ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2017-2018

Θέμα 1ο

1. **α.**
2. **γ.**
3. **β.**
4. **β.**
5. **α. Λάθος.**
   β. Λάθος.
   γ. Σωστό.
   δ. Λάθος.
   ε. Σωστό.

Θέμα 2ο

1. **Σωστή απάντηση είναι η γ.**

• Προκειμένου το σημείο Σ να είναι σημείο ενίσχυσης θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\left|r_1 - r_2\right| = N\lambda$.

Όμως για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει $\upsilon_\delta = \lambda f$ ή $\upsilon_\delta = \lambda/T$, οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\left|r_1 - r_2\right| = N \cdot (\upsilon_\delta \cdot T) \Rightarrow T = \frac{\left|r_1 - r_2\right|}{N \cdot \upsilon_\delta}$$

Η μέγιστη περίοδος ταλάντωσης των πηγών ώστε το σημείο Σ να είναι σημείο ενίσχυσης προκύπτει για τη μικρότερη δυνατή τιμή του Ν, δηλαδή για Ν = 1 (δεν μπορεί το Ν να πάρει την τιμή μηδέν!).

Επομένως: $T_{1,max} = \dfrac{\left|r_1 - r_2\right|}{\upsilon_\delta}$ (1)

• Προκειμένου το σημείο Σ να είναι σημείο απόσβεσης θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\left|r_1 - r_2\right| = \left(2N+1\right)\dfrac{\lambda}{2}$.

Όμως για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει $\upsilon_\delta = \lambda f$ ή $\upsilon_\delta = \lambda/T$, οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\left|r_1 - r_2\right| = \left(2N+1\right) \cdot \left(\frac{\upsilon_\delta \cdot T}{2}\right) \Rightarrow T = \frac{2\left|r_1 - r_2\right|}{(2N+1) \cdot \upsilon_\delta}$$

Η μέγιστη περίοδος ταλάντωσης των πηγών ώστε το σημείο Σ να είναι σημείο απόσβεσης προκύπτει για τη μικρότερη δυνατή τιμή του Ν, δηλαδή για Ν = 0.

Επομένως: $T_{2,max} = \dfrac{2 \cdot \left|r_1 - r_2\right|}{\upsilon_\delta}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\frac{T_{1,max}}{T_{2,max}} = \frac{1}{2}$$

2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Αρχική ταλάντωση Σ_1: Βρίσκουμε αρχικά το μέτρο της ταχύτητας υ_1 που θα έχει το Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα Σ_2 (θέση $|x| = d$) εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του. Είναι:

$$E_T = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}k\left(2d\right)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{3kd^2}{m}} \Rightarrow \upsilon_1 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Ελαστική κρούση: Λόγω της ελαστικής κρούσης των σωμάτων με ίδιες μάζες, γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων. Έτσι το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται και το σώμα Σ_2 ξεκινά να ταλαντώνεται με ταχύτητα $\upsilon_2 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$.

Νέα ταλάντωση Σ_1: Αφού το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται μετά την κρούση, αυτό σημαίνει ότι θα ξεκινήσει από ακραία θέση. Επομένως για το πλάτος του θα ισχύει:

$$A_1 = d \quad (1)$$

Ταλάντωση Σ_2: Αφού το σώμα Σ_2 ξεκινάει την ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα $\upsilon_2 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$, η ταχύτητα αυτή θα αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του. Επομένως για το πλάτος του A_2 θα ισχύει:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{max} \Rightarrow d\sqrt{\frac{3k}{m}} = \omega \cdot A_2 \Rightarrow d\sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A_2 \Rightarrow A_2 = d\sqrt{3} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Για τη γωνιακή συχνότητα ω_1 της πρώτης ταλάντωσης ισχύει:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 202\pi \text{ rad/s}.$$

Η χρονική στιγμή 0,75 s που δίνεται στο διάγραμμα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που μηδενίζεται το πλάτος για 2^{η} φορά.

Για τις χρονικές στιγμές μηδενισμού του πλάτους ισχύει:

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right| \xrightarrow{A'=0} \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right| = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = \left(2N + 1\right)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\left(2N + 1\right)\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

Επειδή όμως μας δίνεται ο χρόνος μηδενισμού του πλάτους για 2^{η} φορά θα είναι N = 1.

Επομένως:

$$t = \frac{3\pi}{\omega_1 - \omega_2} \Rightarrow 0,75 = \frac{3\pi}{\omega_1 - \omega_2} \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 4\pi \Rightarrow \omega_2 = 198\pi \ \ \text{rad/s}.$$

Άρα η συχνότητα της $2^{ης}$ ταλάντωσης είναι $\omega_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow f_2 = 99$ Hz.

Η συχνότητα της περιοδικής κίνησης είναι ίση με $f = \frac{f_1 + f_2}{2} = 100 \text{ Hz}$ ενώ η συχνότητα του διακροτήματος είναι ίση με $f_2 = f_1 - f_2 = 2$ Hz.
Δηλαδή διαφέρουν μεταξύ τους κατά 98 Hz.

Θέμα 3ο

α. Ο όγκος V του νερού που εισήλθε στη δεξαμενή υπολογίζεται από τον ορισμό της παροχής. Είναι:

$$\Pi_1 = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow V = \Pi \cdot \Delta t = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \cdot 200 \text{ s} \Rightarrow V = 8 \text{ m}^3$$

Για το ύψος H του νερού μέσα στη δεξαμενή θα είναι:

$$V = A \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{A} = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{8}{\pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2} = 2 \text{ m}$$

Επομένως η πίεση που θα επικρατεί στον πυθμένα της δεξαμενής μετά το γέμισμά της μέχρι το ύψος H θα είναι:

$$\mathbf{p_{πυθμ} = p_{atm} + \rho g H = 120.000 \ N/m^2}$$

β. Η ισχύς της αντλίας εκφράζει την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που παρέχει η αντλία στο νερό. Η ενέργεια που προσφέρεται από την αντλία έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας του νερού σε σχέση με αυτή που είχε όταν βρισκόταν μέσα στο πηγάδι.
Η υψομετρική διαφορά $H_{ολ}$ ανάμεσα στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο πηγάδι και στο ανοικτό άκρο του σωλήνα είναι: $H_{ολ} = H_1 + h_1 + H = 7$ m.
Επομένως:

$$P = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{\Delta U + \Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot g \cdot H_{ολ}}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon^2}{\Delta t} = \frac{(\rho \cdot \Delta V) \cdot g \cdot H_{ολ}}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2}(\rho \cdot \Delta V) \cdot \upsilon^2}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \rho \cdot \Pi \cdot g \cdot H_{ολ} + \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \cdot \upsilon^2 \Rightarrow P = \left(1.000 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 7\right) \text{Watt} + \left(\frac{1}{2} \cdot 1.000 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2^2\right) \text{Watt} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P = 2.800 \text{ W} + 80 \text{ W} \Rightarrow$ **$P = 2.880$ W**

γ. Εφόσον η στάθμη του νερού μέσα στη δεξαμενή μένει σταθερή, θα πρέπει η παροχή εισόδου και η παροχή εξόδου να είναι ίσες. Δηλαδή:

$$\Pi_{B_2} = \Pi_{οπής} \Rightarrow \Pi_{B_2} = A_E \cdot \upsilon_E$$

Αρκεί να βρούμε την ταχύτητα υ_E εκροής του νερού στο σημείο Ε. Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli για το σημείο Ε και ένα σημείο της επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή. Είναι:

$$p_A + \rho g(H - h_2) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_E + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 \Rightarrow p_{atm} + \rho g(H - h_2) + 0 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_E = \sqrt{2g(H - h_2)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot(2-1,2)}\ m/s \Rightarrow \upsilon_E = 4\ m/s$$

Επομένως η παροχή της βρύσης είναι:

$$\Pi_{B_2} = \left(0,1\cdot 10^{-4}\cdot 4\right) m^3/s \Rightarrow \Pi_{B_2} = 0,4\cdot 10^{-4}\ m^3/s$$

δ. Η φλέβα κάνει οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η χρονική διάρκεια της πτώσης, Δt, εξαρτάται από το ύψος εκτόξευσης, $d = h_1 + h_2 = 5$ m. Το νερό θα φτάσει στο έδαφος στο σημείο Ζ, μετά από χρονικό διάστημα Δt για το οποίο ισχύει:

$$d = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}}\ s \Rightarrow \Delta t = 1\ s$$

Το βεληνεκές της φλέβας του νερού είναι:

$$x_{max} = \upsilon_E\cdot\Delta t = \left(4\cdot 1\right) m \Rightarrow x_{max} = 4\ m$$

ε. Για το τμήμα του νερού ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ και για το χρονικό διάστημα του ενός λεπτού, η ενέργεια που ανταλλάσσει το νερό με το περιβάλλον θα βρεθεί εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των σημείων Γ και Δ. Είναι:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon_\Gamma^2 = W_F + W_w \quad (1)$$

Όμως στα σημεία Γ και Δ ο σωλήνας έχει το ίδιο εμβαδόν διατομής, οπότε από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει για τις ταχύτητες $\upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$W_F + W_w = 0 \Rightarrow W_F = -W_w = -(-\Delta m\cdot g\cdot h_2) \Rightarrow W_F = \Delta m\cdot g\cdot h_2 \quad (2)$$

Η μάζα Δm του νερού που μετακινείται στο χρόνο $\Delta t' = 1$ min = 60 s είναι:

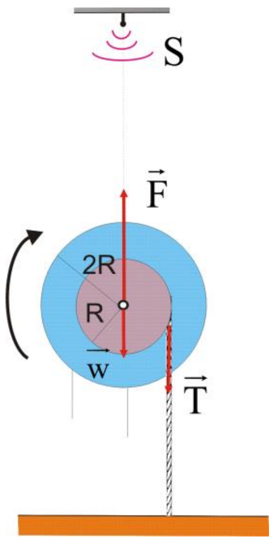
$$\Pi_E = \frac{\Delta V}{\Delta t'} \Rightarrow \Pi_E = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\Delta m}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta m = \Pi_E\cdot\rho\cdot\Delta t' = \left(0,4\cdot 10^{-4}\cdot 1.000\cdot 60\right) kg \Rightarrow \Delta m = 2,4\ kg$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει $W_F = 28,8\ J$.

Επομένως η ενέργεια που ανταλλάσσει το νερό με το περιβάλλον είναι ίση με **28,8 J.**

Σχόλιο: *Η ζητούμενη ενέργεια θα μπορούσε να βρεθεί και από τη σχέση* $W_F = \left(p_\Gamma - p_\Delta\right)\cdot\Delta V$, *αρκεί να εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli προκειμένου να προσδιορίσουμε τη διαφορά των πιέσεων μεταξύ των σημείων Γ και Δ.*

Θέμα 4ο



α. Στο στερεό εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ ασκείται η τάση του νήματος $\vec{T}$ και το βάρος του $\vec{w}$. Οι δυνάμεις αυτές φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Εφαρμόζουμε τους νόμους για κάθε κίνηση.

$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow F - T - w = M\alpha_{cm}$ (1)

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T \cdot R = MR^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T = M\alpha_{cm} \, (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

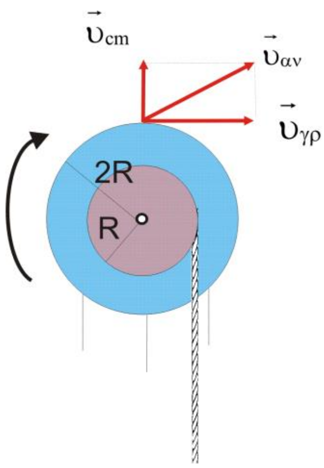
$$F - w = 2M\alpha_{cm} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm} = 2\ m/s^2}$$

β. Το νήμα που ξετυλίγεται από το μικρό δίσκο για τη χρονική διάρκεια από 0 ως t_1 δίνεται από τη σχέση $L = R\Delta\theta$, από όπου για τη γωνία στροφής θα ισχύει:

$$L = R\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{L}{R} = \frac{4}{0,2}\,\text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 20\,\text{rad}$$

Όμως $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10\ rad/s^2$.

και $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta\theta}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20}{10}}\,s \Rightarrow t_1 = 2\,s$



Το ανώτερο σημείο του στερεού, που απέχει τη χρονική στιγμή t_1 τη μεγαλύτερη απόσταση από το έδαφος, λόγω της σύνθετη κίνησης του στερεού, έχει ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης (υ_{cm}) και ταχύτητα λόγω της περιστροφικής κίνησης ($\upsilon_{\gamma\rho}$), όπως φαίνεται στο σχήμα. Για κάθε μία από αυτές ισχύουν:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\cdot t_1 = 4\ m/s$$

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega\cdot 2R = (\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1)\cdot 2R = 8\ m/s.$$

Για το μέτρο της ανώτερης ταχύτητας του στερεού θα ισχύει:

$$\upsilon_{\alpha\nu} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2}\ m/s \Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu} = 4\sqrt{5}\ m/s$$

γ. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το κέντρο μάζας του στερεού έχει μετατοπιστεί κατά:

$$x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^2\right)m = 4\,m$$

Η ενέργεια που έχει προσφερθεί στο στερεό μέχρι τότε είναι ίση με:

$$W_F = F\cdot x_{cm} = (14\cdot 4)\ J = 56\ J$$

Η κινητική ενέργεια του στερεού τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4^2\right)J + \left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}04\cdot 20^2\right)J = 16\,J$$

Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

$$\alpha\% = \frac{K}{W_F}\cdot 100\% = \frac{16}{56}\cdot 100\% \Rightarrow \alpha = \frac{200}{7}\,\%$$

δ. Μετά το κόψιμο του νήματος και την κατάργηση της δύναμης *F* το στερεό κινείται ανοδικά με την επίδραση μόνο του βάρους του, το οποίο:

• Δε δημιουργεί ροπή, οπότε το στερεό εκτελεί περιστροφικά ομαλή κίνηση.

• Επιβραδύνει μεταφορικά το στερεό.

Χρονικό διάστημα 0 – t_1 (t_1 = 2 s): Το στερεό εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση, οπότε ο δέκτης ανίχνευσης του ήχου, που πλησιάζει προς την πηγή, θα καταγράφει συχνότητα:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon}\cdot f_s = \frac{\upsilon + \alpha_{cm}t}{\upsilon}\cdot f_s \Rightarrow f_A = \frac{340 + 2t}{340}\cdot 680 \Rightarrow f_A = 680 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Χρονικό διάστημα t_1 – t_2: Το στερεό εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση, με επιβράδυνση μέτρου α_{cm} = g = 10 m/s^2, αφού κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους του.

Ο δέκτης ανίχνευσης του ήχου, που εξακολουθεί να πλησιάζει προς την πηγή, θα καταγράφει συχνότητα:

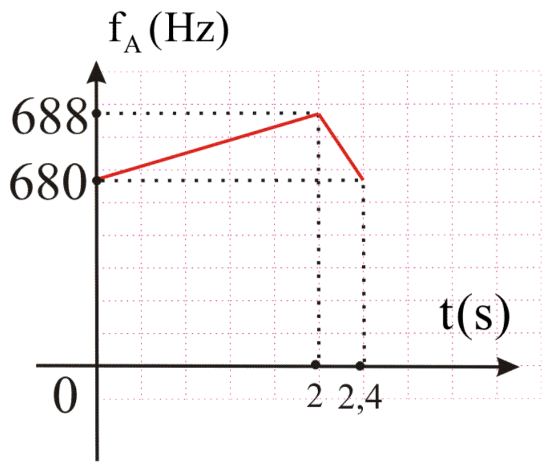
$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon}\cdot f_s = \frac{\upsilon + \left[\upsilon_o - g(t - t_1)\right]}{\upsilon}\cdot f_s \Rightarrow f_A = \frac{340 + \left[4 - 10\cdot(t-2)\right]}{340}\cdot 680 \Rightarrow f_A = 728 - 20t \text{ (S.I.)}$$

Η χρονική διάρκεια Δt της επιβραδυνόμενης κίνησης του στερεού είναι:

$\upsilon = \upsilon_o - g\cdot\Delta t \Rightarrow 0 = 4 - 10\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta t = 0{,}4$ s.

Άρα η χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με t_2 = 2 s + 0,4 s = 2,4 s

Σύμφωνα με τις παραπάνω πληροφορίες το ζητούμενο διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



ε. Επειδή η συχνότητα των 676 Hz είναι μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής fs = 680 Hz, αυτό σημαίνει ότι το στερεό έχει αρχίσει να απομακρύνεται από την πηγή. Για να συμβαίνει αυτό, το στερεό θα έχει ξεκινήσει την καθοδική του κίνηση.

Αν με $\upsilon_A{}'$ συμβολίσουμε την ταχύτητα που θα έχει τότε το κέντρο μάζας του στερεού, θα ισχύει:

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A{}'}{\upsilon} \cdot f_s \Rightarrow 676 = \frac{340 - \upsilon_A{}'}{340} \cdot 680 \Rightarrow \upsilon_A{}' = 2\ m/s$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του στερεού τότε θα είναι ίσος με:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-W_B}{\Delta t} = \frac{-m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -mg\upsilon_A{}' = -\left(1 \cdot 10 \cdot 2\right)\ J/s \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -20\ J/s$$

Επιμέλεια
Νεκτάριος Πρωτοπαπάς
nprotopapas@avgouleaschool.gr