
Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου
Επαναληπτικά Θέματα Φυσικής
Προσανατολισμού

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

A.1. Στο πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή στην διάρκεια μιας περιόδου:

(γ) η ολική του ενέργεια παραμένει σταθερή,

A.2. Ένα ιδανικό ρευστό ρέει σε σωλήνα κυλινδρικού σχήματος. Σε μια περιοχή **A** ο σωλήνας έχει διατομή διαμέτρου d και η ροή του ρευστού έχει ταχύτητα μέτρου v_1 . Σε μια άλλη περιοχή **B** ο σωλήνας έχει διατομή διαμέτρου $\frac{d}{2}$ και η ροή του ρευστού ταχύτητα μέτρου v_2 . Για τις ταχύτητες αυτές ισχύει:

$$(a) v_2 = 4v_1$$

A.3. Ένα τραίνο κινείται με σταθερή ταχύτητα και ο μηχανοδηγός θέτει σε λειτουργία την κόρνα που εκπέμπει αρμονικό ήχο σταθερής συχνότητας. Ένας επιβάτης κάθεται στην θέση του στο δεύτερο βαγόνι του τραίνου και αντιλαμβάνεται το ήχο.

(γ) Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο επιβάτης θα είναι ίση με την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός.

A.4. Κατά μήκος μιας χορδής, μήκους L , με σταθερά άκρα δημιουργείται στάσιμο κύμα με 4 δεσμούς (συμπεριλαμβανομένων των άκρων). Το μήκος κύματος των αρχικών κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα είναι:

$$(\gamma)\lambda = \frac{2L}{3}$$

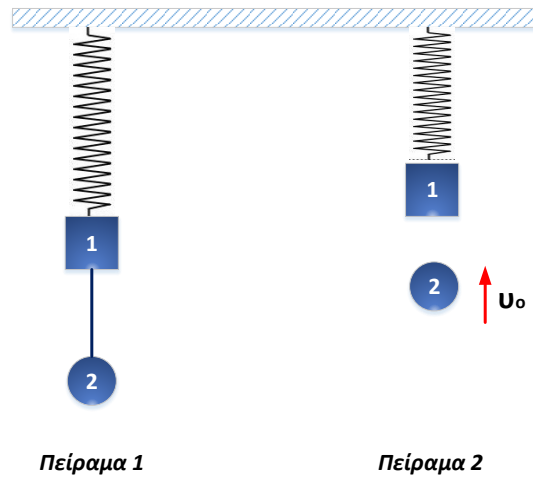
A.5.

- (α) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ο αριθμός των ταλαντώσεων ανά μονάδα χρόνου συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος. **Λάθος**
- (β) Σε φθίνουσα μηχανική ταλάντωση η αύξηση της σταθεράς απόσβεσης b προκαλεί αύξηση του ρυθμού ελάττωσης της ενέργειας της ταλάντωσης. **Σωστό**
- (γ) Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων βρίσκονται στην επιφάνεια ενός ήρεμου υγρού παράγοντας αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους. Τα σημεία της επιφάνειας του υγρού που ισαπέχουν από τις δύο πηγές θα ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος. **Σωστό**
- (δ) η πίεση που οφείλεται στο βάρος ενός ρευστού ονομάζεται υδροστατική πίεση. **Σωστό**
- (ε) Νευτώνεια ρευστά ονομάζονται όλα τα πραγματικά ρευστά. **Λάθος**

Θέμα Β

B.1. Στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k αναρτάται σώμα Σ_1 μάζας m_1 και στην συνέχεια μέσω αβαρούς νήματος αναρτάται και ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Το σύστημα ισορροπεί και κάποια στιγμή κόβουμε ακαριαία το νήμα με αποτέλεσμα το Σ_1 να εκτελεί ταλάντωση πλάτους A . **(Πείραμα 1)**

Ακινητοποιούμε το Σ_1 στην θέση ισορροπίας του και εκτοξεύουμε το Σ_2 κατακόρυφα προς το Σ_1 , με αποτέλεσμα την δημιουργία συσσωματώματος που θα εκτελεί ταλάντωση με πλάτος $A' = 2A$. **(Πείραμα 2)**



Η ταχύτητα \vec{v}_0 του Σ_2 λίγο πριν την κρούση του με το Σ_1 θα έχει μέτρο :

$$\mathbf{a.} \quad g\sqrt{\frac{3(m_1 + m_2)}{k}}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για το πείραμα 1 εφαρμόζω τις συνθήκες ισορροπίας πριν και μετά το κόψιμο του νήματος :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o = m_1g \Rightarrow \Delta l_o = \frac{m_1g}{k}$$

Πριν κοπεί το νήμα το Σ_1 είναι σε ακραία θέση, άρα $A = \Delta l - \Delta l_o \Rightarrow A = \frac{m_2g}{k}$

Για το πείραμα 2 εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής :

$$m_2v_o = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_2v_o}{m_1 + m_2}$$

Για την ταλάντωση του συσσωματώματος εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης στην Θέση ακριβώς μετά την κρούση. Η απομάκρυνση από την ΘΙΤ του συσσωματώματος σε αυτή την θέση θα είναι: $y = \Delta l - \Delta l_o = A$. (Η αρχική θέση ισορροπίας στο πείραμα 1 συμπίπτει με

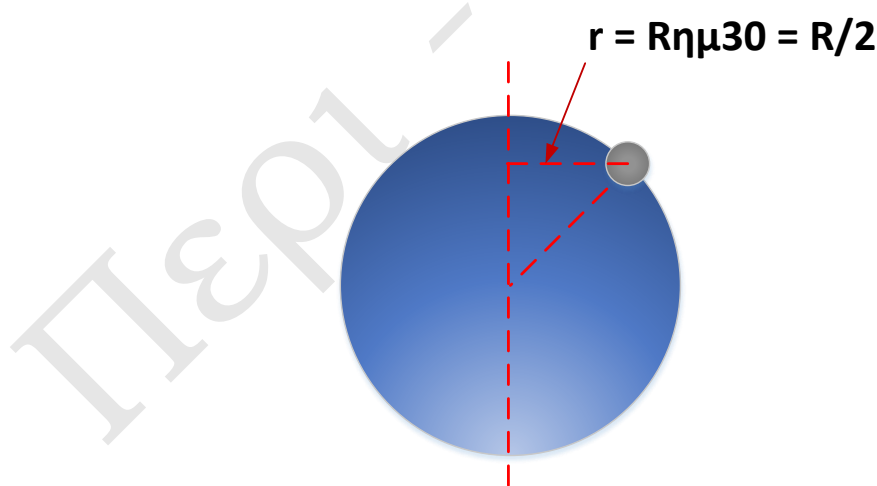
την $\Theta I T$ του συσσωματώματος και η ΘI του Σ_1 είναι η ίδια και στα δύο περιβάλλοντα).

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}k(2A)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$3k\left(\frac{m_2g}{k}\right)^2 = (m_1 + m_2)\left(\frac{m_2v_o}{m_1 + m_2}\right)^2 \Rightarrow v_o = g\sqrt{\frac{3(m_1 + m_2)}{k}}$$

B.2. Μια ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Η σφαίρα περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα f_o , γύρω από τον παραπάνω άξονα.

Από μικρό ύψος αφήνεται να πέσει ένα μικρό σώμα μάζας $m = \frac{M}{5}$ και προσκολλάται στην επιφάνεια της σφαίρας σε σημείο όπου η ευθεία που διέρχεται από το σώμα και το κέντρο της σφαίρας να σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα περιστροφής.



Η συχνότητα περιστροφής του συστήματος σφαίρας - σώματος θα είναι:

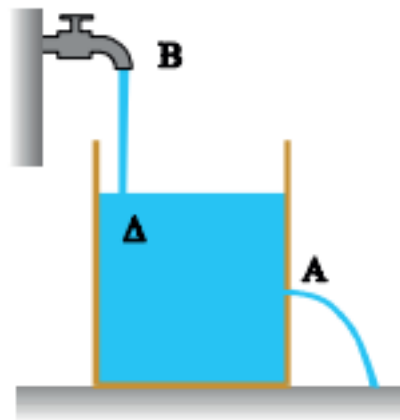
$$\mathbf{a.} \quad f = \frac{8}{9}f_o$$

Επειδή $\Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = 0$ μπορώ να εφαρμόσω την Αρχή Διατήρησης της Στροφομής.

$$L_{\text{ολ(πριν)}} = L_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow I_{cm}\omega_o = (I_{cm} + mr^2)\omega \Rightarrow I_{cm}f_o = (I_{cm} + mr^2)f \Rightarrow$$

$$f = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{\frac{2}{5}MR^2 + \frac{M}{5}\left(\frac{R}{2}\right)^2} f_o \Rightarrow f = \frac{8}{9} f_o$$

B.3. Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει νερό το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό, μέχρι ύψος h πάνω από την βάση του (σημείο Δ). Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και σε ύψος $h_1 = \frac{3h}{4}$ (σημείο A) υπάρχει οπή εμβαδού διατομής A , που είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της βάσης του δοχείου. Μέσω μιας βρύσης με σταθερή παροχή, το ύψος της στήλης του νερού στο δοχείο παραμένει σταθερό.



1. Η παροχή της βρύσης ισούται με:

$$(\beta) A \sqrt{\frac{1}{2}gh}$$

Εφαρμόζω το Bernoulli για την διαδρομή από το σημείο Δ της επιφάνειας του υγρού μέχρι το σημείο A της οπής. Επειδή η διατομή της οπής είναι αρκετά μικρότερη από την διατομή του δοχείου και με δεδομένη την εξίσωση συνέχειας

μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα στο σημείο Δ είναι μηδέν ($v_{\Delta} \simeq 0$).
Επίσης $P_{\Delta} = P_A = P_{atm}$

$$P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho g(h - h_1) = P_A + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{g\frac{h}{2}}$$

Η παροχή της βρύσης θα είναι ίση με την παροχή στο σημείο Α:

$$\Pi_B = \Pi_A = vA = A\sqrt{g\frac{h}{2}}$$

2. Το εμβαδόν διατομής της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή, τη χρονική στιγμή που μόλις η φλέβα φτάνει στο έδαφος, είναι ίσο με:

$$(\gamma) \frac{A}{2}$$

Εφαρμόζω τον Bernoulli από το σημείο Δ της επιφάνειας μέχρι το έδαφος.

$$P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho gh = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v'^2 \Rightarrow v' = \sqrt{2gh}$$

Το εμβαδόν της διατομής της φλέβας φτάνοντας στο έδαφος θα είναι Α':

$$\Pi_A = \Pi \Rightarrow A\sqrt{g\frac{h}{2}} = A'\sqrt{2gh} \Rightarrow A' = \frac{A}{2}$$

Θέμα Γ

Το σημείο Ο γραμμικού ελαστικού μέσου το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$, εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται στην ίδια διεύθυνση, κάθετα στον άξονα $x'x$ και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y = 0,1\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{3}) \quad (S.I.)$$

$$y = 0,1\sqrt{3}\eta\mu(10\pi t - \frac{\pi}{6}) \quad (S.I.)$$

Γ.1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ο είναι :

$$y = 0,2\eta\mu(10\pi t) \quad (S.I.)$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\frac{\pi}{2}$

Το πλάτος ταλάντωσης θα είναι: $A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi} = 0,2m$

Η σύνθετη ταλάντωση θα έχει εξίσωση $y = A'\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3} + \theta)$. Όπου

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}. \text{ Άρα προκύπτει } y = 0,2\eta\mu(10\pi t).$$

Γ.2 Θεωρούμε το σημείο Ο σαν πηγή αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του Ox ημιάξονα. Αν τη χρονική στιγμή t_1 που η πηγή ολοκληρώνει δύο ταλαντώσεις το κύμα φθάνει σε ένα σημείο **Γ** που απέχει από την πηγή $x_\Gamma = 20cm$, να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής.

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $t_1 = 2T$, άρα για το σημείο **Γ** ισχύει ότι $x = 2\lambda = 20cm \Rightarrow \lambda = 10cm = 0,1m$. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος θα είναι:

$$y = 0,2\eta\mu(10\pi t - 20\pi x) \quad (S.I.)$$

Γ.3 Η φάση ταλάντωσης ενός σημείου **Κ** του ελαστικού μέσου την χρονική στιγμή t_1 ισούται με $\phi_k = \frac{3\pi}{2}$. Να υπολογίσετε την διαφορά φάσης ανάμεσα στο **Κ** και στο πιο απομακρυσμένο σημείο **Λ** από την πηγή που αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_2 = 0,7s$. Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή t_2 .

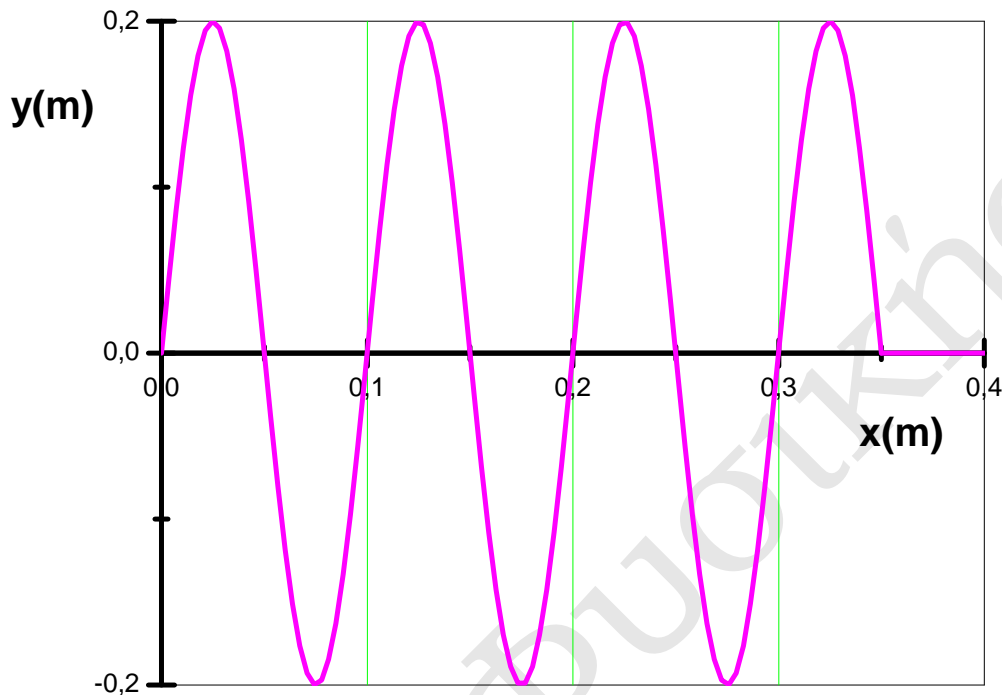
Η φάση του σημείου **Κ** την $t_1 = 2T = 0,4s$ θα είναι $\frac{3\pi}{2} = 10\pi t_1 - 20\pi x_K$

$$\Rightarrow x_K = \frac{1}{8}m.$$

Η ταχύτητα διάδοσης θα είναι $v = \lambda f = 0,5m/s$. Το σημείο **Λ** στο οποίο φτάνει το κύμα την t_2 είναι το $x_\Lambda = vt = 0,35m$. Η ζητούμενη διαφορά

$$\text{φάσης θα είναι: } \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = 4,5\pi rad$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο θα είναι:



- Γ.4** Να γράψετε την εξίσωση ενός δεύτερου κύματος που όταν διαδίδεται κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου με το πρώτο δημιουργεί στάσιμο κύμα. Ποια θα είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει ; Να θεωρήσετε ότι το υλικό σημείο O είναι κοιλία του στάσιμου κύματος και τα κύματα συμβάλλουν την $t = 0$ εκεί.

$$y_2 = 0,2\eta\mu(10\pi t + 20\pi x) \quad (S.I.)$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu(20\pi x)\eta\mu(10\pi t) \quad (S.I.)$$

- Γ.5** Να βρείτε πόσες κοιλίες και πόσοι δεσμοί του στάσιμου κύματος βρίσκονται μεταξύ των σημείων **Κ**, **Λ**.

Για τις κοιλίες ισχύει:

$$x_K < k \cdot \frac{\lambda}{2} < x_\Lambda \Rightarrow k = 3, 4, 5, 6$$

Άρα 4 κοιλίες

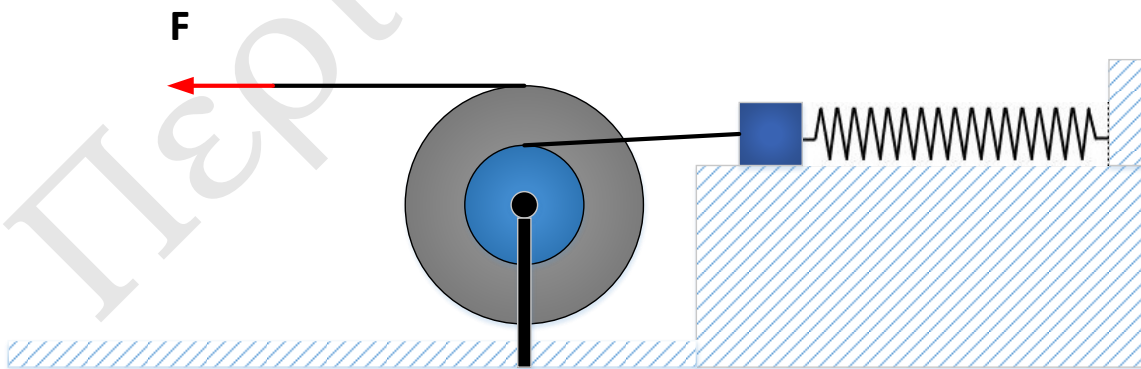
Για τους δεσμούς ισχύει:

$$x_K < (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} < x_\Lambda \Rightarrow k = 3, 4, 5, 6$$

Άρα 4 δεσμοί

Θέμα Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια διπλή τροχαλία που αποτελείται από δύο κολλημένους δίσκους με συνολική μάζα $M = 8kg$ και ακτίνες $R = 0,2m$ και $r = \frac{R}{2}$. Η τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στην περιφέρεια του μικρού δίσκου έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα το οποίο είναι δεμένο σε σώμα Σ μάζας $m = 4kg$. Το Σ είναι βρισκείται πάνω σε λείο επίπεδο και είναι στερεωμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Στην περιφέρεια του μεγάλου δίσκου



είναι τυλιγμένο δεύτερο αβαρές και μη εκτατό νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη \vec{F} . Όταν η δύναμη έχει μέτρο $F_0 = 5N$ το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο παραμορφωμένο κατά $0,1m$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Δ.1 Να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου κατά την ισορροπία του συστήματος.

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για το σώμα και την τροχαλία:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 = F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T'_1 r = T'_2 R \Rightarrow T'_1 = 2T'_2 \quad (2)$$

Όμως $F = T_2 = T'_2$ και $T'_1 = T_1$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $k = 100\text{N/m}$. Άρα η ζητούμενη ενέργεια θα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = 0,5\text{J}$$

Επαναφέρουμε το Σ στην θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος απουσία δύναμης ($F = 0$). Στην συνέχεια ασκούμε στο άκρο του νήματος δύναμη μέτρου $F = 70\text{N}$. Όταν η τροχαλία εκτελέσει $\frac{2}{\pi}$ περιστροφές να βρεθούν:

Όταν η τροχαλία έχει εκτελέσει N στροφές τότε έχει στρίψει κατά $\theta = N \cdot 2\pi$. Το σώμα θα έχει προχωρήσει κατά $x = r\theta$ και το σημείο εφαρμογής της δύναμης κατά $l = R\theta$. Το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l = x$ και οι ταχύτητες τροχαλίας και σώματος θα συνδέονται με την σχέση $v = \omega r$

Δ.2 Η ταχύτητα του σώματος Σ και το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας.

Εφαρμόζουμε για το σύστημα των σωμάτων το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = F \cdot l + (0 - \frac{1}{2}kx^2) \Rightarrow v = 2\text{m/s}, \omega = 20\text{rad/s}$$

Η ζητούμενη στροφορμή θα είναι:

$$L = I\omega = 4\text{kgm}^2/\text{s}$$

Την παραπάνω στιγμή την οποία θεωρούμε ως $t_o = 0$ κόβουμε το νήμα που συγκρατεί το σώμα Σ , οπότε το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ.3 Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας για το Σ θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα αριστερά.

Η αρχική θέση του σώματος είναι μια τυχαία θέση, αφού την στιγμή που κόβεται το νήμα έχει ταχύτητα v και βρίσκεται σε θέση $x = r\theta = 0,4m$. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για τον υπολογισμό του πλάτους A .

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow A = 0,4\sqrt{2}m$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι ίση με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\text{rad/s}$.

$$0,4 = 0,4\sqrt{2}\eta\mu(0 + \phi_o) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Αφού η ταχύτητα είναι θετική την $t = 0$ πρέπει $\text{συν}\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}\text{rad}$

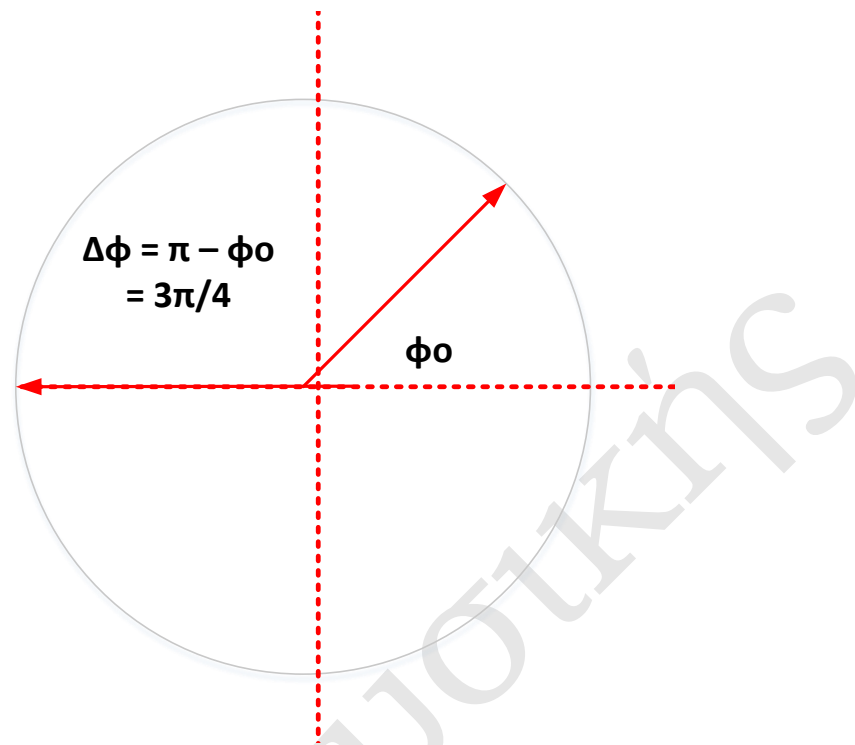
$$x = 0,4\sqrt{2}\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4}) \text{ (S.I.)}$$

* Βέβαια ο υπολογισμός της αρχικής φάσης με χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι σαφώς ευκολότερος.

Δ.4 Να βρείτε την χρονική στιγμή t_1 που το Σ διέρχεται για πρώτη φορά από την Θέση ισορροπίας του. Για την ίδια χρονική στιγμή να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ .

$$0 = 0,4\sqrt{2}\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \dots \Rightarrow t_1 = \frac{3\pi}{20}s$$

*Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε ευκολότερα με την χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος:



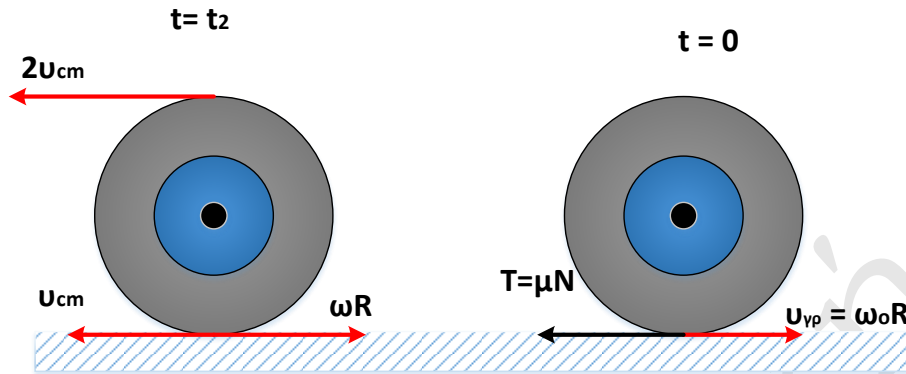
$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi - \phi_0}{5} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$$

Ταυτόχρονα την $t_0 = 0$ καταργούμε την δύναμη F και η τροχαλία χάνει την σύνδεση της με το στήριγμα με αποτέλεσμα να έρθει σε επαφή με το δάπεδο, διατηρώντας σταθερή την κινητικής της κατάσταση μέχρι να έρθει σε επαφή με το δάπεδο, καθώς η υψομετρική διαφορά βάσης και δαπέδου είναι αμελητέα.

Δ.5 Ποια χρονική στιγμή t_2 μετά την $t_0 = 0$ το ανώτερο σημείο της τροχαλίας θα αποκτήσει ταχύτητα διπλάσια από την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ;

Αρχικά η τροχαλία κυλιέται με ολίσθηση αφού η ταχύτητα του σημείου της βάσης είναι διάφορη του μηδενός. Την στιγμή $t_0 = 0$ η τροχαλία έχει ταχύτητα $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow T = M a_{cm} \Rightarrow \mu M g = a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{20}{13} m/s^2$$



$$\Sigma \tau = I_{cm} a_\gamma \Rightarrow \mu M g R = \frac{5}{8} M R^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{160}{13} \text{ rad/s}^2$$

Το ανώτερο σημείο έχει ταχύτητα $v = v_{cm} + \omega R$. Θα έχει αποκτήσει ταχύτητα $v = 2v_{cm}$ όταν:

$$v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} t_2 = (\omega_0 - a_\gamma t_2) R \Rightarrow t_2 = 1 \text{ s}$$

Δ.6 Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας της τροχαλίας στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

$$E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \right) = \frac{320}{13} \text{ J}$$

Όπου βέβαια $v_{cm} = \omega R$

Δ.7 Για $t > t_2$ να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της στατικής τριβής που ασκείται στην τροχαλία.

Η τροχαλία για $t > t_2$ θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε θα πρέπει $v_{cm} = \omega R$, Για να συμβεί αυτό θα πρέπει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau = 0$. Άρα η στατική τριβή θα είναι ίση με μηδέν, γιατί αν υπήρχε στατική τριβή θα επιτάχυνε το κέντρο μάζας και θα επιβράδυνε γωνιακά την τροχαλία, άρα θα κυλιόνταν με ολίσθηση.