ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2016-2017

Θέμα 1ο

1. **α.**
2. **β.**
3. **γ.**
4. **δ.**
5. **α. Λάθος.**
   β. Σωστό.
   γ. Σωστό.
   δ. Λάθος.
   ε. Σωστό.

Θέμα 2ο

1. **Σωστή απάντηση είναι η γ.**

Εφόσον το σημείο Κ είναι αρχικά κοιλία, ικανοποιείται η σχέση: $x_K = N\dfrac{\lambda}{2}$.

Αλλάζοντας τη συχνότητα δεν αλλάζει η ταχύτητα διάδοσης των αρχικών κυμάτων. Επομένως:

$$\upsilon_\delta = \upsilon_\delta{'} \Rightarrow f \cdot \lambda = \frac{f}{2} \cdot \lambda{'} \Rightarrow \lambda{'} = 2\lambda$$

Ταυτόχρονα, δεν αλλάζει και η θέση του σημείου Κ.
Το νέο πλάτος ταλάντωσης του σημείου Κ είναι:

$$A_K = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_\kappa}{\lambda{'}}\right| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi \cdot N\dfrac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(N\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

Για N = 0, Ακ = 2Α.

Για N = 1, Ακ = 0

Για N = 2, Ακ = 2Α.

Δηλαδή το σημείο Κ μετά την αλλαγή της συχνότητας θα είναι είτε κοιλία είτε δεσμός.

Σχόλιο: *Για να ξέραμε με ακρίβεια αν το σημείο Κ γίνεται δεσμός ή κοιλία θα έπρεπε να γνωρίζουμε ακριβώς τη θεση του σημείου Κ, πληροφορία που εδώ δεν μας δίνεται καθώς αναφέρεται ότι το σημείο Κ είναι γενικά μια κοιλία του στάσιμου κύματος.*

2. **Σωστή απάντηση είναι η α.**

Ταλάντωση $Σ_1$: Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση μόνο της δύναμης του ελατηρίου και του βάρους. Επομένως ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg \Rightarrow k\Delta L_1 = mg \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{mg}{k}$$

Επειδή το σώμα έρχεται στη θέση φυσικού μήκους και αφήνεται στη συνέχεια ελεύθερο θα ισχύει: $A_1 = \Delta L_1$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του $Σ_1$ είναι: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του $Σ_1$ είναι:

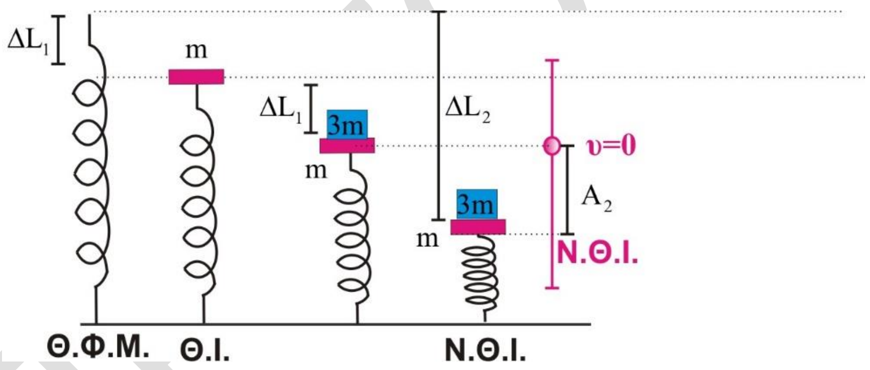
$$\upsilon_{max,1} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{mg}{k} \Rightarrow \upsilon_{max,1} = \sqrt{\frac{mg^2}{k}} \quad (1)$$

Ταλάντωση $Σ_1$, $Σ_2$: Το σύστημα ξεκινάει την ταλάντωσή του από ακραία θέση. Για τη νέα θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συστήματος θα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}{}' = (m+3m)g \Rightarrow k\Delta L_2 = 4mg \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{4mg}{k}$$

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, είναι:

$A_2 = \Delta L_2 - 2A_1 = \dfrac{4mg}{k} - \dfrac{2mg}{k} = \dfrac{2mg}{k}$



Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστηματος είναι: $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{4m}}$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$\upsilon_{max,2} = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k}{4m}} \cdot \frac{2mg}{k} \Rightarrow \upsilon_{max,2} = \sqrt{\frac{mg^2}{k}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\upsilon_{max,2} = \upsilon_{max,1}$

3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Λόγω της ελαστικής κρούσης, οι ταχύτητες που αποκτούν τα δύο σώματα μετά την κρουση είναι ίσες με:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Επειδή $m_1 < m_2$ το σώμα m_1 μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.
Πάμε να δούμε τώρα τη συχνότητα που «αντιλαμβάνεται» το σώμα m_1 λόγω της ανάκλασης από τον τοίχο.

1η φάση: Ο τοίχος λειτουργεί ως ακίνητος παρατηρητής που «αντιλαμβάνεται» ήχο συχνότητας f_φ από την πηγή, που τον πλησιάζει κινούμενη με ταχύτητα υ_2', και για τον οποίο ισχύει:

$$f_\phi = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_2'} f_s$$

2η φάση: Μετά την ανάκλαση του ήχου στον τοίχο, ο τοίχος λειτουργεί ως ακίνητη πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας f_φ προς παρατηρητή που απομακρύνεται με ταχύτητα υ_1'. Η συχνότητα που «αντιλαμβάνεται» ο παρατηρητής είναι:

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_1'}{\upsilon} f_\phi = \frac{\upsilon - \upsilon_1'}{\upsilon} \cdot \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_2'} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_1'}{\upsilon - \upsilon_2'} f_s$$

Όμως η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι ίση με f_s, οπότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει $\upsilon_1' = \upsilon_2'$ (κατά μέτρο).
Άρα για τον ζητούμενο λόγο των μαζών θα προκύψει:

$$\upsilon_1' = -\upsilon_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 - m_2 = -2m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

Θέμα 3ο

α. Ο όγκος της κυλινδρικής δεξαμενής είναι ίσος με:

$$V = A \cdot H = \left(\pi R^2\right) \cdot H = \left[\pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\right] \cdot 3\ m^3 = 12\ m^3$$

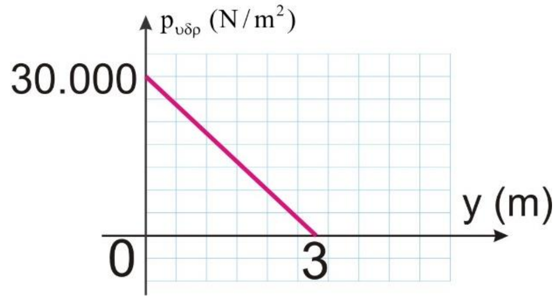
Ο χρόνος Δt γεμίσματος της δεξαμενής υπολογίζεται από τον ορισμό της παροχής. Είναι:

$$\Pi_1 = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{\Pi_1} = \frac{12\ m^3}{6 \cdot 10^{-3}\ m^3/s} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 2.000\ s}$$

β. Για ένα τυχαίο σημείο Α εντός του υγρού, που απέχει απόσταση y από τον πυθμένα της δεξαμενής, η υδροστατική πίεση θα δίνεται από τη σχέση:

$$p_{\upsilon\delta\rho} = \rho g(H - y) = 1000 \cdot 10(3 - y) \Rightarrow p_{\upsilon\delta\rho} = 30.000 - 10.000y\ \text{(S.I.)}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα.



γ. Η τάπα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}$, $\vec{F}_{ατμ}$ και $\vec{F}_{υγρ}$. Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{υγρ} = F + F_{ατμ}$$

Διαιρώντας με το εμβαδόν A_1 της τάπας προκύπτει:

$$\frac{F_{υγρ}}{A_1} = \frac{F}{A_1} + \frac{F_{ατμ}}{A_1} \Rightarrow p_1 = \frac{F}{A_1} + p_{ατμ} \ (1)$$

Για την πίεση στην πλευρά της τάπας που είναι σε επαφή με το υγρό ισχύει:

$$p_1 = p_{ατμ} + \rho g(H - y_1) \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το μέτρο της ζητούμενης δύναμης F. Είναι:

$$p_{ατμ} + \rho g(H - y_1) = p_{ατμ} + \frac{F}{A_1} \Rightarrow F = A_1 \rho g(H - y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{3} \cdot 10 \cdot (3 - 1,2)\,N \Rightarrow F = 3,6\ N$$

δ. Εφόσον η στάθμη του νερού μέσα στη δεξαμενή μένει σταθερή, θα πρέπει η παροχή εισόδου και η παροχή εξόδου να είναι ίσες. Δηλαδή:

$$\Pi_{B_2} = \Pi_{οπής} \Rightarrow \Pi_{B_2} = A_1 \cdot \upsilon_{\Gamma}$$

Αρκεί να βρούμε την ταχύτητα υ_Γ εκροής του ρευστού στο σημείο Γ. Εφαμόζουμε εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Γ και ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή. Είναι:

$$p_A + \rho g(H - y_1) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_\Gamma + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow p_{atm} + \rho g(H - y_1) + 0 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(H - y_1)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (3 - 1,2)}\ m/s \Rightarrow \upsilon_\Gamma = 6\ m/s$$

Επομένως η παροχή της βρύσης είναι:

$$\Pi_{B_2} = \left(2 \cdot 10^{-4} \cdot 6\right) m^3/s \Rightarrow \Pi_{B_2} = 12 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$$

ε. Η φλέβα κάνει οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η χρονική διάρκεια της πτώσης, Δt, εξαρτάται από το ύψος εκτόξευσης, $d = y_1 + h_1 = 1,8\ m$. Το νερό θα φτάσει στο έδαφος στο σημείο Δ, μετά από χρονικό διάστημα Δt για το οποίο ισχύει:

$$d = \frac{1}{2} g \Delta t^{\,2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8}{10}} \Rightarrow \Delta t = 0,6\ s$$

Το βεληνεκές της φλέβας του νερού είναι:

$$x_{max} = \upsilon_\Gamma \cdot \Delta t = \left(6 \cdot 0,6\right) m \Rightarrow x_{max} = 3,6\ m$$

Το εμβαδόν της φλέβας του νερού στο σημείο Δ θα βρεθεί από την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Γ και Δ. Είναι:

$$\Pi_\Gamma = \Pi_\Delta \Rightarrow \Pi_\Gamma = A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta \ (1)$$

Η ταχύτητα της φλέβας του νερού στο σημείο Δ είναι:

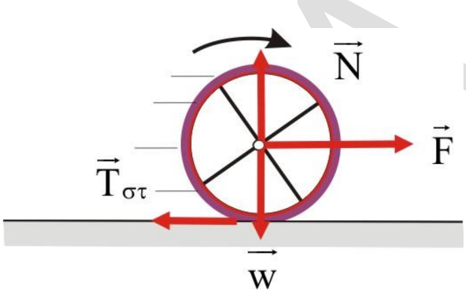
$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_\Gamma^2 + (gt)^2} = \left(\sqrt{6^2 + (0,6\cdot 10)^2}\right) m/s \Rightarrow \upsilon_\Delta = 6\sqrt{2}\ m/s$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει το ζητούμενο εμβαδόν.

$$\Pi_\Gamma = A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta \Rightarrow A_\Delta = \frac{\Pi_\Gamma}{\upsilon_\Delta} = \frac{12\cdot 10^{-4}}{6\sqrt{2}}\ m^2 \Rightarrow A_\Delta = \sqrt{2}\cdot 10^{-4} m^2\ (1)$$

Θέμα 4ο

α. Στον τροχό εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ στον άξονα της κίνησης ασκείται η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. (Ο σχεδιασμός της στατικής τριβής γίνεται με κριτήριο την εξασφάλιση της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης του τροχού αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει). Οι δυνάμεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Εφαρμόζουμε τους νόμους για κάθε κίνηση.

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = M\alpha_{cm}\ (1)$$

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = MR^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = M\alpha_{cm}\ (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$F = 2T_{\sigma\tau} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{F}{2} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 5 + 2x\ (S.I.)$$

Ποιες όμως τιμές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τον άξονα x;

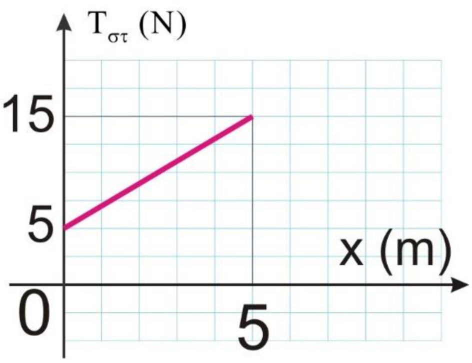
Ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει μέχρι που η στατική τριβή αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της. Δηλαδή μέχρι:

$$T_{\sigma\tau} \le T_{\sigma\tau,max} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le \mu_{\sigma\tau}N \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le \mu_{\sigma\tau}mg \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le \frac{3}{8}\cdot 40\ N \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le 15\ N$$

Επομένως ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει μέχρι:

$$T_{\sigma\tau} \le 15\ N \Rightarrow 5 + 2x \le 15 \Rightarrow x \le 5\ m$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα.



β. Για τη χρονική διάρκεια από 0 ως t_1 ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, άρα σύμφωνα με τη συνθήκη κύλισης $x_{cm} = R\Delta\theta$, για τη γωνία στροφής θα ισχύει:

$$x_{cm} = R\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{x_{cm}}{R} = \frac{5\,m}{0,5\,m} \Rightarrow \Delta\theta = 10\,rad$$

Ο ζητούμενος αριθμός περιστροφών θα είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{5}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

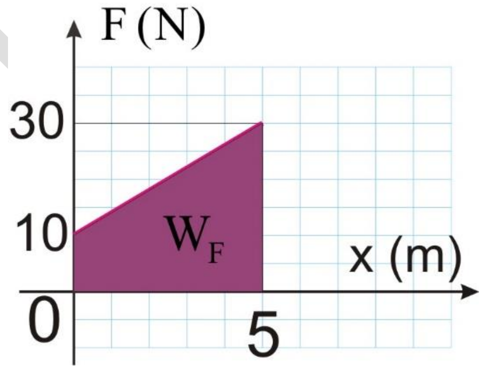
γ. Σε όλη της διάρκεια της κύλισης χωρίς ολίσθηση του τροχού, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας αλλά και η γωνιακή επιτάχυνση δεν είναι σταθερές. Επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τύπου κίνησης (και κατά συνέπεια δεν μπορεί να βρεθεί και η χρονική στιγμή t_1…). Ο υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας του τροχού θα υπολογιστεί με το θέωρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μέχρι τη χρονική στιγμή t_1. Είναι:

$$\text{ΘΜΚΕ: } \Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_{Tστ} \ (1)$$

Όπου: $K_{τελ} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 = \frac{1}{2}\left(MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 = M\upsilon_{cm}{}^2$

$K_{αρχ} = 0$ (ο τροχός αρχικά ακίνητος)

$W_{Tστ} = 0$ (λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση)



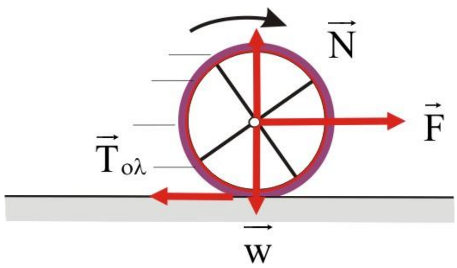
Για το έργο της δύναμης *F* εφόσον είναι μεταβλητή, κατασκευάζουμε το διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης και υπολογίζουμε το εμβαδόν από x = 0 ως x = 5 m. Είναι:

$$E_{μβ} = W_F = \frac{10+30}{2}\cdot 5\,J \Rightarrow W_F = 100\,J$$

Οπότε με αντικατάσταση στο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα προκύψει:

$$(1) \Rightarrow M\upsilon_{cm}{}^2 - 0 = 100 \Rightarrow 4\upsilon_{cm}{}^2 = 100 \Rightarrow \upsilon_{cm} = 5\,m/s$$

δ. Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπιστεί κατά 6 m > 5 m, ο τροχός πλέον δεν κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε στον τροχό δεν ασκείται η στατική τριβή αλλά η τριβή ολίσθησης για την οποία ισχύει: $T_{ολ} = \mu N = 15$ N.



Τι είδους κινήσεις θα κάνει τώρα ο τροχός;;;

Λόγω της ύπαρξης της μεταβλητής δύναμης *F* η κίνηση του τροχού μεταφορικά θα εξακολουθεί να είναι επιταχυνόμενη (αλλά όχι ομαλά).

Αντίθετα όμως η στροφική κίνηση είναι επιταχυνόμενη αλλά πλέον ομαλά αφού η τριβή ολίσθησης που θα ασκείται στον τροχό θα είναι σταθερή. Έτσι για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού θα ισχύει:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau = T_{o\lambda}R = 15\ N \cdot 0,5\ m \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = 7,5\ N \cdot m$$

ε. Και ενώ για την κύλιση χωρίς ολίσθηση δεν μπορούσαμε να βρούμε ή να χρησιμοποιήσουμε χρόνο, τα πράγματα τώρα αλλάζουν.

Για την ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση θα είναι:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{o\lambda}R = MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{T_{o\lambda}}{MR} = \frac{15}{4 \cdot 0,5}\ rad/s^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 7,5\ rad/s^2$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι:

$$\upsilon_{cm} = \omega_o R \Rightarrow \omega_o = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{5}{0,5}\ rad/s \Rightarrow \omega_o = 10\ rad/s$$

Επομένως τη χρονική στιγμή t_1 + 2 s, η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t = (10 + 7,5 \cdot 2)\ rad/s \Rightarrow \omega = 25\ rad/s$$

Και κατά συνέπεια και η ζητούμενη στροφορμή του τροχού θα έχει μέτρο ίσο με:

$L = I\omega = MR^2\omega = (4 \cdot 0,5^2) \cdot 25\ kg \cdot m^2/s \Rightarrow L = 25\ kg \cdot m^2/s$

Επιμέλεια
Νεκτάριος Πρωτοπαπάς
nprotopapas@avgouleaschool.gr