

Μεγιστοποίηση του βεληνεκούς σε δοχείο με οπή

Μια περιγραφή που θα διευκολύνει μαθητές-τριες και καθηγητές-τριες στην κατανόηση της σχέσης βεληνεκούς – ύψους οπής σε δοχείο.

Σε πολλά βιβλία που κυκλοφορούν υπάρχουν ασκήσεις που ζητούν τον υπολογισμό του ύψους της οπής δοχείου για την μεγιστοποίηση του βεληνεκούς.

Θεωρώ ότι οι λύσεις που ακολουθούν οι συγγραφείς, στα βοηθήματα τους, **δίνουν μεν αποτέλεσμα** αλλά δύσκολα μπορεί να τους δοθεί οποιαδήποτε φυσική σημασία. Σύμφωνα με αυτές, είτε

υπολογίζεται πρώτα το μέγιστο βεληνεκές και μετά το μέγιστο ύψος είτε ακολουθείται ένα καθαρά μαθηματικός κανόνας για να δώσει το ύψος που δίνει μέγιστο βεληνεκές, **χωρίς σε καμιά από τις δύο περιπτώσεις να περιγράφεται επαρκώς το φαινόμενο.**

Όμως, η λύση στο ζητούμενο οδηγεί πάντα στην συνάρτηση $x = 2\sqrt{(h-y)y}$. Το x γίνεται μέγιστο όταν γίνει μέγιστη η υπόρριζη ποσότητα και άρα αναζητούμε το μέγιστο στην $f(y) = (h-y)y = -y^2 + hy$.

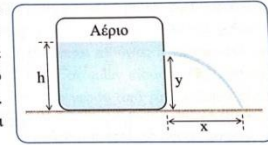
Η συνάρτηση αυτή, όμως, είναι **παραβολή** τύπου $f(x) = ax^2 + bx + c$, με $a < 0$ ($\gamma = 0$) και ως εκ τούτου παρουσιάζει **μέγιστο για $y = \frac{-b}{2a}$** , δηλαδή για $\Delta = 0$ (μηδενική διακρίνουσα). Άρα για $y = \frac{h}{2}$.

Αλλά και η ίδια η $x = 2\sqrt{(h-y)y}$ είναι **παραβολή**. Η παρουσίαση της συνάρτησης αυτής ως παραβολής μπορεί να δώσει στους μαθητές-τριες μας την περιγραφή που χρειάζεται για να **μπορούν να προβλέψουν την πορεία του φαινομένου αν η οπή μπορούσε να κινηθεί ή αν το δοχείο είχε πολλές οπές**. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η διακύμανση του βεληνεκούς συναρτήσει του ύψους. Είναι φανερό από το διάγραμμα ότι κατά την αύξηση του ύψους μέχρι το $h/2$ το βεληνεκές αυξάνεται (μη γραμμικά γιατί

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 5

Το δοχείο του διπλανού σχήματος περιέχει έως ύψος h υγρό πυκνότητας ρ και έχει στο δεξιό πλευρικό τοίχωμά του μικρή οπή σε ύψος y . Η διατομή του δοχείου είναι πολύ μεγάλη σχετικά με το άνοιγμα της οπής. Το αέριο επάνω από το υγρό διατηρείται σε σταθερή πίεση $p_{\text{ατ}}$.



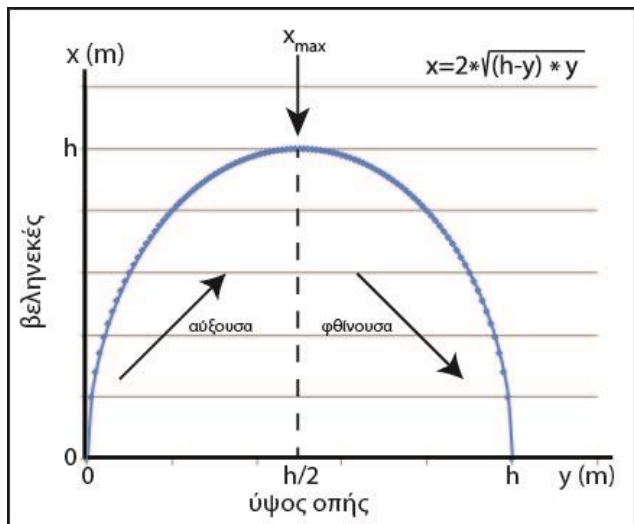
α. Να δείξετε ότι η φλέβα του υγρού που εκρέει από την οπή φθάνει στο έδαφος

σε οριζόντια απόσταση $x = 2\sqrt{\frac{p_{\text{ατ}} - p_{\text{ατ}}}{\rho g} y + (h-y)y}$, όπου $p_{\text{ατ}}$ η ατμοσφαιρική πίεση.

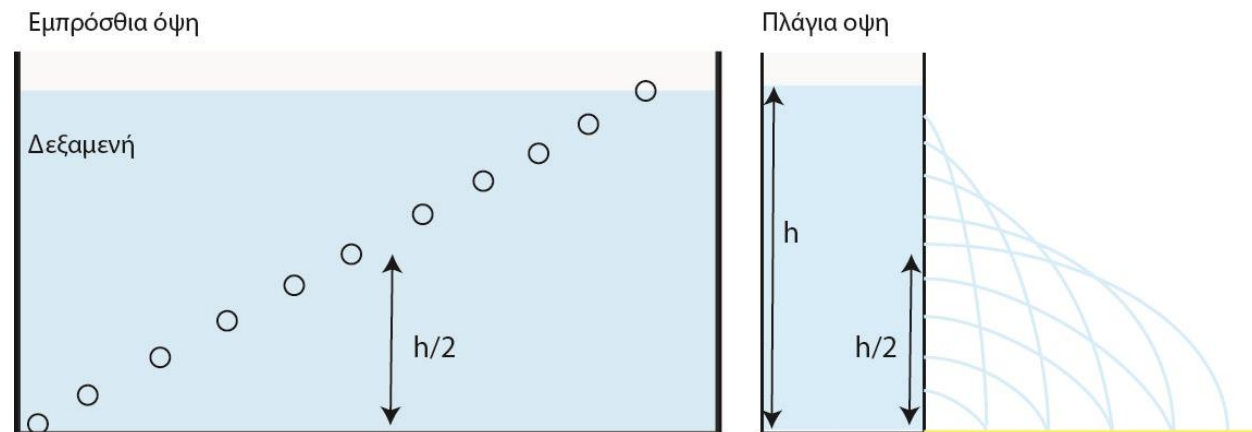
Υποθέστε τώρα ότι το δοχείο είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα.

β. Για ποια τιμή του y η οριζόντια απόσταση x γίνεται μέγιστη;

γ. Πόση είναι η μέγιστη οριζόντια απόσταση x ;

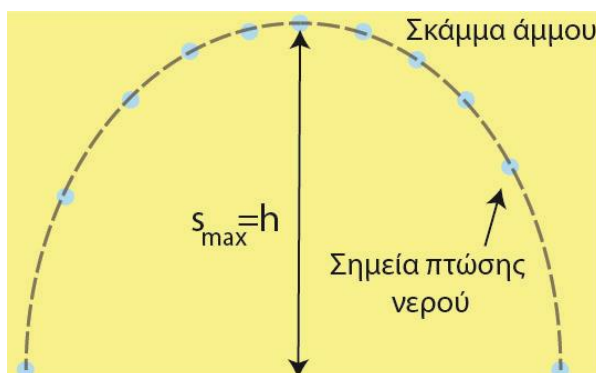


μειώνεται το νερό που υπέρκειται), καταγράφει μέγιστο και μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί όταν φτάσει το πλήρες ύψος (όταν δεν υπέρκειται νερό).



Θα μπορούσαμε να φανταστούμε, για παράδειγμα, μια δεξαμενή στον οριζόντιο άξονα. Κατά μήκος της δεξαμενής έχουμε ανοίξει οπές σε ύψος που συνεχώς αυξάνεται (όπως φαίνεται στο σχήμα παραπάνω). Αφήνοντας το νερό να τρέξει θα παρατηρήσουμε ότι η οπή που βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους έχει το μεγαλύτερο βεληνεκές. Συγχρόνως, μπορούμε να παρατηρήσουμε και το βεληνεκές των υπόλοιπων οπών.

Ακόμα, κοιτάζοντας το σκάμα άμμου που βρίσκεται μπροστά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία πτώσης του νερού βρίσκονται πάνω στην τροχιά παραβολής, όπως είδαμε παραπάνω.



Όπως είναι φανερό, δεν αμφισβητώ την ορθότητα της επίλυσης της άσκησης αλλά προτείνω μια άλλη διδακτική προσέγγιση.

Θεωρώ ότι η μελέτη που προτείνεται παραπάνω **έχει φυσική σημασία** αφού η χρήση μιας τέτοιου είδους **παραβολής** μας βοηθάει να **περιγράψουμε το φαινόμενο** και να **κατανοήσουμε την σχέση βεληνεκούς-ύψους όπης**.

Με εκτίμηση,

Άγγελος Σοφιανίδης

Φυσικός MEd, PhDc

email: angelos.sofianidis@gmail.com

Υγ: Οι μαθητές-τριες έχουν διδαχθεί και μπορούν να επικαλεστούν την σχετική μελέτη (Άλγεβρα Α' Λυκείου, Κεφάλαιο 7.3 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$).