Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Μηχανική Στερεού Σώματος

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Ένας δίσκος στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

(δ) Το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης τη στιγμή t_1 έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση που έχει η γωνιακή επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_4.

Α.2. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

(δ) ισχύει ακόμα και όταν η συνολική ροπή μεταβάλλεται με το χρόνο.

Α.3. Όταν σε έναν τροχό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής διπλασιάζουμε τη στροφορμή του, τότε η κινητική του ενέργεια

(δ) τετραπλασιάζεται

Α.4. Εκτοξεύουμε προς τα πάνω και ταυτόχρονα θέτουμε σε περιστροφή ένα νόμισμα. Για όσο χρονικό διάστημα το νόμισμα βρίσκεται στον αέρα (η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα) διατηρούνται σταθερά τα μεγέθη:

(γ) η μηχανική του ενέργεια και η στροφορμή του

Α.5.

(α) Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν ,όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής . **Σωστό**

(β) Η κίνηση ενός τροχού που κυλίεται είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης . **Σωστό**

(γ) Η στροφορμή ενός υλικού σημείου έχει τη κατεύθυνση της γραμμικής του ταχύτητας. **Λάθος**

(δ) Το συνολικό έργο της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός στερεού σώματος είναι ίσο με μηδέν. **Σωστό**

(ε) Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό ασκηθεί ένα ζεύγος δυνάμεων, αυτό θα εκτελέσει μόνο στροφική κίνηση. **Σωστό**

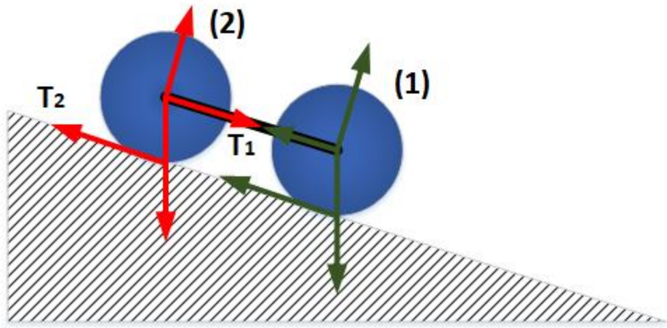
Θέμα Β

Β.1. Συνδέουμε με μια αβαρή ράβδο τα κέντρα μάζας μιας ομογενούς σφαίρας (1) και ενός ομογενούς κυλίνδρου (2) με ίσες μάζες M και ακτίνες R. Η σφαίρα και ο κύλινδρος κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν αφού αφεθούν ελεύθερα από την κορυφή κεκλιμένου κλίσης φ.

Σας δίνεται ότι οι ροπές αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι $\frac{2}{5}MR^2$ για την σφαίρα και $\frac{1}{2}MR^2$ για τον κύλινδρο. Ο λόγος των μέτρων των στατικών τριβών T_1 και T_2 που αναπτύσσονται στα δύο σώματα θα είναι:

(γ) $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{5}$$

Στα σώματα ασκούνται το βάρος η στατική τριβή, η δύμαμη από την αβαρή ράβδο και η κάθετη αντίδραση του δαπέδου. Αφού κινούνται μαζί θα έχουν την ίδια επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm}. Επίσης λόγο της κύλισης χωρίς ολίσθηση $a_{cm} - a_{\gamma\omega\nu R}$, άρα θα έχουν και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση. Εφαρμόζω για κάθε ένα σώμα τον Θεμελιώδη Νόμο της στροφικής κίνησης.

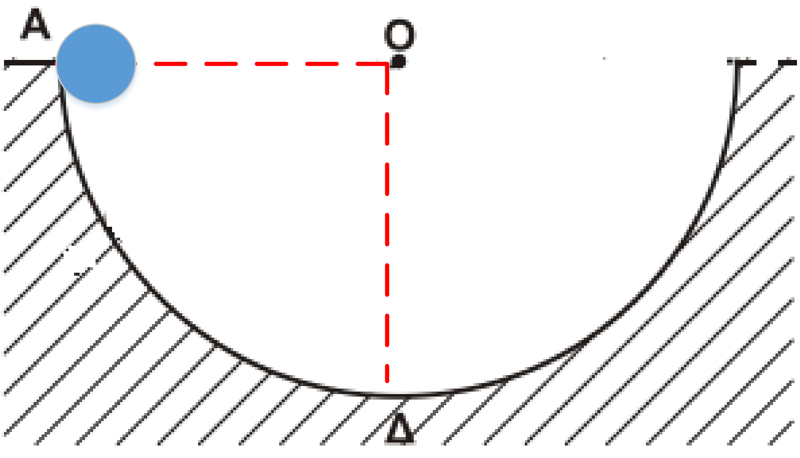


$$T_1 R = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R = \frac{2}{5} M R^2 a_{\gamma\omega\nu}$$

$$T_2 R = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2 R = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma\omega\nu}$$

Διαιρώ κατά μέλη και προκύπτει η απάντηση

B.2. Μια ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από το ανώτερο σημείο Α ενός ημικυκλικού μεταλλικού οδηγού ακτίνας $R = 8r$. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η ροπή αδράνειας ως προς τη κέντρο μάζας της ισούται με $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.



Όταν η σφαίρα διέρχεται από το κατώτερο σημείο Δ της τροχιάς της η κάθετη δύναμη που δέχεται από το ημισφαίριο έχει μέτρο:

(γ) $\frac{17}{7}mg$

Επειδή το κέντρο μάζας της σφαίρας κινείται πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R - r$ θα ισχύει ότι:

$$N - mg = F_k \Rightarrow N = m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R-r} + mg$$

Για την κάθοδο του σώματος θα εφαρμόσω το ΘΜΚΕ ώστε να υπολογίσω την ταχύτητα του κέντρου μάζας στο κατώτερο σημείο Δ. Λαμβάνω υπόψιν ότι στην κύλιση χωρίς ολίσθηση $\upsilon_{cm} = \omega r$

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = mg(R-r) \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = \frac{10gR}{8}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $N = \frac{17}{7}mg$

Β.3. Ένας απομονωμένος ομογενής αστέρας σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με αρχική κινητική ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής K_o. Ο αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσης του η ακτίνα του υποδιπλασιάζεται. Η νέα κινητική του ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής είναι ίση με K.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς σφαίρας ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.

Ο λόγος $\frac{K}{K_o}$ είναι ίσος με:

(γ) 4

Στον αστέρα κατά την συρρίκνωση του ασκούνται μόνο δυνάμεις βαρύτητας οι οποίες είναι κεντρικές, άρα η συνολική τους ροπή ως προς το κέντρο του αστέρα είναι μηδέν, έτσι η στροφορμή του θα παραμένει σταθερή και ίση με L. Ο ζητούμενος λόγος θα είναι ίσος με:

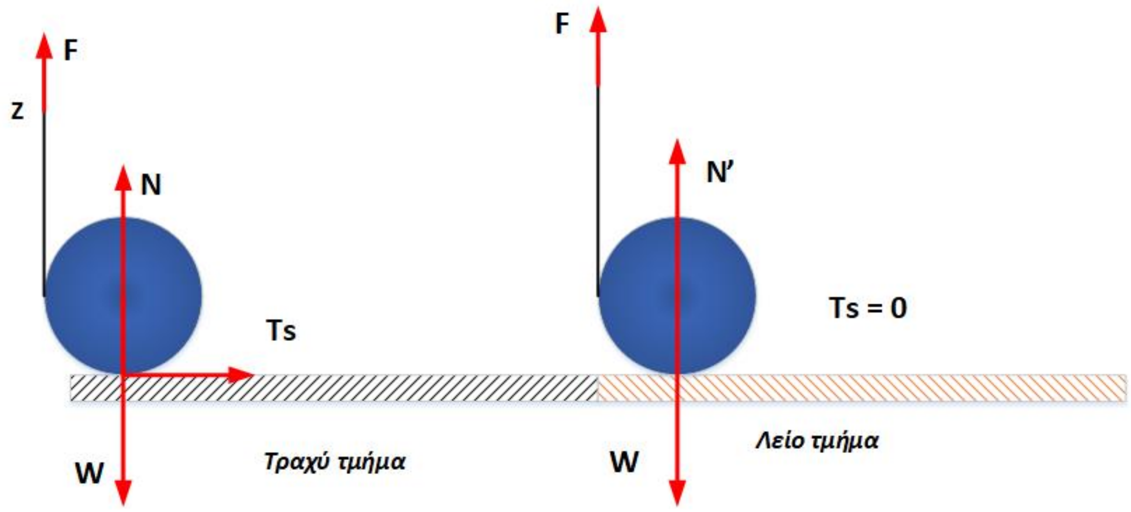
$$\frac{K}{K_o} = \frac{L^2/2I}{L_2/2I'} = \frac{I_o}{I} = \frac{\frac{2}{5}mr^2}{\frac{2}{5}mr'^2} = 4$$

** Βέβαια παραπάνω χρησιμοποιούμε την Κινητική ενέργεια που προκύπτει από:*

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$$

Θέμα Γ

Ένας λεπτός ομογενής δίσκος μάζας $M = 2kg$ και ακτίνας $R = 0,5m$ έχει τυλιγμένο στην περιφέρεια του σε πολλές στροφές αβαρές και μη εκτατό νήμα και είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε τραχύ επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή στατικής τριβής $\mu_s = \dfrac{2}{3}$. Την $t_o = 0$ ασκούμε στο ελεύθερο άκρο Ζ του νήματος κατακόρυφη δύναμη σταθερού μέτρου $F = 9N$ όπως στο σχήμα, οπότε ο δίσκος αρχίζει αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του επιπέδου με το νήμα να παραμένει συνεχώς κάθετο προς την διεύθυνση του δαπέδου. Την χρονική στιγμή t_1 που το κέντρο μάζας του δίσκου έχει μετατοπιστεί κατά $S = 1,5m$, ο δίσκος εισέρχεται σε ένα λείο τμήμα του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Γ.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου για $t < t_1$.

Εφαρμόζω τους Νόμους την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση:

$$\Sigma\tau = Ia_{\text{γων}} \Rightarrow FR - T_s R = \frac{1}{2}MR^2 a_{\text{γων}}$$

$$\Sigma F_x = Ma_{cm} \Rightarrow T_s = Ma_{cm}$$

$$a_{cm} = a_{\text{γων}R}$$

Άρα προκύπτει ότι $a_{cm} = 3m/s^2 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 6rad/s^2$

Γ.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή t_1 και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον άξονα περιστροφής του για $t > t_1$

Μέχρι την χρονική στιγμή t_1 *έχω:*

$$S = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1s \Rightarrow \omega_1 = a_{\text{γων}}t_1 = 6rad/s \Rightarrow L_1 = I\omega_1 = 1,5kgm^2/s$$

Για $t > t_1$ *η στατική τριβή μηδενίζεται αφού το δάπεδο είναι λείο, οπότε:*

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = FR = 4,5kgm^2/s^2$$

Γ.3 Να υπολογίσετε την Κινητική ενέργεια του δίσκου λόγο της περιστροφικής κίνησης την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 1s$. Την ίδια χρονική στιγμή να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου της περιφέρειας του δίσκου που απέχει την μέγιστη απόσταση από το δάπεδο.

Εφαρμόζω τους νόμους της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης για $t > t_1$

$$\Sigma\tau = Ia'_{\text{γων}} \Rightarrow FR = \frac{1}{2}MR^2 a'_{\text{γων}} \Rightarrow a'_{\text{γων}} = 18rad/s^2$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_1 = a_{cm} t_1 = 3m/s$$

Άρα την t_2 η γωνιακή ταχύτητα θα είναι:

$$\omega_2 = \omega_1 + a'_{\gamma\omega\nu}\Delta t = 24rad/s$$

και η κινητική ενέργεια περιστροφής θα είναι:

$$K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2 = 72J$$

Για το σημείο της περιφέρειας εφαρμόζω την αρχή της επαλληλίας

$$\upsilon = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu} = \upsilon_1 + \omega_2 R = 15m/s$$

Γ.4 Να υπολογιστεί η μέγιστη Κινητική ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει ο δίσκος μέχρι την χρονική στιγμή που εισέρχεται στο λείο τμήμα ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη από την οριακή της τιμή:

$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{2}{3}F \leq \mu_s(Mg - F) \Rightarrow F \leq 10N$$

** από τους Νόμους κίνησης του Γ.1 ερώτημα έχω υπολογίσει την στατική τριβή συναρτήσει της δύναμης F και από το $\Sigma F_y = 0$ έχω υπολογίσει την Ν.*

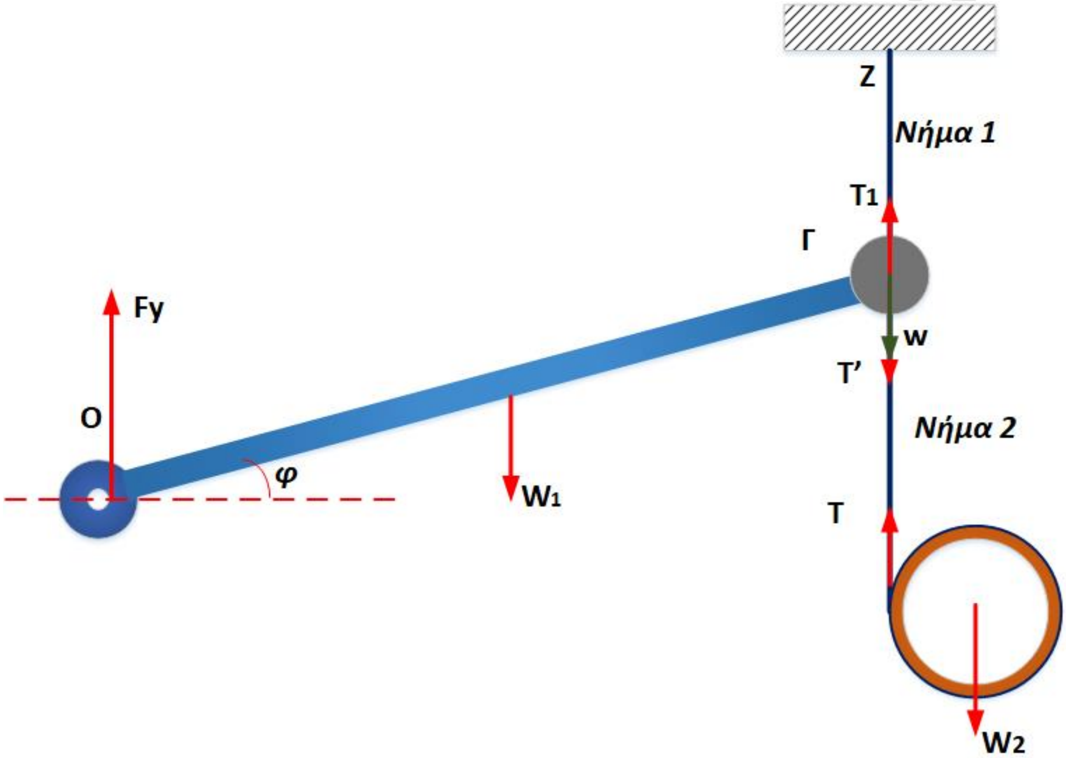
Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση στο τραχύ τμήμα:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K = W_F = FR\theta = FS_1$$

Άρα για την μέγιστη τιμή της δύναμης θα προκύψει και η μέγιστη κινητική ενέργεια θα είναι $15J$

Θέμα Δ

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μάζας $M_1 = 4kg$ και μήκους $L = 2m$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα , ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α μέσω μιας άρθρωσης. Στο άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο σημειακό σφαιρίδιο μάζας $m = 2kg$. Το σύστημα ράβδος σφαιρίδιο ισορροπεί σε κλίση γωνίας $\phi = 30^o$ μέσω δύο νημάτων που είναι δεμένα στο σφαιρίδιο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το νήμα 1 είναι στερεωμένο σε οροφή ενώ το νήμα 2 το οποίο έχει μεγάλο μήκος είναι πολλές φορές τυλιγμένο στην περιφέρεια ενός αρχικά ακίνητου ομογενούς δακτυλίου μάζας $M_2 = 2kg$ και ακτίνας $R = 50cm$. Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ ο δακτύλιος αφήνεται ελεύθερος και κατέρχεται με το νήμα να ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει στη περιφέρεια του.

Δ.1 Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου τη στιγμή που έχει πραγματοποιήσει $\dfrac{10}{\pi}$ περιστροφές.

Για την ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς το κέντρο μάζας του τον χωρίζω σε N στοιχειώδεις μάζες και έχω:

$$I_{cm} = m_1R^2 + m_2R^2 + ... + m_NR^2 = M_2R^2$$

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κάθοδο του, λαμβάνοντας υπόψη ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του άρα $x_{cm} = R\theta$ *και* $\upsilon_{cm} = \omega R$.

$$\frac{1}{2}M_2\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = M_2gx_{cm} \Rightarrow \omega = 20rad/s$$

Δ.2 Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το νήμα 1 στο σημείο Ζ καθώς και η δύναμη που ασκείται στην ράβδο από την άρθρωση στο σημείο Ο, κατά την κάθοδο του δακτυλίου.

Εφαρμόζω τους Νόμους για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση πάνω στον δακτύλιο σε συνδυασμό με την συνθήκη για την μη ολίσθηση του νήματος $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu R}$:

$$\Sigma F = ma_{cm} \Rightarrow M_2g - T = M_2a_{cm}$$

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = M_2R^2a_{\gamma\omega\nu}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η τάση του νήματος πάνω στον δακτύλιο $T = 10N$, *οπότε και η δύναμη του νήματος 2 πάνω στην ράβδο αφού το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό θα είναι* $T' = T = 10N$

Για να υπολογίσω την τάση T_1 *από το νήμα (1) πάνω στην ράβδου που ισορροπεί:*

$$\Sigma\tau_(o) = 0 \Rightarrow T_1L\sigma\upsilon\nu\phi - T'L\sigma\upsilon\nu\phi - mgL\sigma\upsilon\nu\phi - Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi = 0$$
$$\Rightarrow T_1 = 50N$$

Για να υπολογίσω την δύναμη από την άρθρωση πάνω στην ράβδο:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_1 - M_1 g - mg - T' = 0 \Rightarrow F_y = 60N$$

** Η δύναμη από την άρθρωση θα είναι κατακόρυφη αφού όλες οι άλλες δυνάμεις είναι κατακόρυφες και η ράβδος ισορροπεί.*

Δ.3 Την στιγμή που ο δακτύλιος έχει πραγματοποιήσει $\frac{10}{\pi}$ περιστροφές κόβω το νήμα 2, να βρεθεί ο λόγος της Κινητικής ενέργειας λόγο περιστροφής, προς την κινητική ενέργεια λόγο μεταφορικής κίνησης μετά από χρονικό διάστημα $2s$ από την στιγμή που κόπηκε το νήμα, θεωρώντας ότι ο δακτύλιος δεν έχει φτάσει ακόμα στο δάπεδο.

Όταν κοπεί το νήμα μηδενίζεται και η τάση του άρα η μόνη ασκούμενη δύναμη πάνω στον δακτύλιο είναι το βάρος, άρα $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \omega = 20rad/s =$ σταθ. και $a'_{cm} = g = 10m/s^2$. Άρα ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{K_{\text{περ}}}{K_{\text{μετ}}} = \frac{\frac{1}{2}M_2 R^2 \omega^2}{\frac{1}{2}M_2 \upsilon'^2_{cm}} = \frac{R^2\omega^2}{(\upsilon_{cm} + g\Delta t)^2} = \frac{1}{9}$$

Όταν ο δακτύλιος φτάνει στο έδαφος τον απομακρύνω και κόβω και το νήμα 1.

Δ.4 Να βρεθεί η επιτρόχιος επιτάχυνση του σφαιριδίου, καθώς και η δύναμη που δέχεται από την ράβδο την στιγμή που κόβεται το νήμα.

Υπολογίζω την ροπή αδράνειας για το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο ως προς τον άξονα περιστροφής, αφού κάνω $Steiner$ για την ράβδο

$$I = \frac{1}{12}M_1 L^2 + M_1\left(\frac{L}{2}\right) + mL^2 = \frac{40}{3}kg\cdot m^2$$

Εφαρμόζω τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το σύστημα:

$$\Sigma\tau_{(o)} = Ia_{\text{γων}} \Rightarrow M_1 g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi + mgL\sigma\upsilon\nu\phi = Ia_{\text{γων}} \Rightarrow a_{\text{γων}} = 3\sqrt{3}rad/s^2$$

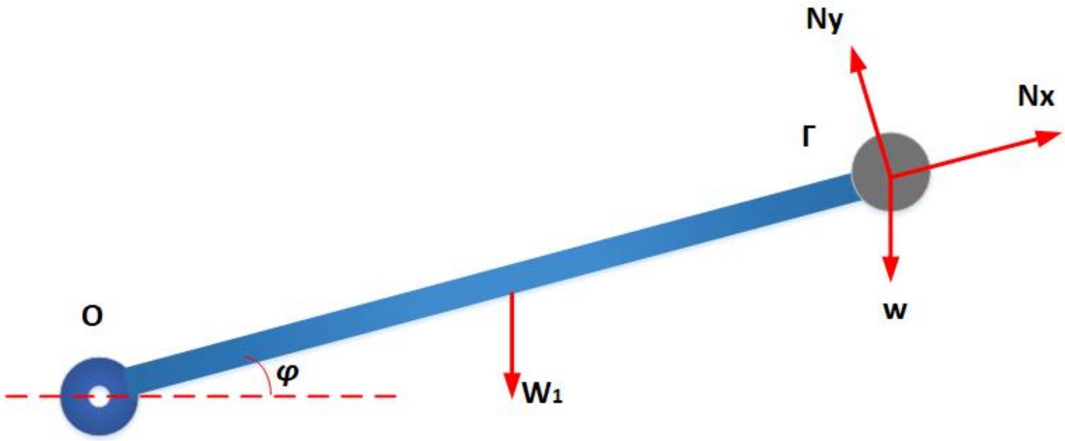
Άρα η επιτρόχιος επιτάχυνση του σφαιριδίου θα είναι: $a = a_{\gamma\omega\nu} L = 6\sqrt{3} m/s$

Για την δύναμη που ασκείται πάνω στο σφαιρίδιο εφαρμόζω τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα την στιγμή που ξεκινά την κίνηση, υποθέτοντας ότι έχει μια ακτινική (N_x) και μια εφαπτομενική συνιστώσα N_y.

$$\Sigma F_\epsilon = mg\sigma\upsilon\nu\phi - N_y = ma \Rightarrow N_y = -2\sqrt{3}$$

** Η N_y αντίθετη από αυτό που υποθέτω στο σχήμα.*

$$\Sigma F_\kappa = mg\eta\mu\phi - N_x = ma_\kappa = 0 \Rightarrow N_x = 10N$$



Άρα η δύναμη θα είναι: $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = ...$

Δ.5 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής της, την χρονική στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από την οριζόντια θέση.

Όταν η ράβδος διέρχεται για πρώτη φορά από την οριζόντια θέση για το σύστημα έχω επιτάχυνση:

$$\Sigma\tau_{(o)} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow M_1 g\frac{L}{2} + mgL = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 6 rad/s$$

Άρα για την ράβδο ισχύει ότι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{r(o)} = I_\rho a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}M_1 L^2 a_{\gamma\omega\nu} = 32kg \cdot m^2/s^2$$

Δ.6 Να βρεθεί η στροφορμή του συστήματος ράβδος-σφαιρίδιο, ως προς τον άξονα περιστροφής του, την στιγμή που διέρχονται για πρώτη φορά από την θέση που η Κινητική Ενέργεια είναι μέγιστη.

Η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη όταν $\Sigma\tau = 0$ *άρα πρώτη φορά όταν διέρχεται η ράβδος από την κάτω κατακόρυφη θέση της. Εφαρμόζω ΘΜΚΕ για το σύστημα:*

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = M_1 g\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\eta\mu\phi\right) + mg\left(L + L\eta\mu\phi\right) \Rightarrow \omega = 3\sqrt{2}rad/s$$

Άρα η στροφορμή του συστήματος θα είναι:

$$L = I\omega = 40\sqrt{2}kg \cdot m^2/s$$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός