Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κύματα - Φαινόμενο Doppler

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται μια διαταραχή σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο:

(γ) είναι σταθερή και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου.

Α.2. Δυο σύγχρονες πηγές δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα πλάτους Α και μήκους κύματος λ. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού σε αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές αντίστοιχα. Αν ξέρουμε ότι ισχύει $|r_1 - r_2| = 11\lambda$, τότε το Σ ταλαντώνεται με πλάτος:

(β)$2A$

Α.3. Σε μια ελαστική χορδή ΟΓ, μήκους L, δημιουργείται στάσιμο κύμα με 7 δεσμούς ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αρμονικών κυμάτων. Το ένα άκρο Ο της χορδής κινείται ελεύθερο, ενώ το άλλο άκρο Γ είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το μήκος κύματος των κυμάτων που συνέβαλαν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα είναι:

(δ) $\lambda = \dfrac{4L}{13}$

Α.4. Σε ένα παρατηρητή φτάνουν στην μονάδα του χρόνου περισσότερα μέγιστα από όσα παράγει στον ίδιο χρόνο μια ηχητική πηγή, όταν,

(δ) ο παρατηρητής πλησιάζει προς την ακίνητη πηγή.

Α.5.

(α) Για τη ταχύτητα διάδοσης ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου ισχύει ότι αν διπλασιαστεί η συχνότητα του κύματος διπλασιάζεται και η ταχύτητά του. **Λάθος**

(β) Η πηγή έχει τη μεγαλύτερη φάση από τη φάση όλων των σημείων ενός αρμονικού κύματος. **Σωστό**

(γ) Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται στην περίπτωση που τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου. **Σωστό**

(δ) Σε μια χορδή έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα. Η διαφορά φάσης της ταλάντωσης δύο σημείων του μέσου είναι ανάλογη της απόστασης των σημείων. **Λάθος**

(ε) Ένας παρατηρητής που κατευθύνεται προς ακίνητη πηγή αντιλαμβάνεται τον ήχο με μήκος κύματος μικρότερο από αυτό που θα αντιλαμβανόταν αν ήταν ακίνητος. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους. Σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού απέχει αποστάσεις r_1, r_2 αντίστοιχα από τις δύο πηγές. Μεταβάλλοντας ταυτόχρονα την συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών μπορούμε να καθορίσουμε το είδος της συμβολής στο σημείο Σ.

Εάν $f_{1(min)}$ η ελάχιστη δυνατή συχνότητα ταλάντωσης των δυο πηγών ώστε τα κύματα να συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο Σ και $f_{2(min)}$ η ελάχιστη δυνατή συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών ώστε τα κύματα να συμβάλλουν αποσβεστικά στο σημείο Σ, τότε ο λόγος $\dfrac{f_{1(min)}}{f_{2(min)}}$ είναι ίσος με:

(γ) 2

Για να συμβάλλουν τα κύματα ενισχυτικά σε ένα σημείο πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda = N\frac{\upsilon_\delta}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{N\upsilon_\delta}{|r_1 - r_2|} \Rightarrow f_{1(min)} = \frac{\upsilon_\delta}{|r_1 - r_2|}$$

Για να συμβάλλουν τα κύματα αποσβεστικά σε ένα σημείο πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2} = (2N+1)\frac{\upsilon_\delta}{2f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{(2N+1)\upsilon_\delta}{2|r_1 - r_2|} \Rightarrow f_{2(min)} = \frac{\upsilon_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

Οπότε προκύπτει:

$$\frac{f_{1(min)}}{f_{2(max)}} = 2$$

B.2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο, κατά μήκος του ημιάξονα Ox, δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση $x = 0$. Δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου βρίσκονται αριστερά και δεξιά του πρώτου δεσμού, μετά τη θέση $x = 0$, σε αποστάσεις $\frac{\lambda}{6}$ και $\frac{\lambda}{12}$ από αυτόν αντίστοιχα, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων $\frac{\upsilon_K}{\upsilon_\Lambda}$ των σημείων αυτών είναι:

(α) $\sqrt{3}$

Το σημείο Κ βρίσκεται στην θέση $x_k = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{\lambda}{12}$, *ενώ το σημείο Λ βρίσκεται στην θέση* $x_\Lambda = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{3}$. *Το πλάτος ταλάντωσης για ένα σημείο δίνεται από την παρακάτω σχέση.*

$$A' = 2A|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}|$$

Άρα ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{\upsilon_k}{\upsilon_\Lambda} = \frac{\omega A'_k}{\omega A'_\Lambda} = \frac{2A|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}|}{2A|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}|} = \frac{|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}|}{|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}|} = \sqrt{3}$$

Β.3. Μια ηχητική πηγή S κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon_s}$ ακολουθώντας ένας παρατηρητής A που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα $\vec{\upsilon_A}$. Ο παρατηρητής λαμβάνει κύματα απευθείας από την πηγή και από ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων σε κατακόρυφο εμπόδιο που βρίσκεται στην πορεία του. Έτσι ακούει ήχο με ένταση που αυξομειώνεται.

Μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του ήχου το τύμπανο του αυτιού του παρατηρητή εκτελεί N ταλαντώσεις. Αν σας δίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας του παρατηρητή είναι $\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{40}$, όπου $\upsilon_{\eta\chi}$ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα, τότε:

(β)$N = 20$

Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται απευθείας από την πηγή ηχητικά κύματα συχνότητας f_1

$$f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s$$

Τα κύματα που ανακλώνται απο τον κατακόρυφο τοίχο έχουν συχνότητα f_s'

$$f_s' = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s$$

Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται εξαιτίας της ανάκλασης στον τοίχο ηχητικά κύματα συχνότητας f_2

$$f_2 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s' = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s$$

Το τύμπανο του αυτιού του παρατηρητή εκτελεί σύνθετη ταλάντωση Β ε-ίδους και εμφανίζονται διακροτήματα. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\bar{f}$ *και η συχνότητα διακροτήματος* f_δ.

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} \qquad f_\delta = |f_1 - f_2|$$

Οι ζητούμενες ταλαντώσεις θα δίνονται:

$$N = \frac{T_\delta}{T} = \frac{\bar{f}}{f_\delta} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|} = 20$$

Θέμα Γ

Αρμονικό κύμα με εξίσωση $y = 0,2\eta\mu\pi(5t - 0,04x)$ (y σε m, t σε s, x σε cm) διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$.

Γ.1 να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου.

Από την εξίσωση του κύματος προκύπτει ότι: $\omega = 5\pi rad/s \Rightarrow f = 2,5Hz$, $\lambda = 50cm = 0,5m$. *Άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι:* $\upsilon_\delta = \lambda f = 1,25m/s$. *Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι:* $\upsilon_{max} = \omega A = \pi m/s$

Γ.2 να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες: **(i)** το στιγμιότυπο του κύματος στο θετικό ημιάξονα τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,7s$.

ii) τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ ($x_M = 1,75m$) από τη Θ.Ι. του σε συνάρτηση με τον χρόνο.

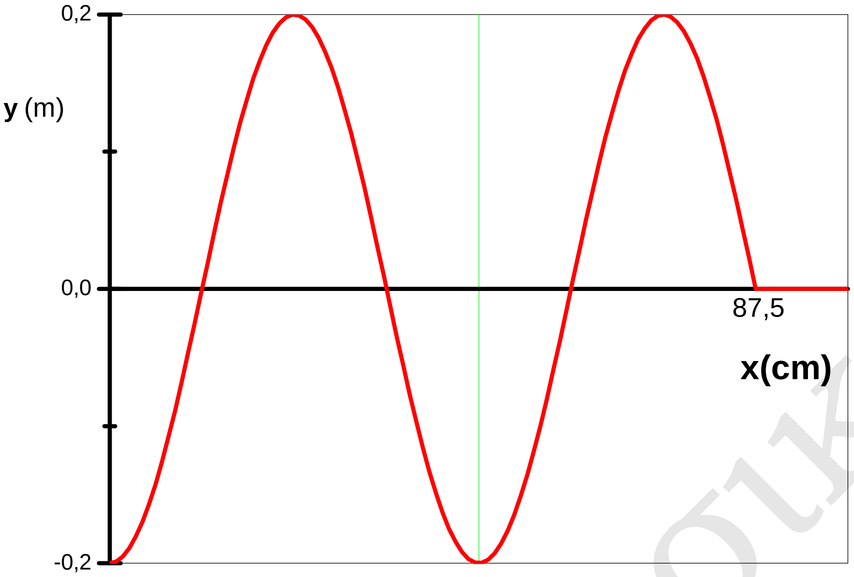
Γ.3 να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Μ και Λ ($x_\Lambda = 2,5m$) του ελαστικού μέσου για κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσης και των δύο σημείων.

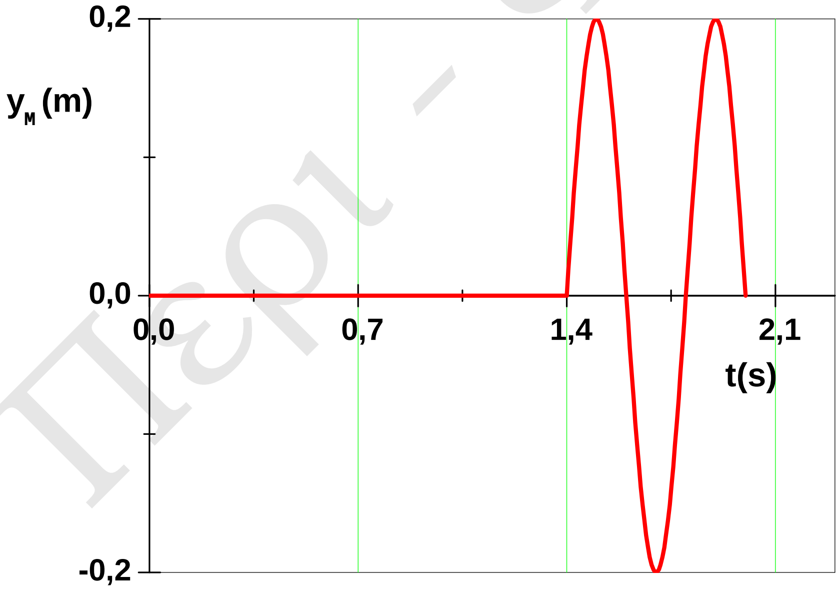
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi}{T}\frac{\Delta x}{\upsilon_\delta} = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = 3\pi rad$$

Γ.4 να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του από τη Θ.Ι. του ισούται με $0,1m$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για την ταλάντωση του Μ.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = 0,5\sqrt{3}\pi m/s$$


0,2
y (m)
0,0
-0,2
87,5
x(cm)


0,2
y_M (m)
0,0
-0,2
0,0
0,7
1,4
2,1
t(s)

[6+8+5+6 μονάδες]

Θέμα Δ

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 5m$. Οι πηγές ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$ να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση εκτελώντας 5 ταλαντώσεις κάθε δευτερόλεπτο.

Οι πηγές δημιουργούν αρμονικά κύματα ίσου πλάτους που συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο **(Σ)** απέχει κατά $r_{1(\Sigma)} = 3m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_{2(\Sigma)} > r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_2. Μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, το **(Σ)** ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$y_\Sigma = 0,1\eta\mu\pi(10t - \frac{35}{3}), (S.I.)$$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $\upsilon = 3m/s$.

Δ.1 Να υπολογίσετε την απόσταση του **(Σ)** από την Π_2

Η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι $f = 5Hz$ και το μήκος κύματος θα είναι: $\upsilon_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,6m$

$$2\pi\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} = \pi\frac{35}{3} \Rightarrow r_2 = 4m$$

Δ.2 Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο τμήμα ΑΒ. *Για ένα σημείο Σ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος θα ισχύει:*

$$r_1 + r_2 = d \quad r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2}$$

$$0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \le d \Rightarrow -\frac{d}{2} \le N\frac{\lambda}{2} \le \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \le N \le \frac{d}{\lambda}$$

$$-8,33 \le N \le 8,33 \Rightarrow N = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Άρα υπάρχουν 17 σημεία.

Δ.3 Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου **(Κ)** το οποίο βρίσκεται επί του ΑΒ και ανήκει στην ίδια υπερβολή με το **(Σ)**.

Η υπερβολή στην οποία ανήκει το σημείο Σ έχει γεωμετρικό τόπο $r_1 - r_2 = 1$. *Για το σημείο Κ ισχύει ότι:* $r_{1(k)} + r_{2(k)} = d = 5$ *και* $r_{1(k)} - r_{2(k)} = 1$. *Άρα για το σημείο Κ ισχύει* $r_{1(k)} = 3m$ *και* $r_{2(k)} = 2m$

Δ.4 Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου **(Κ)** σε συνάρτηση με τον χρόνο. *Η απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο για το υλικό σημείο Κ θα δίνεται:*

- $y = 0$ για $0 \leq t < (2/3)s$
- $y = 0,1\eta\mu\pi(10t - \dfrac{20}{3})$ για $(2/3)s \leq t < 1s$
- $y = 0,1\eta\mu\pi(10t - \dfrac{25}{3})$ για $t \geq 1s$

Η ταχύτητα ταλάντωσης περιγράφετε από:

- $v = 0$ για $0 \leq t < (2/3)s$
- $v = \pi\sigma\upsilon\nu\pi(10t - \dfrac{20}{3})$ για $(2/3)s \leq t < 1s$
- $v = \pi\sigma\upsilon\nu\pi(10t - \dfrac{25}{3})$ για $t \geq 1s$

Δ.5 Να υπολογίσετε την ελάχιστη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης των πηγών ώστε να διπλασιαστεί το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό.

Για να διπλασιαστεί το πλάτος ταλάντωσης του Σ θα πρέπει να γίνει σημείο ενισχυτικής συμβολής, άρα:

$$r_2 - r_1 = N\lambda = N\frac{\upsilon_\delta}{f} \Rightarrow f = \frac{N\upsilon_\delta}{r_2 - r_1} \Rightarrow f = 3 \cdot N$$

Άρα η μεταβολή θα είναι $\Delta f = f' - f = 3N - 5$. *Οπότε η ελάχιστη μεταβολή θα αντιστοιχεί στο Ν=2, η συχνότητα θα πρέπει να αυξηθεί κατά* $1Hz$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός