Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ταλαντώσεις

Πρόχειρες Λύσεις

Θέμα Α

A.1 Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση η συχνότητα του διεγέρτη είναι μεγαλύτερη της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή. Αν μειώνουμε συνεχώς τη συχνότητα του διεγέρτη, τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

(δ) αρχικά θα αυξάνεται και μετά θα μειώνεται.

A.2 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$, τότε η τιμή της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

(α) $F = -m\omega^2 A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$

A.3 Κατά τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων , ίδιας διεύθυνσης και ίδιου πλάτους, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και που οι περίοδοι τους T_1 και T_2 διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, προκύπτει ταλάντωση μεταβλητού πλάτους με περίοδο T που είναι ίση με:

(β) $T = \dfrac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$

A.4 Σε μία φθίνουσα ταλάντωση στην οποία το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο:

(β) όταν η σταθερά απόσβεσης b μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα

A.5

(α) Όταν τα αμορτισέρ ενός αυτοκινήτου παλιώνουν και φθείρονται , η τιμή της σταθεράς απόσβεσης ελαττώνεται. **Σωστό**

(β) Κατά τον συντονισμό η ενέργεια του διεγέρτη μεταφέρεται στο ταλαντούμενο σύστημα, κατά τον βέλτιστο τρόπο. **Σωστό**

(γ) Η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με το ίδιο πλάτος αλλά με διαφορετικές συχνότητες, έχει ως αποτέλεσμα απλή αρμονική ταλάντωση. **Λάθος**

(δ) Στο σύστημα μάζας ελατηρίου η σταθερά επαναφοράς είναι ανάλογη της μάζας του σώματος. **Λάθος**

(ε) Στην διάρκεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης η Κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται κάθε $\frac{T}{4}$. **Λάθος**

Θέμα Β

B.1 Ένα μικρό σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις απομάκρυνσης $x_1 = A_1\eta\mu(\omega t)$ και $x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ και με ενέργειες ταλάντωσης E_1 και E_2, αντίστοιχα. Οι ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση.

Η ενέργεια ταλάντωσης Ε της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με:

(β) $E = E_1 + E_2$

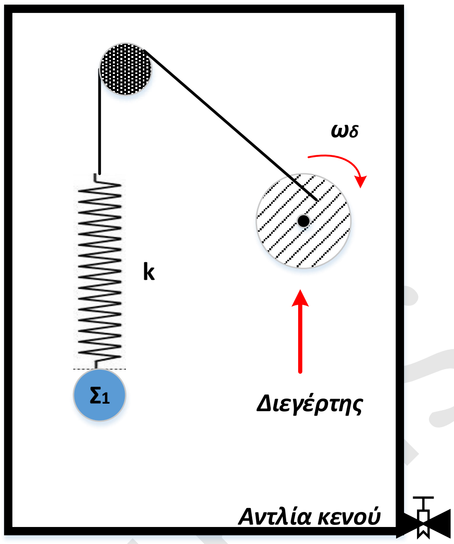
Οι δύο ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης $\phi = \frac{\pi}{2}$. *Η ζητούμενη ενέργεια θα είναι:*

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D\left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi\right) = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 = E_1 + E_2$$

Β.2. Στην διάταξη του σχήματος το Σ_1 έχει μάζα m_1 και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα f_1 απορροφώντας ενέργεια με βέλτιστο τρόπο.

Αντικαθιστούμε το σώμα Σ_1 με ένα άλλο σώμα Σ_2 μάζας m_2 και επαναλαμβάνουμε το πείραμα.Το σώμα Σ_2 εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μεγίστου πλάτους με συχνότητα $f_2 = \dfrac{3f_1}{4}$.

Ο λόγος των μαζών των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι:



$$\textbf{(γ)}\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{16}$$

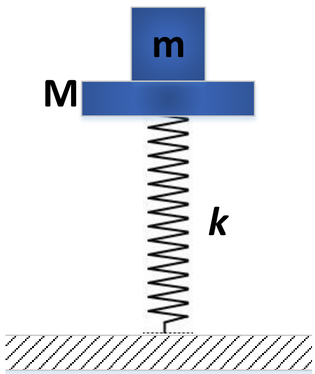
Αρχικά το σύστημα απορροφά με βέλτιστο τρόπο την ενέργεια, άρα είναι σε συντονισμό οπότε $f_1 = f_o$. Το νέο σύστημα θα ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, οπότε θα είναι και αυτό σε συντονισμό, άρα $f_2 = f_o'$

$$f_2 = \frac{3f_1}{4} \Rightarrow f_o' = \frac{3f_o}{4} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}} = \frac{3}{4}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \ldots$$

Β.3. Δίσκος μάζας M είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Πάνω από τον δίσκο τοποθετώ σώμα μάζας m και το σύστημα ισορροπεί.

Εκτρέπω το σύστημα από την ισορροπία κατά d προς τα κάτω και το αφήνω ελεύθερο από την θέση αυτή.

Αν σας δίνεται ότι $M = 2m$ και g η επιτάχυνση της βαρύτητας τότε, για να μην χάνει επαφή το σώμα από τον δίσκο κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του θα πρέπει:



$$\textbf{(α)}\ k \leq \frac{3mg}{d}$$

Το σώμα μπορεί να χάσει επαφή σε μια θέση πάνω από την ΘΙΤ του συστήματος. Δεν χάνει επαφή όσο $N \geq 0$. Σε μια τυχαία θέση:

$$\Sigma F = -m\omega^2 y \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 y \Rightarrow N = mg - m\omega^2 y$$

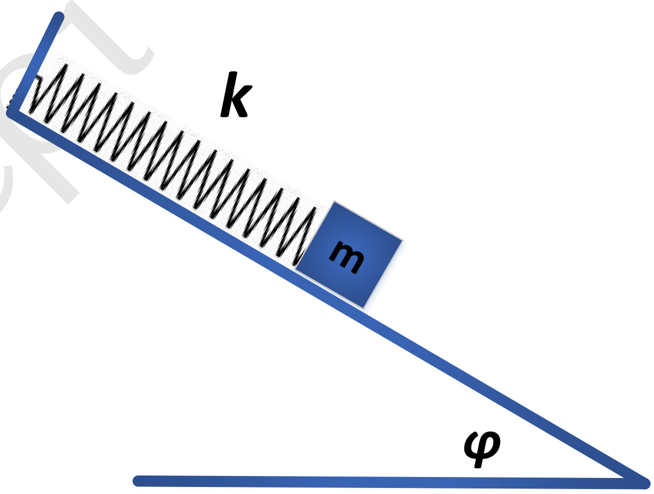
Για το σύστημα η γωνιακή συχνότητα θα είναι $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$

$$N \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g \geq \frac{k}{3m} y \Rightarrow \frac{3mg}{y} \geq k$$

Στην ακραία θέση $y = d$, οπότε προκύπτει η σωστή απάντηση.

Θέμα Γ

Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\phi = 30^o$. Στο ανώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου στερεώνουμε το άνω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε σώμα Σ μάζας $m = 2kg$, που ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω (προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου) κατά $d = 0,1m$ από τη θέση ισορροπίας, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και μετά το αφήνουμε ελεύθερο



Γ.1 Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

Δείτε θεωρία για την απόδειξη...

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow f = \frac{5}{\pi}Hz$$

Η αρχική εκτροπή θα είναι και το πλάτος της ταλάντωσης, αφού το αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα.

Γ.2 Σε ποιες τιμές της απομάκρυνσης του ταλαντωτή ο λόγος της κινητικής ενέργειας K του σώματος προς την ολική ενέργεια E της ταλάντωσης είναι $\frac{K}{E} = \frac{1}{4}$;

Εφαρμόσω την ΑΔΕΤ για $K = \frac{E}{4}$

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{E}{4} + U \Rightarrow U = \frac{3E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}DA^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow x = \pm 0,05\sqrt{3}m$$

Γ.3 Να υπολογίσετε τον λόγο του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος.

Στην θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl_o

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = 0.05m.$$

Στην ανώτερη θέση το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l = A - \Delta l_o$

$$\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{F_{\varepsilon\pi}} = \frac{k\Delta l}{kA} = \frac{A - \Delta l_o}{A} = \frac{1}{2}$$

Γ.4 Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς τα επάνω, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που για πρώτη φορά το σώμα περνά από τη θέση που το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

Όταν το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση φυσικού μήκους η απομάκρυνση από την ΘΙΤ θα είναι $x = +0.05m$.

Αφού την $t = 0$ είναι στην ΘΙΤ με θετική ταχύτητα η εξίσωση ταλάντωσης θα είναι: $x = 0.1\eta\mu(10t)$

$$0,05 = 0,1\eta\mu(10t) \Rightarrow \eta\mu(10t) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

Λύνω την τριγωνομετρική εξίσωση κρατώντας τον μικρότερο χρόνο.

$$10t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{60}s$$

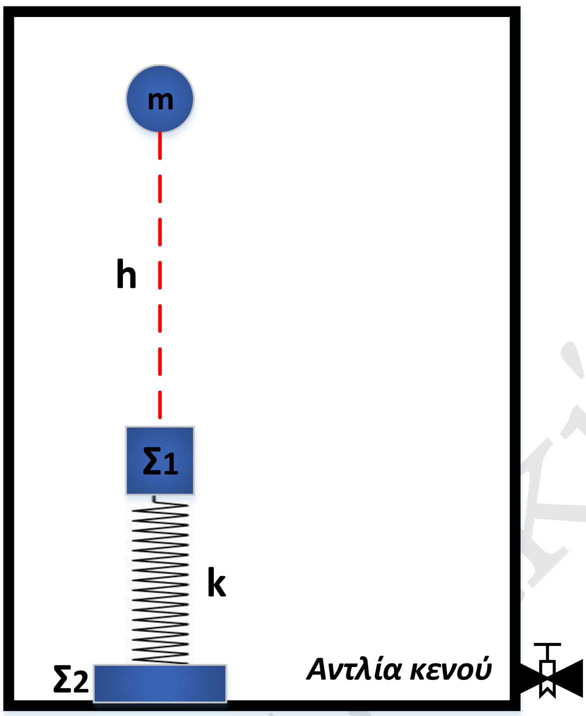
** βέβαια μπορούμε να λύσουμε την άσκηση και με χρήση της αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος.*

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{6}}{10} = \frac{\pi}{60}s$$

Θέμα Δ

Στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ ισορροπεί δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2kg$, ενώ στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1kg$. Το σώμα Σ_2 ακουμπά στο κάτω τοίχωμα ενός κλειστού δοχείου, στο οποίο έχουμε δημιουργήσει με την βοήθεια αντλίας συνθήκες κενού.

Από ύψος h πάνω από το Σ_1 και στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί μια σφαίρα μικρών διαστάσεων και μάζας $m = 3kg$. Η σφαίρα θα σφηνωθεί στο σώμα Σ_1 και το συσσωμάτωμα που θα δημιουργηθεί θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,5m$, με το σώμα Σ_2 να είναι πάντα σε επαφή με το κάτω τοίχωμα του δοχείου.



Δ.1 Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος και το ύψος h.

Στην αρχική θέση του Σ_1 το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_1 και στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_2

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = 0,2m$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_2 = (m_1 + m)g \Rightarrow \Delta l_2 = 0,5m$$

Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα βρίσκεται σε τυχαία απομάκρυνση (αρχική θέση του Σ_1) $y = \Delta l_2 - \Delta l_1 = 0,3m$. Σε αυτή την θέση εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow \upsilon_\kappa = 0,8\sqrt{5}m/s$$

Για την κρούση εφαρμόζω την Α.Δ.Ο. ώστε να βρω την ταχύτητα υ του σφαιριδίου πριν την κρούση.

$$m\upsilon = (m + m_1)\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon = \frac{4\sqrt{5}}{3} m/s$$

Για την πτώση του σφαιριδίου εφαρμόζω την ΑΔΜΕ για να βρω το αρχικό ύψος.

$$mgh = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow h = \frac{4}{9} m$$

Δ.2 Να υπολογίσετε το % ποσοστό των ενεργειακών απωλειών λόγω της πλαστικής κρούσης.

$$\frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{2}(m + m_1)\upsilon_\kappa^2}{\frac{1}{2} m\upsilon^2} 100\% = 40\%$$

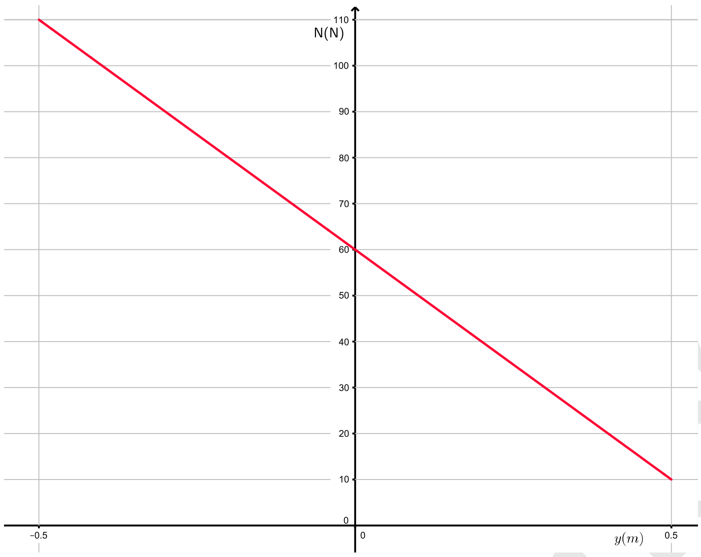
Δ.3 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που δέχεται το Σ_2 από το κάτω τοίχωμα του δοχείου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε βαθμολογημένους άξονες.

Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = -D\vec{y}$

$$\Sigma F = -ky \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - (m + m_1)g = -ky \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = (m + m_1)g - ky$$

Το Σ_2 ισορροπεί με την επίδραση της δύναμης επαφής N, του βάρους w_2 και της δύναμης ελατηρίου $F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda}$. Δηλαδή $\vec{N} + \vec{w_2} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = \vec{0}$

$$N = F'_{\varepsilon\lambda} + w_2 \Rightarrow N = 60 - 100y \quad (S.I.) \quad -0,5m \leq y \leq +0,5m$$



Δ.4 Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από το οποίο μπορούμε να αφήσουμε την μικρή σφαίρα, ώστε κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος το Σ_2 να μην χάνει την επαφή του με το κάτω τοίχωμα του δοχείου.

Για να μην χάνει επαφή πρέπει $N \geq 0 \Rightarrow 60 - 100y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0,6m$. *Άρα το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να είναι* $A' = 0,6m$. *Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ στην θέση μετά την κρούση για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος, ώστε να μην χάνει επαφή.*

$$\frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow \upsilon_\kappa = 3\sqrt{\frac{3}{5}}m/s$$

Για την κρούση εφαρμόζω την Α.Δ.Ο. ώστε να βρω την ταχύτητα υ *του σφαιριδίου πριν την κρούση.*

$$m\upsilon' = (m + m_1)\upsilon'_\kappa \Rightarrow \upsilon' = 5\sqrt{\frac{3}{5}}m/s$$

Για την πτώση του σφαιριδίου εφαρμόζω την ΑΔΜΕ για να βρω το αρχικό ύψος.

$$mgh' = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow h' = 0,75m$$

Αν είχαμε πραγματοποιήσει την παραπάνω διαδικασία έχοντας εισάγει στο δοχείο μέσω της αντλίας αέρα την στιγμή που η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενιστεί για πρώτη φορά, τότε η ταλάντωση του συσσωματώματος θα ήταν φθίνουσα με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$ και σταθερά $\Lambda = \frac{\sqrt{5}}{\pi}ln2 \ \ s^{-1}$.

Δ.5 Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 5 πλήρης ταλαντώσεις, θεωρώντας την περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης ίση με την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης.

Η περίοδος της ταλάντωση είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m}{k}} = 0,2\pi\sqrt{5}s$.

Το ζητούμενο πλάτος θα είναι:

$$A = A_o e^{-\Lambda t} = A_o e^{-\Lambda 5T} = \frac{A_o}{32} = \frac{1}{64}m$$