Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*
Απλή Αρμονική Ταλάντωση ΙΙ - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι κίνηση:

(δ) ευθύγραμμη περιοδική

Α.2. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και περιόδου Τ. Αν τετραπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, τότε η περίοδος της θα:

(β) παραμένει σταθερή

Α.3. Σώμα εκτελεί ταλάντωση δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου. Στο ίδιο ελατήριο δένουμε σώμα τετραπλάσιας μάζας το οποίο εκτελεί ταλάντωση με το ίδιο πλάτος, για την νέα ταλάντωση:

(β) η περίοδος διπλασιάζεται διπλασιάζεται.

Α.4. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και κάποια χρονική στιγμή η φάση της είναι ίση με $\frac{2\pi}{3} rad$. Αυτή την χρονική στιγμή το σώμα:

(γ) κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας

Α.5.

(α) Η ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων δεν διατηρείται κατά την διάρκεια μιας ανελαστικής κρούσης. **Λάθος**

(β) Μικρή σφαίρα συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με κατακόρυφο τοίχο. Τόσο η κινητική ενέργεια όσο και η ορμή της παραμένουν σταθερά. **Λάθος**

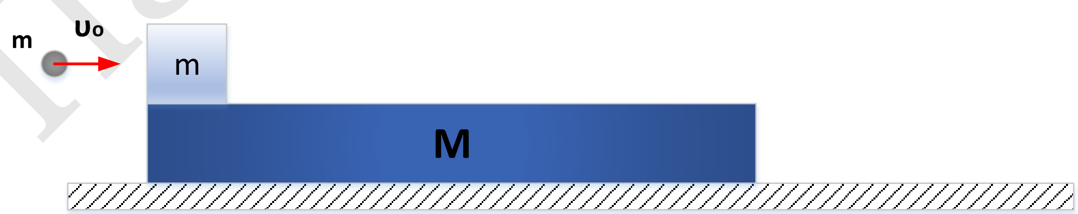
(γ) Οριζόντιο σύστημα ελατηρίου μάζας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα ίσης μάζας, τότε διπλασιάζεται η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης. **Λάθος**

(δ) Η σταθερά ενός ελατηρίου εξαρτάται από τις διαστάσεις του και το υλικό κατασκευής του. **Σωστό**

(ε) Η Δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας ελατηρίου ταυτίζεται πάντα με την δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Σώμα Σ_1 και μάζας m ισορροπεί στο αριστερό άκρο ακίνητης πλατφόρμας μάζας $M = 8m$ η οποία είναι ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως στο σχήμα. Το Σ_1 παρουσιάζει με την πλατφόρμα συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Βλήμα μάζα m που κινείται οριζόντια, σφηνώνεται με ταχύτητα μέτρου υ_o στο σώμα Σ_1.



Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει πάνω στην πλατφόρμα, χωρίς να πέφτει από αυτή. Η θερμότητα που εκλύεται λόγω της τριβής ολίσθησης θα είναι ίση με :

(γ) $\dfrac{m\upsilon_o^2}{5}$

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής, ώστε να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m\upsilon_o = (m+m)\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_o}{2}$$

Το συσσωμάτωμα ολισθαίνει πάνω στην πλατφόρμα επιβραδυνόμενο εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, ταυτόχρονα όμως και η πλατφόρμα λόγω της τριβής που δέχεται από το συσσωμάτωμα θα επιταχύνεται. Κάποια στιγμή θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα και το συσσωμάτωμα δεν θα κινείται σε σχέση με την πλατφόρμα. Υπολογίζω από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής την κοινή ταχύτητα τους.

$$(m+m)\upsilon = m\upsilon_o = (m+m+8m)\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \frac{\upsilon_o}{10}$$

Η θερμότητα που αναπτύσσετε εξαιτίας της τριβής θα είναι:

$$Q = \frac{1}{2}(m+m)\upsilon^2 - \frac{1}{2}(m+m+8m)\upsilon'^2 = \frac{m\upsilon_o^2}{5}$$

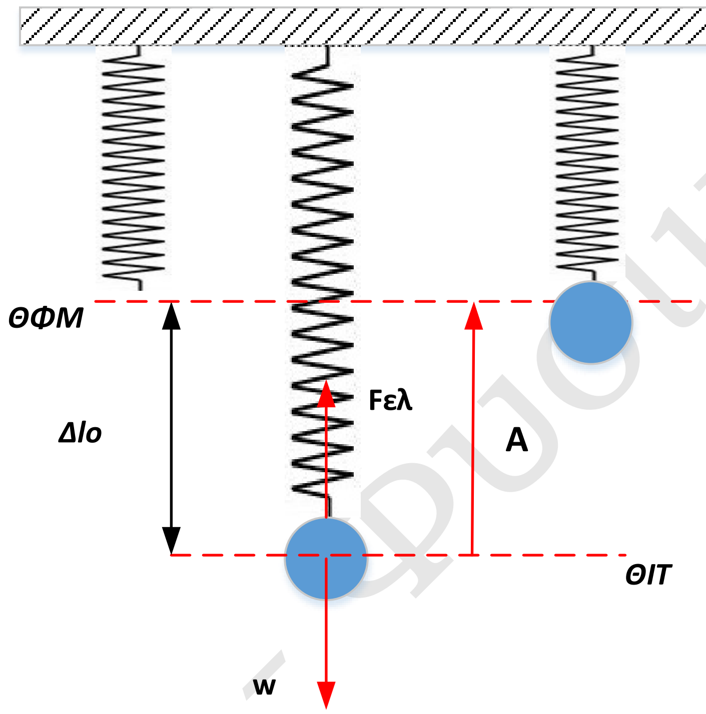
Β.2. Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στην οροφή ενός εργαστηρίου. Με την βοήθεια μεταβλητής δύναμης μετακινούμε το σώμα μέχρι την θέση στην οποία δεν του ασκείται δύναμη από το ελατήριο. Από αυτήν την θέση το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα την στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$.

Την χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα είναι:

(α) $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται γνωστή και ίση με g.

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$*, άρα για τη χρονική στιγμή ισχύει:* $t_1 = \frac{T}{4}$.



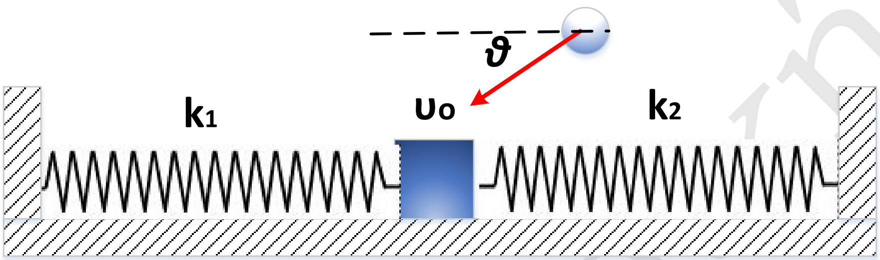
Στην θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o = mg \Rightarrow \Delta l_o = \frac{mg}{k}$$

Η θέση αρχικής εκτροπής είναι η Θέση Φυσικού Μήκους η οποία θα ταυτίζεται με την ακραία θέση της ταλάντωσης του σώματος. $(A = \Delta l_o)$*. Άρα την χρονική στιγμή* t_1 *το σώμα θα διέρχεται από την Θέση ισορροπίας με την μέγιστη ταχύτητα.*

$$\upsilon = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{mg}{k} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

B.3. Σώμα μάζας $m_1 = m$ είναι στερεωμένο στα ελεύθερα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων σταθερών $k_1 = k_2 = k$ και ισορροπεί ακίνητο. Ένα βλήμα μάζας $m_2 = m$ σφηνώνεται με ταχύτητα υ_o υπό γωνία $\phi = 60^o$ και κινητική ενέργεια K_o όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη Δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου k_1 κατά την διάρκεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με:



(β) $\dfrac{K_o}{16}$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κρούση στον οριζόντιο άξονα:

$$m\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\theta = 2m\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon_o}{4}$$

Επειδή η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης. Επίσης η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης θα είναι $D = 2k$.

$$\upsilon_k = \omega A \Rightarrow \frac{\upsilon_o}{4} = \sqrt{\frac{D}{2m}}A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\upsilon_o}{4}$$

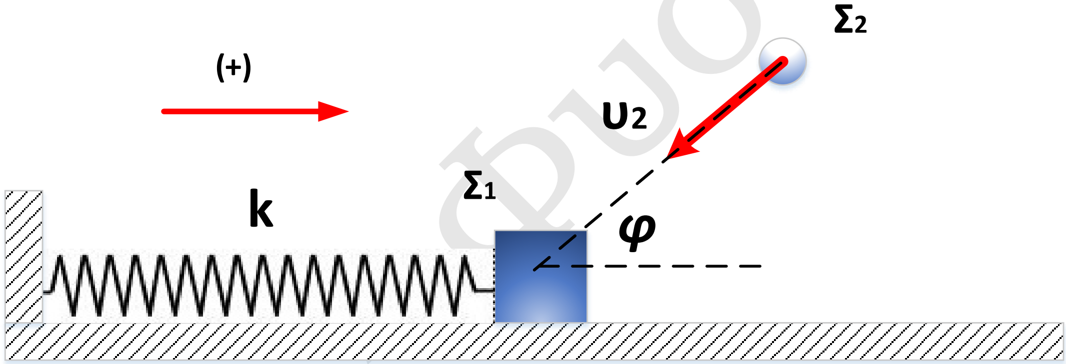
Η μέγιστη ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου (1) είναι η ενέργεια στην ακραία θέση ($\Delta l = A$:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k_1(\Delta l)^2 = \frac{K_o}{16}$$

Θέμα Γ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους $A = 0,4m$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = \frac{A\sqrt{3}}{2}$, κινούμενο κατά τη θετική φορά, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 3kg$. Το σώμα Σ_2 κινείται, λίγο πριν την κρούση, με ταχύτητα $\upsilon_2 = 8m/s$ σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία ϕ (όπου $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{1}{3}$) με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά την κρούση, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Γ.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος , αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για το Σ_1 πριν την κρούση για να υπολογίσω την ταχύτητα του.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = +2m/s$$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήτησης της Ορμής στον άξονα x για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$m_1\upsilon_1 - m\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\phi = (m_1 + m_2)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = -1,5m/s$$

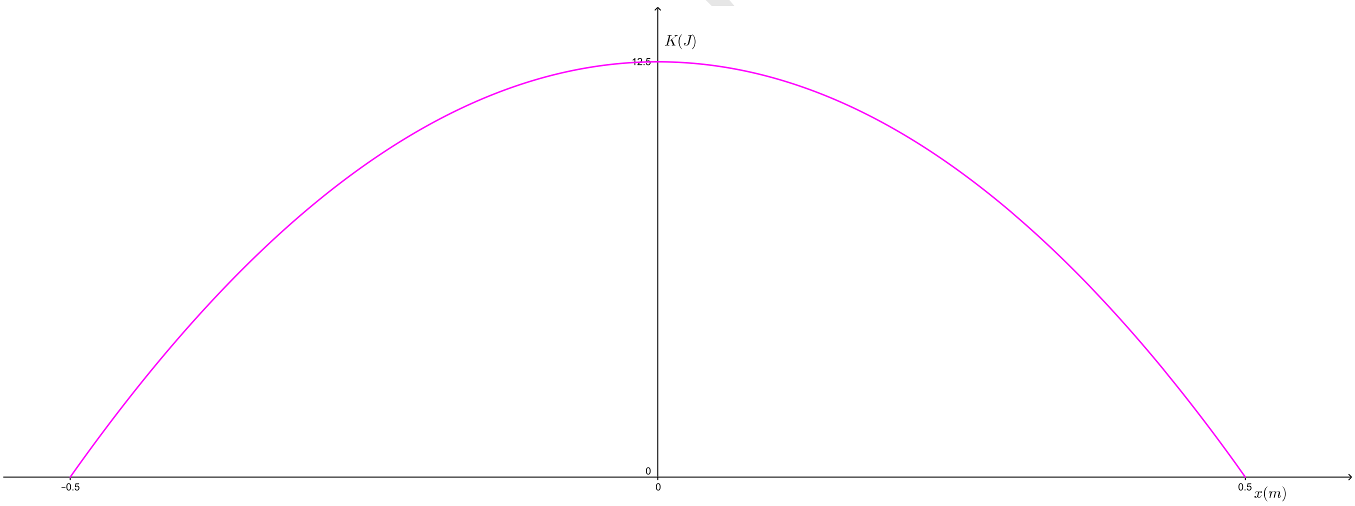
Άρα το συσσωμάτωμα έχει φορά προς τα αριστερά.

Γ.2 Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος .

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα στην θέση ακριβώς μετά την κρούση, η οποία ταυτίζεται με την θέση πριν, αφού η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_k^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow A' = 0,5J$$

Γ.3 Να εκφράσετε την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση. Να σχεδιάσετε (με στυλό) σε βαθμολογημένους άξονες την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.



$$K = E - U = \frac{1}{2}DA'^2 - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 12,5 - 50x^2 \ (S.I) \ \ -0,5m \leq x \leq 0,5m$$

Γ.4 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της Κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος την χρονική στιγμή που η Κινητική Ενέργεια είναι τριπλάσια της Δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης του ελατηρίου για 2η φορά.

Επειδή η μόνη ασκούμενη δύναμη στην διεύθυνση της ταλάντωσης είναι η δύναμη του ελατηρίου, τη ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου θα ταυτίζεται με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης. Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για να υπολογίσω θέση και ταχύτητα.

$$E = K + U \Rightarrow E = 3U \Rightarrow x = \pm\frac{A'}{2}$$

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{4K}{3} \Rightarrow \upsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_{max}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = -Dx\upsilon = -k\left(-\frac{A'}{2}\right)\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A'\right) = 31,25\sqrt{3}J/s$$

Θέμα Δ

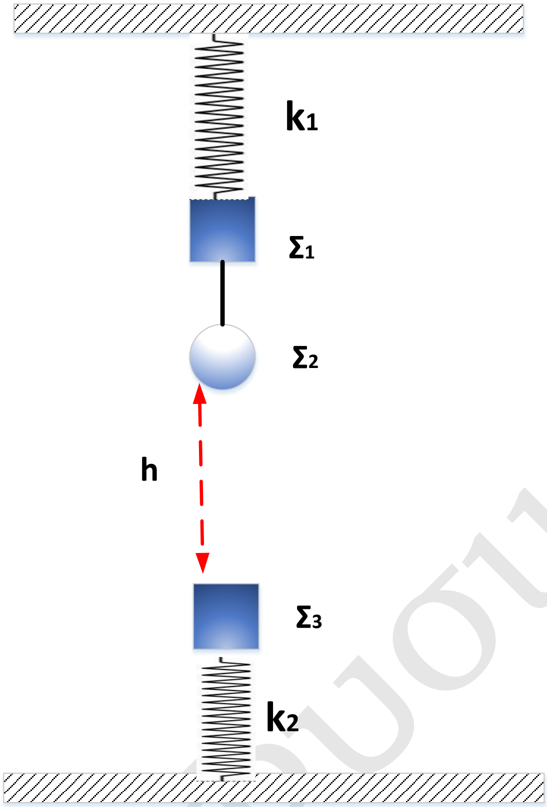
Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = m_2 = m = 1kg$ και συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα. Το Σ_1 είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1 = 100N/m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οροφή. Τα δύο σώματα ισορροπούν, όπως φαίνεται στο σχήμα και σε κάποια χρονική στιγμή κόβεται το νήμα που συνδέει τις δύο μάζες.

Δ.1 Να αποδείξετε ότι το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

Για την θέση ισορροπίας που το ελατήριο είναι σε επιμήκυνση κατά Δl_o:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \quad (1)$$

Για μια τυχαία θέση κάτω από την Θέση ισορροπίας:



$$\Sigma F = mg - k_1(\Delta l_1 + y) \Rightarrow \Sigma F = -k_1 y \qquad (2)$$

Για την περίοδο:

$$D = k_1 = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

Δ.2 Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του Σ_1 σε συνάρτηση με τον χρόνο και να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το αντίστοιχο διάγραμμα. Να θεωρήσετε ως χρονική στιγμή $t_o = 0$ την στιγμή που κόβουμε το νήμα και ως θετική την φορά προς τα κάτω.

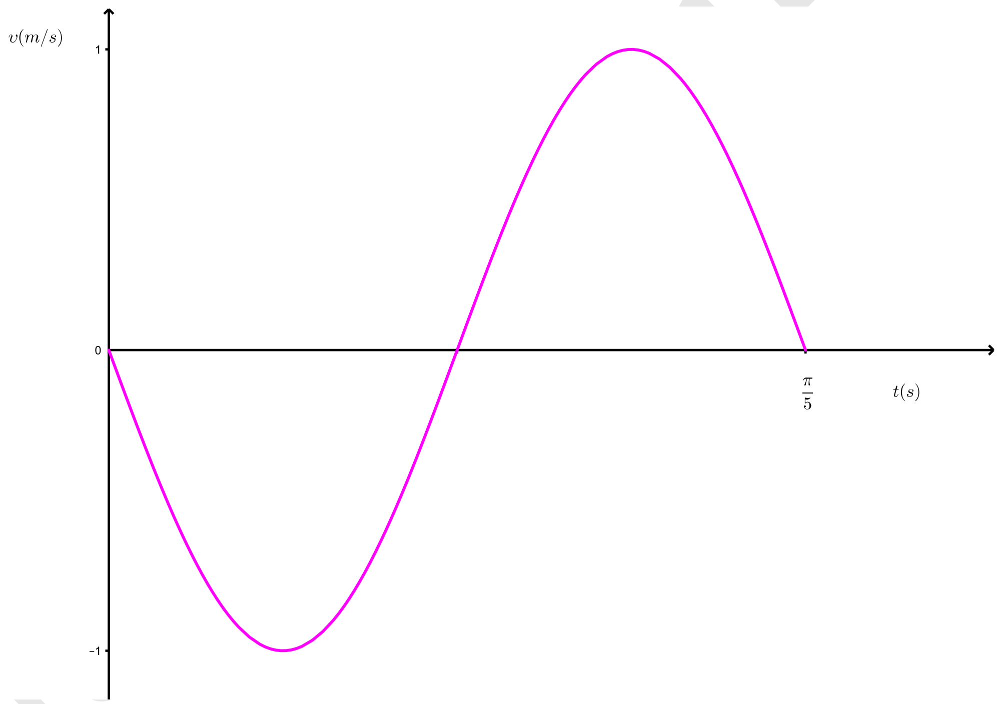
Στην αρχική θέση ισορροπίας και των δύο σωμάτων, πριν κοπεί το νήμα το ελατήριο είναι σε επιμήκυνση Δl_2. Αυτή η θέση είναι και η ακραία θέση.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1 \Delta l_2 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1+m_2)g}{k_1}$$

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{k_1} = 0,1m$$

Αφού θετική είναι η φορά προς τα κάτω το σώμα ξεκινά από την ακραία θετική θέση άρα $\phi_o = \pi/2$

$$y = 0.1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I.)$$



Δ.3 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_{\varepsilon\lambda}} + \vec{w} = -D\vec{y}$$

$$mg - F_{\varepsilon\lambda} = -k_1 y \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10 + 100y\ (S.I.)\ \ -0,1m \le y \le +0,1m$$

Στο κάτω μέρος του Σ_2 και σε απόσταση h από την αρχική του θέση ισορροπεί σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 2m$ δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_2 = 200N/m$. Πριν κόψουμε το νήμα εκτρέπουμε το Σ_3 από την θέση ισορροπίας του συμπιέζοντας επιπλέον το ελατήριο κατά $d = \frac{\pi}{5}m$.

Την στιγμή που θεωρήσαμε ως στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το Σ_3 από την θέση αρχικής εκτροπής με αποτέλεσμα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Το Σ_3 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_2, που κινείται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, την χρονική στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από την Θέση ισορροπίας του.

Δ.4 Να βρεθεί το ύψος h και η μεταβολή της ορμής του Σ_2 εξαιτίας της κρούσης.

Το Σ_3 θα εκτελέσει ταλάντωση ξεκινώντας από την ακραία του θέση, άρα σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T_3}{4}$ θα συγκρουστεί με το Σ_2 έχοντας την μέγιστη ταχύτητα του, αφού η κρούση γίνεται στην Θέση ισορροπίας του.

$$k_2 = m_3\omega_3^2 \Rightarrow T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_3}{k_2}} = \frac{\pi}{5}s$$

Για την ελεύθερη πτώση του Σ_2 ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{8}m.$$

$$\upsilon_2 = g\Delta t \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\pi}{2}m/s$$

Η ταχύτητα του Σ_3 πριν την κρούση θα έχει φορά προς τα πάνω και το μέτρο της θα είναι:

$$\upsilon_3 = \omega_3 A_3 = \omega_3 d \Rightarrow \upsilon_3 = 2\pi m/s$$

Για την ελαστική κρούση ισχύει ($\upsilon_2 = +\pi/2m/s$, $\upsilon_3 = -2\pi m/s$):

$$\upsilon_3' = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}\upsilon_3 + \frac{2m_2}{m_2 + m_3}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3' = -\frac{\pi}{3}m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_3 + m_2}\upsilon_2 + \frac{2m_3}{m_2 + m_3}\upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_2' = -\frac{14\pi}{3}m/s$$

Η μεταβολή της ορμής για το Σ_2 θα είναι:

$$\Delta p_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 = -\frac{17\pi}{6}$$

Δ.5 Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Σ_3 μετά την κρούση , προς την ενέργεια της ταλάντωσης του πριν την κρούση.

Η ταχύτητα του Σ_3 μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα για την νέα ταλάντωση του, αφού η θέση μετά την κρούση είναι η Θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2}{\frac{1}{2}m_3\upsilon_3'^2} = \left(\frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3}\right)^2 = \frac{5}{180}$$