμε να βρούμε την περίοδο της ταλάντωσης:

$$D = m\omega^2 = \rho g A \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho d A}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $m = \rho_\sigma V = \rho_\sigma A h$ και ότι ο ζητούμενος χρόνος είναι $T/4$ θα προκύψει η σωστή απάντηση

Θέμα Γ

Το δοχείο μεγάλης επιφάνειας A_1 , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, είναι ανοικτό και γεμάτο με νερό σε σταθερό ύψος $h_2 = 50cm$, ενώ πάνω από το νερό υπάρχει στρώμα λαδιού ύψους $h_1 = 40cm$. Από τον πυθμένα του πλευρικού τοιχώματος του δοχείου εξέρχεται λεπτός σωλήνας σταθερής διατομής $A_2 = 1cm^2$.Ο σωλήνας αρχικά είναι οριζόντιος και στη συνέχεια κάμπτεται, ώστε να γίνει κατακόρυφος προς τα πάνω. Το άνοιγμα του σωλήνα βρίσκεται σε ύψος $h_3 = 20cm$ πάνω από το επίπεδο του πυθμένα του δοχείου και από εκεί το νερό εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_3 . Η διατομή A_2 είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου A_1 . Να υπολογίσετε:



Γ.1 Την πίεση στο σημείο 1, στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού – νερού

$$P_1 = P_{atm} + \rho_\lambda g h_1 = 103,6 \cdot 10^3 N/m^2$$

Γ.2 Την ταχύτητα υ_3 καθώς και την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στο σημείο 2 του σωλήνα που βρίσκεται αμέσως μετά την έξοδο του νερού από το δοχείο.

Εφαρμόζω Bernoulli πάνω σε μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 3. Επειδή η διατομή A_2 είναι πολύ μικρή σε σχέση με *την επιφάνεια του δοχείο θο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα στο σημείο 1 είναι μηδέν. Επίσης η πίεση στο σημείο 3 είναι ίση με την ατμοσφαιρική.*

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 + \rho_\nu g h_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3^2 + \rho_\nu g h_3 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 = 6,6 \cdot 10^3 \frac{J}{m^3}$$

Άρα η ταχύτητα θα είναι: $\upsilon_3 = \sqrt{13,2} = 3,6 m/s$

Γ.3 Το ύψος που θα φτάσει το νερό, από τον πυθμένα του δοχείου.

Εφαρμόζουμε Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το σημείο 1 μέχρι το σημείο 4 στο οποίο η ταχύτητα θα είναι μηδέν αφού είναι το μέγιστο ύψος και η πίεση ίση με την ατμοσφαιρική.

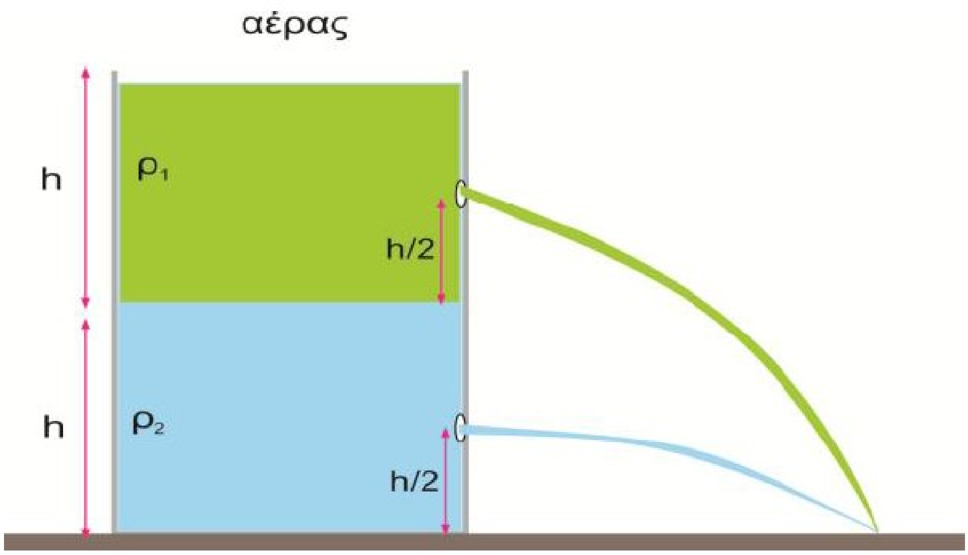
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 + \rho_\nu g h_2 = P_3 + \rho_\nu g h_4 \Rightarrow h_4 = 0,86m$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε τα δύο υγρά, καθώς και τον οριζόντιο σωλήνα (από την θέση 2 και μετά) και τοποθετούμε φελλό στη θέση 2.Γεμίζουμε ξανά το δοχείο με δυο υγρά άγνωστων πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2 πάχους h το καθένα. Ανοίγουμε δυο οπές στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου στην ίδια κατακόρυφο και σε αποστάσεις$\frac{h}{2}$ από την ελεύθερη επιφάνεια κάθε υγρού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η διατομή των οπών είναι πολύ μικρότερη από την διατομή της βάσης του δοχείου.

Γ.4 Ποία σχέση συνδέει τις πυκνότητες των δύο υγρών ώστε οι φλέβες των δύο υγρών να έχουν το ίδιο βεληνεκές·

Γενικά για τον υπολογισμό του βεληνεκούς για φλέβα ρευστού που ξεκινά από οπή σε ύψος y με ταχύτητα εκροής υ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής:

$$S = \upsilon t = \upsilon \sqrt{\frac{2y}{g}}$$



Στην δική μας περίπτωση οι φλέβες ρευστού ξεκινούν από διαφορετικά ύψη $y_1 = \frac{3h}{2}$ *και* $y_2 = \frac{h}{2}$ *με ταχύτητες* υ_1 *και* υ_2

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{3}\upsilon_1 \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας Βερνουλλι από την επιφάνεια του πάνω ρευστού μέχρι την πάνω οπή προκύπτει:

$$P_{atm} + \rho_1 g\frac{h}{2} = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \tag{2}$$

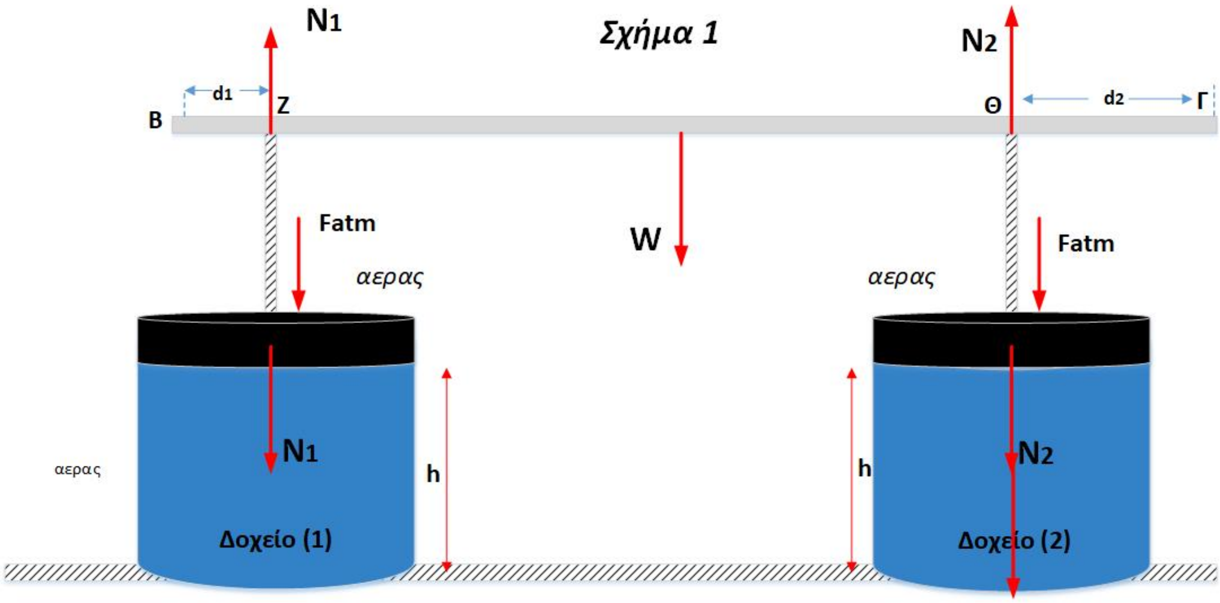
Εφαρμόζοντας Bernoulli από την διαχωριστική επιφάνεια των δύο ρευστών μέχρι την κάτω οπή προκύπτει:

$$P + \rho_2 g\frac{h}{2} = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_2\upsilon_2^2 \Rightarrow P_{atm} + \rho_1 g\frac{h}{2} + \rho_2 g\frac{h}{2} = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_2\upsilon_2^2 \tag{3}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις θα προκύψει ότι $\rho_1 = \rho_2$

Θέμα Δ

Στο Σχήμα 1 φαίνονται δύο όμοια κυλινδρικά δοχεία (1) και (2) που περιέχουν νερό και τα οποία κλείνουν με εφαρμοστό αβαρές έμβολο εμβαδού $A = 400cm^2$ που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Τα δύο δοχεία βρίσκονται στο έδαφος και τα έμβολα βρίσκονται στο ίδιο ύψος $h = 2m$ από τη βάση του κάθε δοχείου. Στο κέντρο κάθε εμβόλου έχει προσαρμοστεί κατακόρυφη αβαρής ράβδος, ενώ στα άκρα Ζ και Θ των δύο αβαρών ράβδων ακουμπά λεπτή, ομογενής και άκαμπτη ράβδος ΒΓ , μήκους $L = 2m$ και μάζας $M = 500kg$ η οποία ισορροπεί ακίνητη σε οριζόντια θέση. Η απόσταση ΘΓ ισούται με $d_2 = 0,6m$ και η πίεση στη βάση του δοχείου (1) είναι ίση με $P_1 = 1,7 \cdot 10^5 Pa$. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό.



Δ.1 Να υπολογίσετε την απόσταση $d_1 =$ ΒΖ.

Πάνω στο έμβολο του δοχείου 1 ασκείται μια δύναμη N_1 από την κάθετη ράβδο, η δύναμη από την ατμοσφαιρική πίεση και η δύναμη από το υγρό, αφού το έμβολο ισορροπεί θα προκύψει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + P_{atm}A = PA \Rightarrow N_1 + P_{atm} = (P_1 - \rho g h)\, A \Rightarrow N_1 = 2000N$$

Για την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg \Rightarrow N_2 = 3000N$$

$$\Sigma\tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow -Mg\left(\frac{L}{2} - d_1\right) + N_2\left(L - d_1 - d_2\right) \Rightarrow d_1 = 0,4m$$

Δ.2 Να υπολογίσετε την πίεση στη βάση του δοχείου (2).

Το έμβολο του δοχείου 2 θα δέχεται αντίστοιχες δυνάμεις με το έμβολο του δοχείου 1 και θα ισορροπεί. Άρα για την πίεση κάτω από το έμβολο προκύπτει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_2 + P_{atm}A = P'A \Rightarrow P' = P_{atm} + \frac{N_2}{A}$$

Στην βάση του δοχείου η πίεση θα είναι:

$$P_2 = P' + \rho gh = P_{atm} + \frac{N_2}{A} + \rho gh = 1,95 \cdot 10^5 Pa$$

**Οι δυνάμεις που ασκούνται από τις κατακόρυφους ράβδους στα έμβολα και στην δοκό είναι ίσες αφού οι κατακόρυφες ράβδοι είναι αβαρής.*

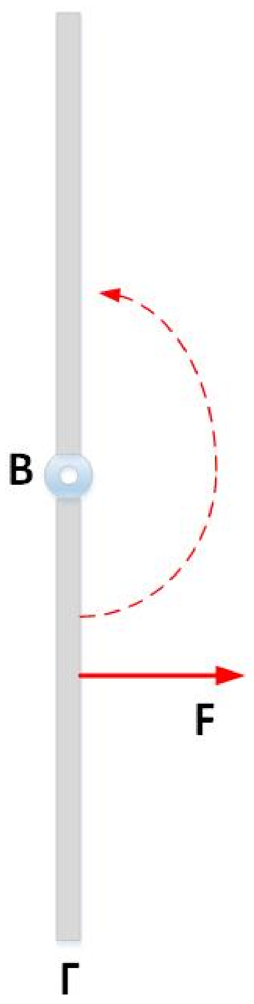
Στην συνέχεια αφαιρούμε την ράβδο ΒΓ από την παραπάνω διάταξη και στερεώνουμε το άκρο Β σε άρθρωση, γύρω από την οποία μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές (Σχήμα 2). Ασκούμε στο μέσο Κ της ράβδου σταθερή κάθετη σε αυτή δύναμη $\vec{F}$ και την περιστρέφουμε, μέχρι το άκρο Γ να διαγράψει τροχιά ημικυκλίου φτάνοντας στην ανώτερη θέση χωρίς ταχύτητα. Στην παραπάνω θέση καταργώ την δύναμη αυτή.

Δ.3 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F.

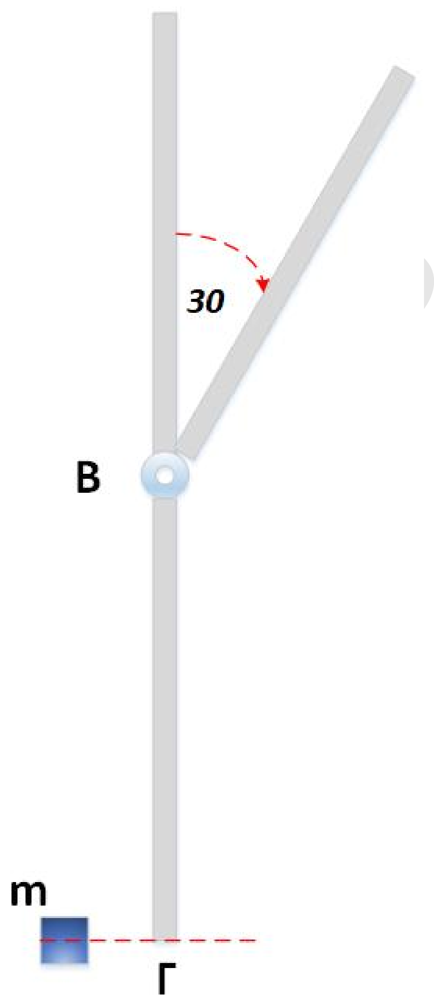
Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την περιστροφή της ράβδου

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - 0 = F\frac{L}{2}\pi - MgL \Rightarrow F = \frac{10^4}{\pi}N$$

Σχήμα 2



Σχήμα 3



Από την παραπάνω θέση (Σχήμα 3) δίνω μια μικρή ώθηση στην ράβδο με αποτέλεσμα να αρχίσει να περιστρέφεται στην φορά των δεικτών του ρολογιού.

Δ.4 Να βρεθεί η επιτρόχιος επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου όταν έχει περιστραφεί κατά 30^o από την αρχική της θέση.

Εφαρμόζω ΘΝΣΚ, αφού πρώτα υπολογίσω με Steiner την ροπή αδράνειας της ράβδου.

$$\Sigma\tau_{(B)} = I_{(B)}\alpha_\gamma \Rightarrow Mg\frac{L}{2}\eta\mu(30^o) = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{15}{4}rad/s^2$$

Άρα η επιτρόχιος επιταχυνση του κέντρου μάζας θα είναι:

$$\alpha = \alpha_\gamma \frac{L}{2} = \frac{15}{4} m/s^2$$

Δ.5 Όταν η ράβδος διέρχεται από την κατώτερη θέση της συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m = 100kg$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$ της οποίας η διεύθυνση βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει το κέντρο μάζας του σώματος με το άκρο Γ της ράβδου. Εξαιτίας της κρούσης το σύνολο της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα. Να βρεθεί η κατεύθυνση και το μέτρο της $\vec{\upsilon_o}$

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κάθοδο της ράβδου

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_{(B)} \omega^2 = MgL \Rightarrow \omega = \sqrt{30} rad/s$$

Εξαιτίας της κρούσης το σύνολο της ενέργειας γίνεται θερμότητα, άρα το σύστημα ακινητοποιείται. Για την κρούση εφαρμόζω Αρχη Διατήρησης της Στροφορμής:

$$I_{(B)}\omega - m\upsilon_o L = 0 \Rightarrow \upsilon_o = \frac{10\sqrt{30}}{3} m/s$$

Επιμέλεια: *Καραδημητρίου Μιχάλης*