# **Διαγώνισμα** *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

# Ταλαντώσεις/Κύματα/Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις



## Θέμα Α

**Α.1.** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την επίδραση κατάλληλης δύναμης. Την χρονική στιγμή $t_o = 0$ διέρχεται από την Θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την μέγιστη αρνητική απομάκρυνση.

**(β)** Τα διανύσματα της ταχύτητας και της συνισταμένης δύναμης είναι ομόρροπα στο χρονικό διάστημα $\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$.

**Α.2.** Τα μεγάλα τεχνικά έργα ( κρεμαστές γέφυρες, ουρανοξύστες κλπ) κατασκευάζονται έτσι ώστε:

**(β)** να αποφεύγεται το φαινόμενο του συντονισμού όταν γίνεται σεισμός.

**Α.3.** Υλικό σημείο μάζας $m$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου από την Θέση ισορροπίας δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο από την εξίσωση:

$$x = A\eta\mu(\omega t) + A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα $[0, \frac{T}{8}]$, όπου Τ η περίοδο της ταλάντωσης, είναι:

**(α)** $-\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

**Α.4.** Αρμονικό κύμα, μήκους κύματος $\lambda$ και πλάτους $A = \frac{\lambda}{4}$, διαδίδεται κατά μήκος του άξονα $x'Ox$, προς την θετική φορά του άξονα. Το υλικό σημείο Ο($x = 0$) εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t)$. Η μέγιστη απόσταση δύο υλικών σημείων του μέσου που ταλαντώνονται με διαφορά φάσης $\pi$ είναι:

**(α)** $d_{max} = \dfrac{\lambda\sqrt{2}}{2}$

**Α.5.**

**(α)** Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με την επίδραση δύναμης απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$. Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους είναι ανεξάρτητος της σταθεράς $b$. **Λάθος**

**(β)** Η περίοδος ενός διακροτήματος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της απομάκρυνσης από την Θέση ισορροπίας, για ένα σώμα που εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και σε ίδια διεύθυνση με παραπλήσιες συχνότητες. **Λάθος**

**(γ)** Ο ήχος είναι ένα διαμήκες κύμα. **Σωστό**

**(δ)** Το φαινόμενο $Doppler$ είναι αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης ανάμεσα σε μια σημειακή πηγή ηχητικών κυμάτων και έναν παρατηρητή. **Σωστό**

**(ε)** Σε ένα στάσιμο κύμα όλα τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος. **Λάθος**

# Θέμα Β

**Β.1.** Σώμα μάζας $m$ είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k$ που έχει το άλλο άκρο του στερεωμένο στην οροφή του σχολικού εργαστηρίου. Με κατάλληλο μηχανισμό στο σώμα ασκείται συνεχώς περιοδική δύναμη με εξίσωση $F_\delta = F_o\sigma\upsilon\nu(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$ η οποία το εξαναγκάζει να εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους Α.

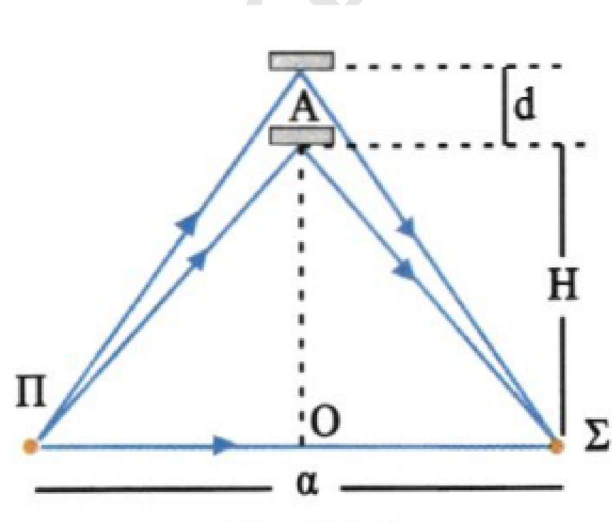
Αν $U_{max}$ , $K_{max}$ η μέγιστες τιμές της Δυναμικής και της Κινητικής ενέργειας ταλάντωσης του σώματος τότε:

$$\textbf{β.}\ U_{max} = \frac{K_{max}}{2}$$

*Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση με την συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης* $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$\frac{K_{max}}{U_{max}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{m\omega^2 A^2}{kA^2} = 2$$

**Β.2.** Σε κάποιο σημείο στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούμε κύματα με την σημειακή πηγή Π. Στο σημείο Σ της επιφάνειας, σε απόσταση α από την πηγή, τα κύματα μπορούν να φτάσουν απευθείας ή να ανακλαστούν στον ανακλαστήρα Α που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού και πάνω στην μεσοκάθετο του τμήματος ΠΣ.




Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα παρατηρούμε πως όταν απέχει απόσταση $H$ από το Ο, το σημείο Σ παραμένει συνέχεια ακίνητο, ενώ για πρώτη φορά, κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος, όταν ο ανακλαστήρας μετακινείται κατά $d$. Το μήκος κύματος ισούται με:

**(β)** $2\sqrt{4(H+d)^2 + a^2} - 2\sqrt{4H^2 + a^2}$

*Στην αρχική θέση του ανακλαστήρα το σημείο Ο είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής. Δηλαδή πρέπει (ΠΑΣ) - (ΠΣ)* $= \dfrac{\lambda}{2}$

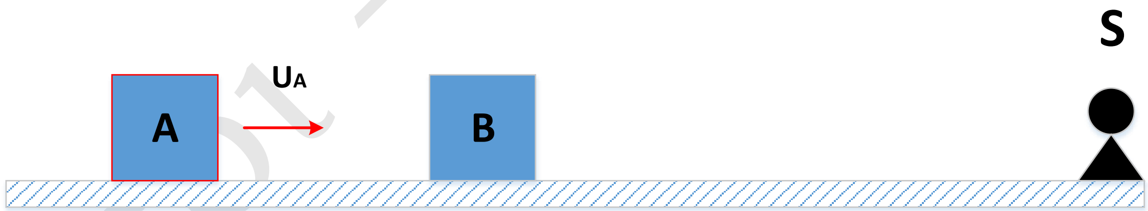
$$2\sqrt{H^2 + (a/2)^2} - a = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sqrt{4H^2 + a^2} - a = \frac{\lambda}{2}$$

*Στην νέα θέση του ανακλαστήρα το σημείο Ο είναι το πρώτο σημείο ενισχυτικής συμβολής. Δηλαδή πρέπει (ΠΑΣ) - (ΠΣ)* $= \lambda$

$$2\sqrt{(H + d)^2 + (a/2)^2} - a = \lambda \Rightarrow \sqrt{4(H + d)^2 + a^2} - a = \lambda$$

*Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσης βρίσκω το μήκος κύματος.*

**Β.3.** Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1$ και $m_2$ αντίστοιχα , φέρουν ανιχνευτές ηχητικών κυμάτων και βρίσκονται μπροστά από ηχητική πηγή $S$, που εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_s$. Τα σώματα βρίσκονται πάνω σε λείο επίπεδο και το Α συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Β. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η θέση των σωμάτων πριν την κρούση.




Ο ανιχνευτής του σώματος Α πριν την κρούση καταγράφει συχνότητα $f_A = \dfrac{11 f_s}{10}$ και ο ανιχνευτής του σώματος Β μετά την κρούση καταγράφει συχνότητα $f'_B = \dfrac{21 f_s}{20}$. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων θα είναι:

$$\textbf{(β)}\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

*Η συχνότητα που καταγράφει ο Α πριν την κρούση:*

$$\frac{\upsilon+\upsilon_1}{\upsilon}f_s=\frac{11}{10}f_s\Rightarrow\upsilon_1=\frac{\upsilon}{10}$$

*Η συχνότητα που καταγράφει ο Β μετά την κρούση:*

$$\frac{\upsilon+\upsilon_2'}{\upsilon}f_s=\frac{21}{10}f_s\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{\upsilon}{20}$$

*Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική:*

$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$$

# Θέμα Γ

Δύο πηγές αρμονικών κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=10m$. Οι πηγές ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξίσωση της μορφής $y=10\eta\mu(\omega t)$ με $y$ σε $cm$, εκτελώντας 2 ταλαντώσεις το δευτερόλεπτο, δημιουργώντας εγκάρσια επιφανειακά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon_\delta=4m/s$

Σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού που απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις $r_1=12m$ και $r_2=8m$, επιπλέει μια σημαδούρα μάζας $m$.

*Από τα δεδομένα μπορώ να υπολογίσω τα ακόλουθα:* $f=2Hz$, $\upsilon_\delta=\lambda f\Rightarrow\lambda=2m$. *Αφού* $r_1-r_2=4=2\lambda$ *το σημείο Σ θα είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.*

**Γ.1** Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται η σημαδούρα και την χρονική στιγμή που αποκτά για πρώτη φορά την μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

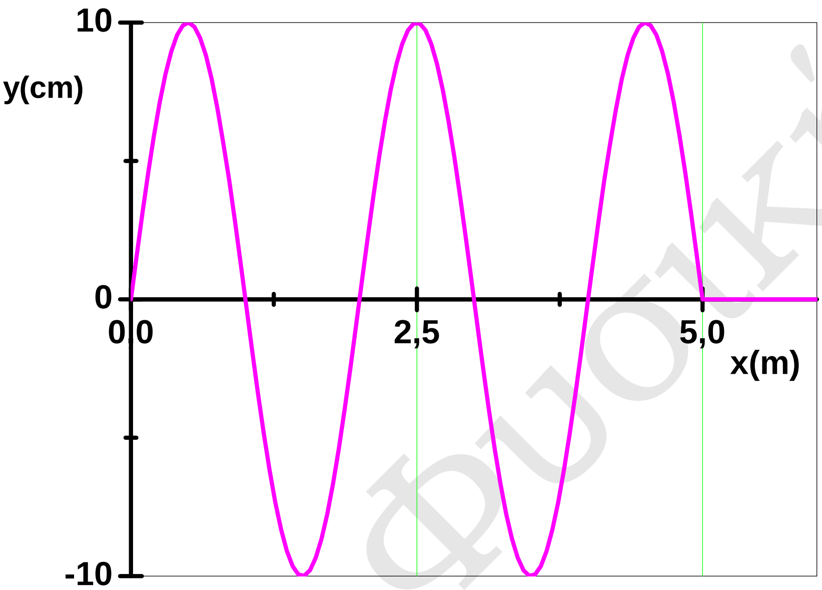
*Η σημαδούρα ξεκινά την ταλάντωση όταν φτάνει το κύμα από την πλησιέστερη πηγή.* $t_2=\frac{r_2}{\upsilon_\delta}=2s$.

*Το δεύτερο κύμα θα φτάσει την χρονική στιγμή* $t_1=\frac{r_1}{\upsilon_\delta}=3s$.

*Η στιγμή που η σημαδούρα θα έχει αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης θα είναι:* $t=t_1+\frac{T}{4}=3,125s$

**Γ.2** Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος από την $\Pi_1$ την χρονική στιγμή $t = 1,25s$. Θεωρήστε ότι τα δύο κύματα δεν συμβάλλουν σε κανένα σημείο της επιφάνειας μέχρι την στιγμή αυτή.

*Το κύμα θα έχει προχωρήσει κατά* $x = \upsilon_\delta t = 5m = 2\lambda + \frac{\lambda}{2}$



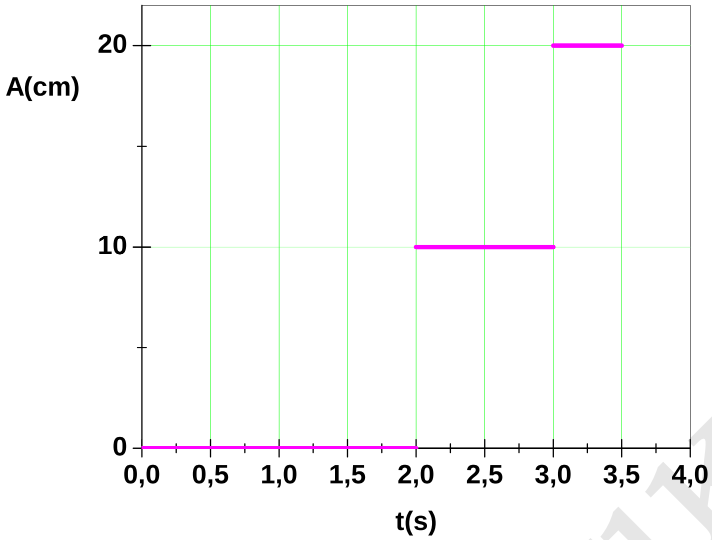

**Γ.3** Να βρείτε το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ που παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

*Για ακίνητο σημείο του τμήματος ΚΛ πρέπει:* $r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ *και* $r_2 + r_1 = d$. *Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει:* $r_2 = N + 5,5$

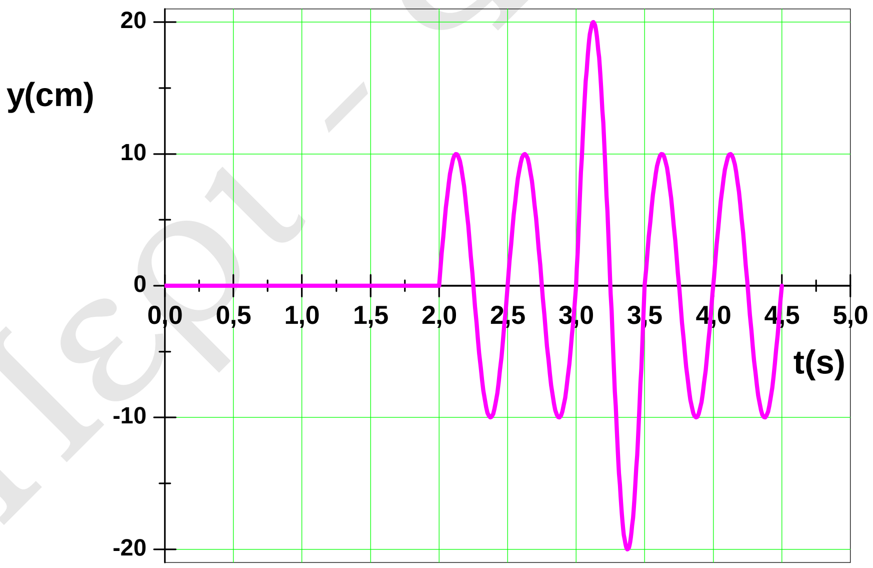
$$0 \le r_2 \le d \Rightarrow 0 \le N + 5,5 \le 10 \Rightarrow -5,5 \le N \le 4,5$$

*Άρα N = -5, -4 , -3 , -2, -1 , 0 ,1 ,2, 3, 4 , άρα 10 σημεία αποσβεστικής συμβολής.*

**Γ.4** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης της σημαδούρας από την θέση ισορροπίας, σε συνάρτηση με τον χρόνο, από την $t_o = 0$ μέχρι τη στιγμή $t = 3,5s$




**Γ.5** Έστω ότι την χρονική στιγμή $t_1 = 1,5sec$ η $\Pi_2$ ακινητοποιείται ακαριαία στη θέση ισορροπίας της. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της σημαδούρας από την θέση ισορροπίας της, σε συνάρτηση με τον χρόνο, από την $t_o = 0$ μέχρι την $t = 4,5s$.




**Γ.6** Τοποθετώ την σημαδούρα σε ένα σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΚΛ και αλλάζω τις ρυθμίσεις λειτουργίας της $\Pi_2$. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης της $\Pi_2$, ωστε η σημαδούρα να παραμένει ακίνητη μετά την συμβολή των δύο κυμάτων. **Θέμα Bonus**

*Για να μένει η σημαδούρα ακίνητη, πρέπει όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ($r_1 = r_2$) να είναι σημεία αποσβεστικής συμβολής. Αν η ταλάντωση της $\Pi_2$ έχει εξίσωση $y_2 = A\eta\mu(\omega t + \phi_o)$, τότε εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας για τις δύο ταλαντώσεις ενός σημείου της μεσοκαθέτου.*

$$y = y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2 \Rightarrow A\eta\mu 2\pi(ft - \frac{r_1}{\lambda}) = -A\eta\mu 2\pi(ft - \frac{r_2}{\lambda} + \frac{\phi_o}{2\pi})$$

$$\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda} - (\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda} + \phi_o) = 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow \phi_o = 2\kappa\pi + \pi, \quad \kappa = 0, 1, 2, ...$$

*Άρα η $\Pi_2$ πρέπει να είναι σε αντίθεση φάσης με την $\Pi_1$: $y_2 = 10\eta\mu(\omega t + \pi)$*

# Θέμα Δ

Σε ύψος $h$ από το έδαφος ισορροπεί σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή ερευνητικού εργαστηρίου. Ένα δεύτερο σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2$ εκτοξεύεται με ταχύτητα $\upsilon_o = 5m/s$ από το έδαφος και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με το $\Sigma_1$ την χρονική στιγμή $t_o = 0$. Αμέσως μετά την κρούση το $\Sigma_2$ ακινητοποιείται στιγμιαία και το $\Sigma_1$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την διάρκεια της ταλάντωσης είναι ίση με $8J$.

Στο σώμα $\Sigma_1$ είναι προσαρμοσμένη αβαρής σημειακή πηγή ηχητικών κυμάτων συχνότητας $f_S = 680Hz$, ενώ στο $\Sigma_2$ είναι προσαρμοσμένος αβαρής ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων.

***Από τα δεδομένα υπολογίζουμε*** *την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου κατά την διάρκεια της ταλάντωσης: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Rightarrow \Delta l_{max} = 0,4m$.*

*Εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας στην θέση ισορροπίας του $\Sigma_1$: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = 0,1m$.*

*Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του $\Sigma_1$ θα είναι ίσο με: $A = \Delta l_{max} - \Delta l_o = 0,3m$. Η συχνότητα της ταλάντωσης θα ισούται* *με* $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} = 10 rad/s$ *Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το* $\Sigma_1$ *μετά την κρούση θα είναι* $\upsilon_1' = \upsilon_{max} = \omega A = 3m/s$.

*Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, αφού τα σώματα έχουν την ίδια μάζα θα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Άρα* $\upsilon_2' = \upsilon_1 = 0$ *και* $\upsilon_1' = \upsilon_2 = 3m/s$

**Δ.1** Να υπολογιστεί η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής του $\Sigma_2$ την στιγμή της εκτόξευσης.

*Την στιγμή της εκτόξευσης ισχύει:*

$$f = \frac{\upsilon + \upsilon_o}{\upsilon} f_s \Rightarrow f = 690Hz$$

**Δ.2** Να υπολογιστεί η αρχική απόσταση $h$ των σωμάτων.

*Εφαρμόζω το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας κατά την άνοδο του* $\Sigma_2$

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon_o^2 = -m_2 g h \Rightarrow h = 0,8m$$

**Δ.3** Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία το $\Sigma_1$ διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $0,05m$.

*Θεωρώντας ως θετική την φορά της ταχύτητας του* $\Sigma_1$ *μετά την κρούση η εξίσωση της ταλάντωσης θα είναι:* $y = 0,3\eta\mu(10t) \quad (S.I.)$

*Όταν το ελατήριο ειναι συσπειρωμένο κατά* $0,05m$ *το σώμα βρίσκεται* $0,05m$ *πάνω από την Θέση φυσικού μήκους, άρα στην θέση* $y = 0,15m$ *για πρώτη φορά.*

$$0,15 = 0,3\eta\mu(10t) \Rightarrow \eta\mu(10t) = \frac{1}{2} \Rightarrow 10t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{60} s$$

**Δ.4** Να βρεθεί η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής σε συνάρτηση με τον χρόνο στο χρονικό διάστημα $0 < t \leq 0,4s$.

*Το* $\Sigma_1$ *εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση ταχύτητας στο* $S.I.$ $\upsilon_1 = 3\sigma\upsilon\nu(10t)$ *και το* $\Sigma_2$ *θα εκτελεί ελεύθερη πτώση με εξίσωση ταχύτητας στο* $S.I.$ $\upsilon_2 = gt = 10t$ *( το* $\Sigma_2$ *φτάνει στο έδαφος την στιγμή* $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0,4s$*). Άρα η χρονική εξίσωση της συχνότητας που καταγράφει ο ανιχνευτής στο χρονικό διάστημα της πτώσης του* $\Sigma_2$ *θα είναι:*

$$f = \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon + \upsilon_1} f_s \Rightarrow f(t) = \frac{340 - 10t}{340 + 3\sigma\upsilon\nu(10t)} 680 \quad (S.I.)$$

Πάνω στο $\Sigma_1$ είναι στερεωμένο το αριστερό άκρο ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο κύμα με ταχύτητα διάδοσης $\upsilon_\delta = \dfrac{10}{\pi} m/s$.

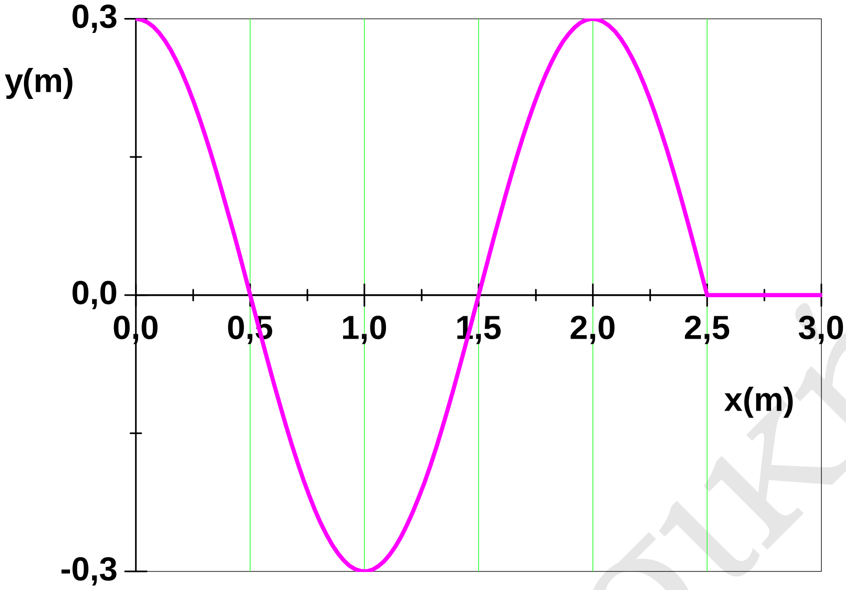
**Δ.5** Να γραφτεί η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται στην χορδή, θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$ )το αριστερό άκρο της χορδής.

*Η συχνότητα του κύματος είναι ίδια με την συχνότητα ταλάντωσης του* $\Sigma_1$ $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{5}{\pi} Hz$*, άρα το μήκος κύματος υπολογίζεται* $\upsilon_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = 2m$*.*
*Η εξίσωση του κύματος θα είναι:*

$$y = 0,3\eta\mu(10t - \pi x) \quad (S.I.)$$

**Δ.6** Να σχεδιάσετε την μορφή της χορδής την χρονική στιγμή που το $\Sigma_1$ διέρχεται για τρίτη φορά από θέση στην οποία το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι μέγιστο.

*Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή η επιτάχυνση είναι μέγιστη κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από ακραία θέση. Η τρίτη φορά που το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο είναι την στιγμή* $T + \dfrac{T}{4}$*, την στιγμή αυτή το κύμα έχει προχωρήσει κατά* $x = \lambda + \dfrac{\lambda}{4} = 2,5m$




***** Στην πραγματικότητα το κύμα που θα διαδοθεί στην χορδή δεν θα έχει σταθερό πλάτος, αφού η ενέργεια της ταλάντωσης θα μειώνεται καθώς το κύμα διαδίδεται στην χορδή, το κύμα θα έχει μειούμενο πλάτος. Βέβαια για τα ερωτήματα Δ.5 και Δ.6. έχουμε θεωρήσει ότι το πλάτος θα παραμένει σταθερό, πράγμα που θα γίνονταν αν το $\Sigma_1$ εκτελούσε εξαναγκασμένη ταλάντωση. Σε επόμενη εκδοχή του διαγωνίσματος θα υπάρξει διόρθωση!***

***Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός***