ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. α.

2. δ.

3. β.

4. γ.

5. α-Λ, β-Σ, γ-Σ, δ-Σ, ε-Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής στον άξονα κίνησης για το σύστημα των $Σ_1$, $Σ_2$ λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$$\vec{p}_{x(αρχ)} = \vec{p}_{x(τελ)}$$

Θεωρώντας θετική την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος Σ1 πριν την κρούση, η σχέση γράφεται:

$$m_1 υ_1 = (m_1 + m_2) V_κ \quad \Rightarrow \quad V_κ = \frac{m_1 υ_1}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι ίση με το ¼ της αρχικής ενέργειας ταλάντωσης.

$$E_{συσ} = \frac{1}{4} E_1 \qquad (2)$$

Η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας, οπότε η ενέργεια ταλάντωσης συμπίπτει κάθε φορά με την κινητική ενέργεια του σώματος που ταλαντώνεται. Άρα, η σχέση (2) γράφεται:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_κ^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 \qquad (3)$$

και με τη βοήθεια της (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\frac{m_1^2\upsilon_1^2}{\left(m_1+m_2\right)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$$

2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Οι επιμέρους συχνότητες των ταλαντώσεων είναι

$$f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{50\pi}{2\pi}=25\text{Hz} \;,\; f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=\frac{54\pi}{2\pi}=27\text{Hz}$$

Η μέση συχνότητα , που αποτελεί και τη συχνότητα ταλάντωσης του σώματος, είναι $\bar{f}=\frac{f_1+f_2}{2}=26\,\text{Hz}$

Οι 260 ταλαντώσεις πραγματοποιούνται σε χρονικό διάστημα που βρίσκεται από τη σχέση:

$$\bar{f}=\frac{N}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{N}{\bar{f}}=\frac{260}{26\,\text{Hz}} \Rightarrow \Delta t=10\text{s}$$

Η περίοδος του διακροτήματος είναι $T_\delta=\frac{1}{\left|f_1-f_2\right|}=0,5\text{s}$

επομένως το πλάτος ταλάντωσης μηδενίζεται κάθε 0,5s. Η ενέργεια της ταλάντωσης στο διακρότημα μηδενίζεται κάθε φορά που μηδενίζεται το πλάτος του, συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης μηδενίζεται 1 φορά κάθε 0,5 δευτερόλεπτα.

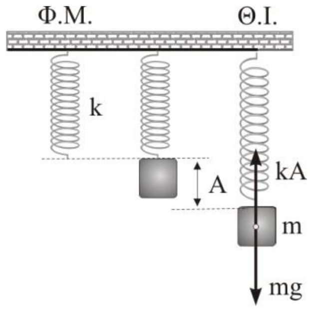
Άρα, στα 10 δευτερόλεπτα, η ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται 20 φορές.

3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων ισούται αριθμητικά με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης. Επομένως για το σώμα Α

$$Q_A=E_{\tau(A)}=2\text{J} \Rightarrow \frac{1}{2}k_A A_A^2=2\text{J} \qquad (1)$$

Όταν φέρουμε το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήσουμε να εκτελέσει ταλάντωση, το πλάτος ταλάντωσης Α είναι η κατακόρυφη απόσταση από το φυσικό μήκος μέχρι τη θέση ισορροπίας.



Για το σώμα Α στη θέση ισορροπίας έχουμε $m_A g=k_A A_A$

Για το σώμα Β στη θέση ισορροπίας έχουμε $m_B g=k_B A_B$

Επειδή $m_A=m_B$ έχουμε $k_A A_A=k_B A_B \Rightarrow A_B=2A_A$

$$Q_B = E_{\tau(B)} = \frac{1}{2}k_B A_B^2 = \frac{1}{2}\frac{k_A}{2}\left(2A_A\right)^2 = 2Q_A \xrightarrow{(1)} Q_B = 4J$$

4. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Μια εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει συχνότητα ίση με την συχνότητα του διεγέρτη. Επειδή η συχνότητα του διεγέρτη παρέμεινε σταθερή, η σωστή απάντηση θα έχει περίοδο ταλάντωσης ίση με την αρχική, $\frac{\pi}{5}s$. Άρα σωστό μπορεί να είναι το διάγραμμα (I) ή (III).

Η ιδιοπερίοδος του ταλαντούμενου συστήματος είναι αρχικά

$$T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1kg}{400N/m}} \Rightarrow T_{01} = \frac{\pi}{10}s \ \text{ή} \ f_{01} = \frac{10}{\pi}Hz$$

Το σύστημα αρχικά ταλαντώνεται σε συχνότητα $f_1 = \frac{5}{\pi}Hz$ που είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητά του $f_{01} = \frac{10}{\pi}Hz$.

Αντικαθιστώντας το σώμα με άλλο τετραπλάσιας μάζας, η ιδιοπερίοδός του γίνεται

$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} = \frac{\pi}{5}s$, που συμπίπτει με την περίοδο του διεγέρτη. Άρα το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό και το πλάτος του μεγιστοποιείται με συνέπεια $A_2>A_1$..

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν d=2A, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης.
Από τη δοσμένη εξίσωση της δύναμης επαναφοράς γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της είναι

F_{max}= DA=40N **(1)**.

Αν προσδιορίσουμε τη σταθερά επαναφοράς D, από τη σχέση **(1)** θα υπολογίσουμε το πλάτος A.
Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικά περάσματα από τη θέση ισορροπίας είναι T/2, άρα,

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

οπότε από τη σχέση της περιόδου έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2kg}{\left(\frac{\pi}{5}s\right)^2} \Rightarrow D = 200\frac{N}{m}$$

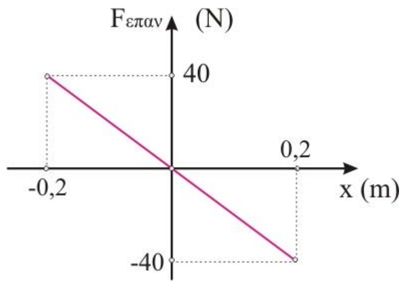
Αντικαθιστώντας στην **(1)** παίρνουμε

$$A = \frac{F_{max}}{D} = \frac{40\,N}{200\,N/m} \Rightarrow A = 0,2m$$

Άρα , οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν d=2A=0,4m.

Γ2. Η σχέση που δίνει τη δύναμη επαναφοράς σε συνάρτηση με την απόσταση x από τη θέση ισορροπίας είναι

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -200x \quad (SI) \quad \mu\varepsilon$$
$$-0,2m \le x \le 0,2m$$



Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα

Γ3. Από τη δοσμένη εξίσωση της δύναμης επαναφοράς γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει αρχική φάση. Επομένως η θέση του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t = 0,2 \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{(\pi/5)}t \ , \quad (SI)$$

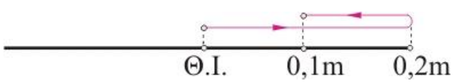
Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την τιμή t=(5π/60)s παίρνουμε:

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{(\pi/5)}\frac{5\pi}{60} = 0,2 \cdot \eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 0,2 \cdot \frac{1}{2}m \Rightarrow x = 0,1m$$

Η μετατόπιση του σώματος στο ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι: Δx=x=0,1m.

Η χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5\pi}{60}s$ είναι μεγαλύτερη από $\frac{T}{4}\left(=\frac{3\pi}{60}s\right)$ και μικρότερη από $\frac{T}{2}\left(=\frac{6\pi}{60}s\right)$. Έτσι, το σώμα τη χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και κινείται προς τη θέση ισορροπίας, δηλαδή στο ζητούμενο χρονικό διάστημα το σώμα έχει αλλάξει κατεύθυνση κίνησης. Άρα

$$s = |\Delta x_A| + |\Delta x_B| = |0,2m - 0m| + |0,1m - 0,2m| \Rightarrow s = 0,3m$$



Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\, dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx \cdot \upsilon \text{ , } \mathbf{(2)}$$

Το σώμα διέρχεται από τη θέση x=A/2 και επιταχύνεται, επομένως κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας έχοντας αρνητική ταχύτητα.
Η ταχύτητα υ θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την διατήρησης ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων x= A/2 και της ακραίας θέσης.

$$K + U = E \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \; \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}DA^2 \;\Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm\frac{A}{2}\sqrt{\frac{3D}{m}} = \pm\frac{0,2}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 200}{2}}\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; \upsilon = \pm\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Από τις δύο τιμές θα χρησιμοποιήσουμε την αρνητική.

Αντικαθιστώντας στη σχέση **(2)** παίρνουμε:

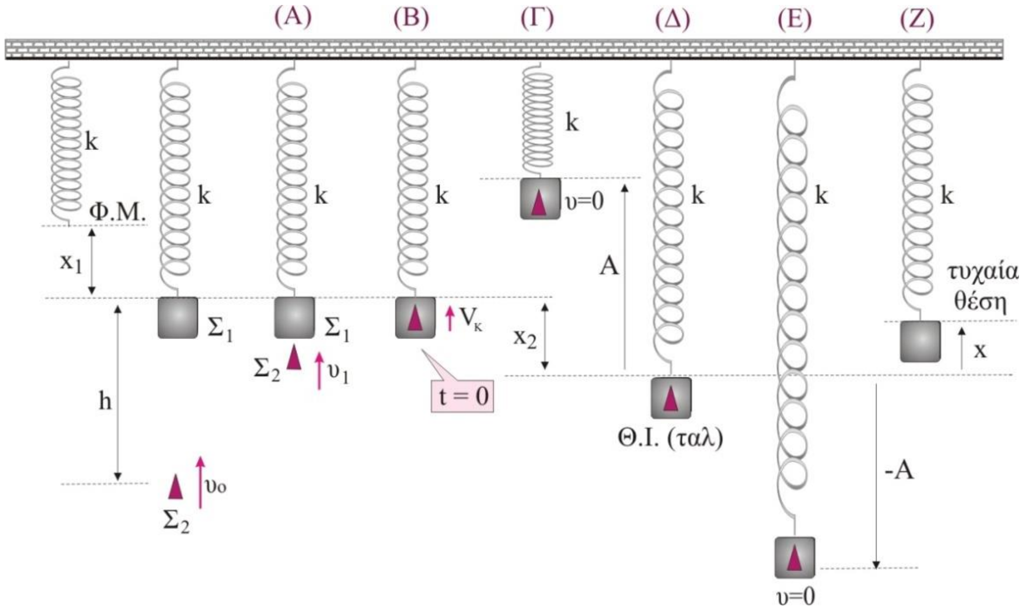
$$\frac{dK}{dt} = -Dx \cdot \upsilon = -200\frac{N}{m}\cdot\frac{0,2m}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\frac{m}{s}\right) \;\Rightarrow\; \frac{dK}{dt} = +20\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η κινητική ενέργεια του ταλαντούμενου σώματος αυξάνεται, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού αυτό κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

ΘΕΜΑ Δ

Στο πρόβλημα συναντάμε τα εξής φαινόμενα:
- Ισορροπία σώματος στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο, του $Σ_1$.
- Κατακόρυφη εκτόξευση σώματος προς τα πάνω, του $Σ_2$.
- Πλαστική κρούση δύο σωμάτων, των $Σ_1$ και $Σ_2$.
- Απλή αρμονική ταλάντωση συστήματος μάζας ελατηρίου, των (m_1+m_2) - k.

Δ1. Αν με $\Delta\ell$ συμβολίσουμε τη μεταβολή του φυσικού μήκους του ελατηρίου, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου βρίσκεται από τη σχέση $U_{ελατ} = \frac{1}{2}k\,\Delta\ell^2$ και μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.



Πρέπει να βρούμε την πάνω ακραία θέση του συσσωματώματος σε σχέση με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αν το συσσωμάτωμα ξεπερνά τη θέση φυσικού μήκους, η $U_{ελατ}$ θα μηδενίζεται δύο φορές ανά περίοδο. Αν δεν την ξεπερνά, δεν θα μηδενίζεται καμία φορά και αν φθάνει μέχρι τη θέση φυσικού μήκους θα μηδενίζεται μία μόνο φορά.
Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, θέση (Δ), το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_1 + x_2$ που βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας, ΣF=0

$$k(x_1+x_2)-(m_1+m_2)g=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{(m_1+m_2)g}{k}=\frac{(2kg+2kg)10m/s^2}{100N/m} \Rightarrow$$

$$x_1+x_2=0,4m$$

Επειδή μας δίνεται ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι 0,4m, αυτό δηλώνει ότι το συσσωμάτωμα στην πάνω ακραία θέση του φθάνει μέχρι τη θέση φυσικού μήκους. Άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται μια φορά ανά περίοδο.

Δ2. Στη θέση ισορροπίας του $Σ_1$ (θέση Α) έχουμε:

$$ΣF=0 \Rightarrow m_1 g = k x_1 \Rightarrow x_1=\frac{m_1 g}{k}=0,2m$$

Λόγω της προσθήκης του σώματος $Σ_2$ συμβαίνει μετατόπιση της θέσης ισορροπίας κατά x_2, που είναι ίσο με $x_2 = A - x_1 = 0,2m$. Άρα η ταλάντωση του συστήματος ξεκινά από τη θέση $x_2 = +0,2m$ με κατεύθυνση προς τα πάνω (θετικά).
Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (Β), όπου το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα Vκ, απομάκρυνση x_2 και της ακραίας θέσης της ταλάντωσης, θέση (Γ) .

$$K+U=E \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_K{}^2+\frac{1}{2}kx_2{}^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow V_K=\sqrt{\frac{k(A^2-x_2{}^2)}{m_1+m_2}}=\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των $Σ_1$, $Σ_2$ λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση και θεωρώντας θετικά προς τα πάνω
παίρνουμε:

$$\vec{p}_{(αρχ)}=\vec{p}_{(τελ)} \Rightarrow m_2 υ_1=(m_1+m_2)V_κ \Rightarrow υ_1=\frac{(m_1+m_2)V_κ}{m_2} \Rightarrow υ_1=2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το σώμα $Σ_2$ από τη στιγμή που αυτό εκσφενδονίζεται κατακόρυφα με ταχύτητα μέτρου $υ_o$ μέχρι λίγο πριν την κρούση του με το $Σ_1$.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m_2υ_1^2 - \frac{1}{2}m_2υ_o^2 = -m_2gh \Rightarrow υ_o = \sqrt{υ_1^2 + 2gh} \Rightarrow$$

$$υ_o = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot 10\cdot 4,4}\ \frac{m}{s} \Rightarrow υ_o = 10\frac{m}{s}$$

Δ3. Η εξίσωση της απομάκρυνσης, στην α.α.τ. στη γενική της μορφή , δίνεται από τη σχέση $x = Aημ(ωt + φ_o)$. **(1)**

Όπου: Α=0,4m και $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{100\,N/m}{2kg + 2kg}} \Rightarrow ω = 5\frac{rad}{s}$.

Για τη χρονική στιγμή t=0, γνωρίζουμε ότι το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση x_2=+A/2 έχοντας θετική ταχύτητα, επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης αναμένεται στο 1ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Με αντικατάσταση στη σχέση **(1)** παίρνουμε:

$$\frac{A}{2} = Aημφ_o \Rightarrow φ_o = \frac{π}{6} + 2Kπ\,rad \quad ή \quad φ_o = \frac{5π}{6} + 2Kπ$$

Επειδή πρέπει $0<φ_0<2π$ πιθανές λύσεις είναι οι $φ_o = \frac{π}{6}$ και $φ_o = \frac{5π}{6}$

Επειδή πρέπει υ>0 , αποδεκτή είναι η λύση $φ_o = \frac{π}{6}$.

Άρα, η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο παίρνει τη μορφή $x = 0,4ημ(5t + \frac{π}{6})$, (SI)

Δ4. Σε μια τυχαία θέση, που το συσσωμάτωμα απέχει x από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, (θέση Ζ), η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(A-x)^2 = 50(0,4-x)^2 \Rightarrow U_{ελ} = 50x^2 - 40x + 8 \ \ (SI) \ \ με \ \ -0,4m \le x \le +0,4m$$

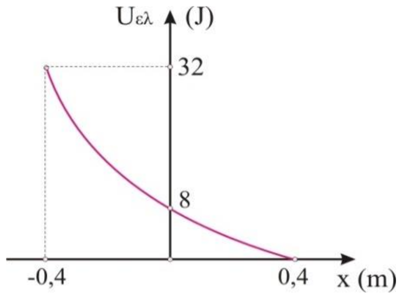
Η γραφική παράσταση της $U_{ελ} = f(t)$ είναι μια παραβολή με τα κοίλα προς τα θετικά.

Για x=-0,4m δίνει U=+32J.

Για x=+0,4m δίνει U=0J.

Για x=0 m δίνει U=+8J.

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Ιστάπολος Βασίλειος και Ποντικός Ηλίας, Φυσικοί.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.**