
1ο Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου
Τετάρτη 12 Αυγούστου 2015

Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις - Ομάδα Β

Θέμα Α

A.1. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση και η επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή:

(α) έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο

A.2. Στα ελεύθερα άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων, με σταθερές k_1 και $k_2 = 2k_1$, είναι δεμένα, αντίστοιχα δύο σώματα Α και Β, της ίδιας μάζας. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Α είναι διπλάσια από την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Β. Το πηλίκο των πλάτων των ταλαντώσεων των δύο σωμάτων είναι:

$$\textbf{(δ)} \frac{A_1}{A_2} = 2\sqrt{2}$$

A.3. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Στο διάγραμμα του σχήματος παριστάνεται γραφικά η κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. Γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος έχει θετική αλγεβρική τιμή.

Η χρονική εξίσωση της Κινητικής Ενέργειας στο (S.I.) θα είναι:

$$\textbf{(β)} K = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

A.4. Δύο σφαίρες Α και Β συγκρούονται ελαστικά. Η σφαίρα Β είναι αρχικά ακίνητη. Μετά την κρούση η σφαίρα Α κινείται σε κατεύθυνση ίδια με την αρχική κατεύθυνση της με ταχύτητα σχεδόν ίσου μέτρου με την αρχική ταχύτητα της, όταν:

(β) η σφαίρα Α έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από την σφαίρα Β,

A.5.

(α) Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η ενέργεια μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο. **Λάθος**

(β) Κατά την διάρκεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης οι τιμές της Δυναμικής Ενέργειας ικανοποιούν την συνθήκη $-E \leq U \leq E$, όπου E η ενέργεια της ταλάντωσης. **Λάθος**

(γ) Στην διάρκεια μιας πλήρους ταλάντωσης η Κινητική και η Δυναμική Ενέργεια είναι ίσες σε δύο χρονικές στιγμές. **Λάθος**

(δ) Η κρούση δύο πρωτονίων ονομάζεται σκέδαση. **Σωστό**

(ε) Η σταθερά επαναφοράς της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη της περιόδου. **Λάθος**

Θέμα Β

B.1. Σφαίρα Α, μάζας m_1 , που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2 . Ο λόγος $\frac{K'_1}{K'_2}$ των τελικών κινητικών ενεργειών των δύο σφαιρών είναι:

$$(a) \frac{(m_1 - m_2)^2}{4m_1m_2}$$

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και της Ενέργειας η ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση θα είναι:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Οπότε ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{K'_1}{K'_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v'^2_1}{\frac{1}{2}m_2 v'^2_2} = \frac{m_1 (m_1 - m_2)^2}{m_2 (2m_1)^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}$$

B.2. Μικρό σώμα μάζας $m = 2\text{ kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και γωνιακής συχνότητας ω , σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση κατάλληλης δύναμης $\Sigma F = f(x)$, που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα.

Σας είναι γνωστό ότι το σώμα την χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται επιβραδυνόμενο από την θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο στο (S.I.) θα είναι:

(α) $x = 0,4\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4})$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $A = 0,4\text{ m}$, $\Sigma F_{\max} = DA = 20\text{ N} \Rightarrow D = 50\text{ N/m}$. Άρα $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5\text{ rad/s}$.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα κινείται προς την ακραία θετική θέση αφού επιβραδύνεται. Έχει θετική ταχύτητα

$$\frac{\sqrt{2}A}{2} = A\eta\mu(0 + \phi_o) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Αφού } v > 0 \Rightarrow \sin\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}$$

B.3. Σφαίρα Α μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2 . Οι σφαίρες μετά την κρούση κινούνται στις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα (κάτοψη). Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών θα είναι:

$$(\beta) \frac{m_1}{m_2} = 1$$

Από την αρχή διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow m_1v^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \Rightarrow v^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2'^2$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\text{ολ(πριν)}} &= \vec{P}_{\text{ολ(μετα)}} \Rightarrow m_1v = \sqrt{(m_1v_1')^2 + (m_2v_2')^2 + 2m_1v_1'm_2v_2'\sin(60+30)} \\ &\Rightarrow m_1^2v^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2 \Rightarrow v^2 = v_1'^2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2v_2'^2 \end{aligned}$$

Για να ισχύουν ταυτόχρονα οι παραπάνω σχέσεις πρέπει $\frac{m_1}{m_2} = 1$

Θέμα Γ

Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f = \frac{5}{2\pi}\text{Hz}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση, κινείται επιβραδυνόμενο και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με την κινητική ενέργεια του σώματος. Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος έχει μέτρο $a_{\text{max}} = 12,5\text{m/s}^2$.

$$a_{\text{max}} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{a_{\text{max}}}{(2\pi f)^2} = 0,5\text{m}$$

Στην θέση που η κινητική ενέργεια είναι ίση με την δυναμική εφαρμόζω την ΑΔΕΤ.

$$E = K + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}A = A\eta\mu(0 + \phi_o) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

Επειδή βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και επιβραδύνεται, κινείται προς ακραία θέση, άρα έχει θετική ταχύτητα. Άρα $\sin\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}$

Γ.1. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Οι εξισώσεις κίνησης στο $S.I.$ είναι:

$$x = 0,5\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4})$$

$$v = 2,5\sigma\nu(5t + \frac{\pi}{4})$$

$$x = -12,5\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4})$$

Γ.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος και το πηλίκο της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης προς την κινητική ενέργεια του σώματος, όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα έχει μέτρο $\Sigma F = 12,5N$.

Η σταθερά επαναφοράς θα δίνεται: $D = m\omega^2 = 50\text{rad/s}$

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow |x| = \frac{|\Sigma F|}{D} = 0,25m$$

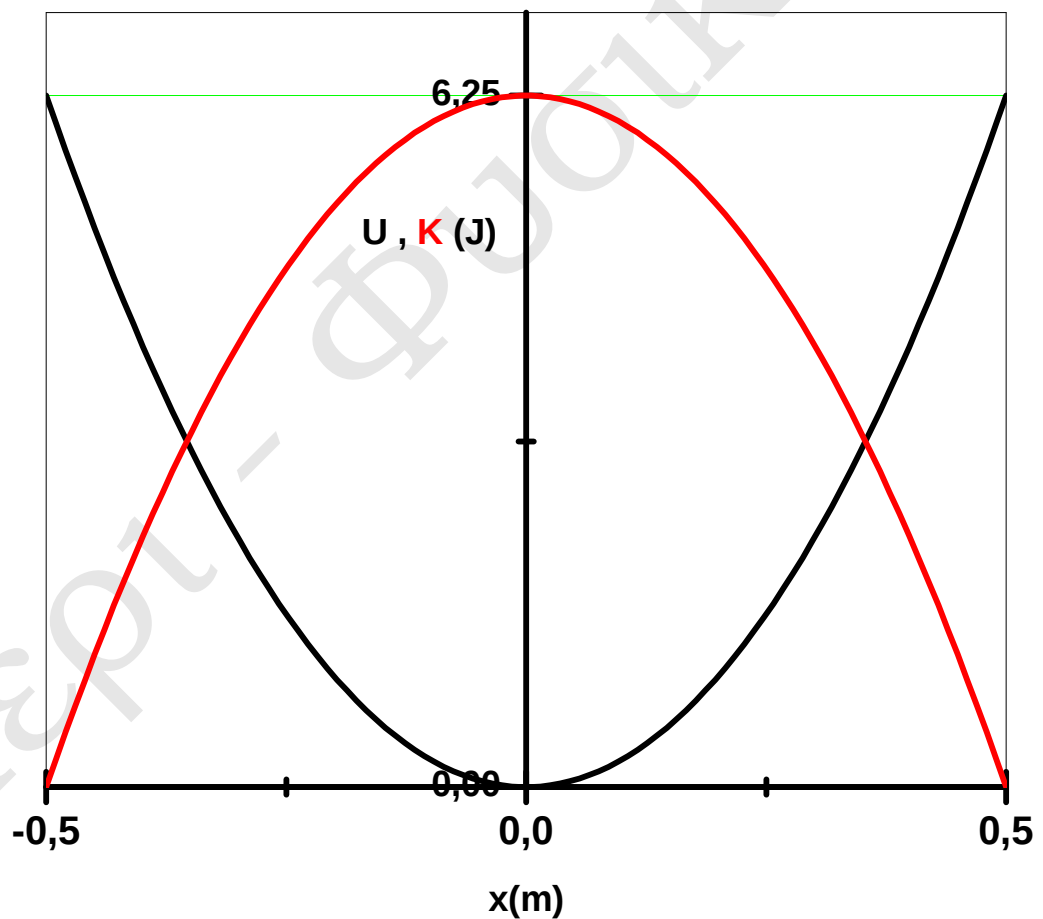
Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε.Τ. για τον υπολογισμό της ταχύτητας την παραπάνω στιγμή:

$$E = K + U \Rightarrow \dots \Rightarrow v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm 1,25\sqrt{3}m/s$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{\omega^2x^2}{v^2} = \frac{1}{3}$$

Γ.3. Να γράψετε τις εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε σε κοινούς βαθμολογημένους άξονες τα αντίστοιχα διαγράμματα.

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U = 25x^2(S.I.), \quad -0,5m \leq x \leq +0,5m$$



$$\frac{1}{2}DA^2 = K + U \Rightarrow K = 6,25 - 25x^2(S.I.) \quad -0,5m \leq x \leq +0,5m$$

Γ.4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας την χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{60}s$, καθώς και τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας του σώματος.

Για την χρονική στιγμή που μας δίνεται από τις εξισώσεις του **Γ.1.** προκύπτει: $x = 0,25m$ και $v = 0,25\sqrt{3}m/s$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma Fv = +Dxv = 12,5\sqrt{3}J/s$$

$$\frac{dK}{dt} = -Dxv = -DA\eta\mu(\omega t + \phi_o)\omega A\sigma\nu(\omega t + \phi_o) = \frac{DA^2\omega}{2}\eta\mu 2(\omega t + \phi_o)$$

$$\text{Άρα } \frac{dK}{dt}(max) = \frac{DA^2\omega}{2} = 31,25J/s$$

Θέμα Δ

Το πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ στερεώνεται στην οροφή ερευνητικού εργαστηρίου, ενώ στο κάτω άκρο του ισορροπεί δεμένο σώμα μάζας $m = 4kg$. Από την θέση αυτή εκτοξεύουμε το σώμα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $v_o = 4m/s$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης.

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στην θέση φυσικού μήκους, το σώμα στην θέση ισορροπίας και το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας.

Για την Θέση ισορροπίας ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = 0,1m$$

Για την τυχαία θέση ισχύει ότι:

$$\Sigma F = mg - F_{\epsilon\lambda} = Mg - k(\Delta l + x) \Rightarrow \Sigma F = -kx$$

Άρα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$.

Αφού η εκτόξευση γίνεται από την Θέση Ισορροπίας η ταχύτητα του σώματος θα είναι η μέγιστη $v_o = \omega A \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$

Τη στιγμή που το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l_1 = 0,3 \text{ m}$ και το σώμα κινείται προς την κατώτερη ακραία θέση της ταλάντωσης του, σφηνώνεται σε αυτό με ταχύτητα $v_2 = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$ ένα βλήμα, μάζας $m_2 = 2 \text{ kg}$, το οποίο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω.

Δ.2. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης την οποία θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα που θα προκύψει από την κρούση,

Υπολογίζουμε την θέση και την ταχύτητα του σώματος m πριν την κρούση του. Βρίσκεται σε επιμήκυνση Δl_1 , άρα σε θέση $x = \Delta l_1 - \Delta l = 0,2 \text{ m}$. Θα εφαρμόσουμε την ΑΔΕΤ για την ταχύτητα.

$$E = K + U \Rightarrow \dots \Rightarrow v_1^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow v_1 = \pm 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{P}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow mv_1 - m_2v_2 = (m + m_2)V \Rightarrow V = 0$$

Άρα η θέση αμέσως μετά την κρούση θα είναι η ακραία θέση για την ταλάντωση του συσσωματώματος. Λαμβάνουμε υπόψη ότι η ΘΙΤ για το συσσωμάτωμα δεν θα συμπίπτει με την ΘΙΤ του σώματος m . Για την νέα θέση ισορροπίας θα ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_2 = (m + m_2)g \Rightarrow \Delta l_2 = 0,15 \text{ m}$$

Άρα η νέα ΘΙΤ θα βρίσκεται $0,15 \text{ m}$ κάτω από την Θέση Φυσικού μήκους.

Άρα $A' = \Delta l_1 - \Delta l_2 = 0,15 \text{ m}$

- Δ.3.** Να υπολογίσετε το πηλίκο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς, προς την μέγιστη δύναμη του ελατηρίου.

$$\frac{F_{\text{επ}}}{F_{\text{ελ}}} = \frac{DA'}{k\Delta l_{\text{max}}} = \frac{A'}{\Delta l_1} = \frac{1}{2}$$

- Δ.4.** το ρυθμό μεταβολής της ορμής, το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, την χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος m_1 .

Όταν το συσσωμάτωμα διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχική ΘΙΤ η απομάκρυνση από την Θέση ισορροπίας του είναι $x = -0,05\text{m}$. Θα θεωρήσω ως θετική την φορά προς τα κάτω. Υπολογίζω την ταχύτητα με την ΑΔΕΤ. Λαμβάνω υπόψη ότι $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m_1}} = 10\frac{\sqrt{6}}{3}\text{rad/s}$

$$E = K + U \Rightarrow \dots \Rightarrow v^2 = \omega'^2(A'^2 - x^2) \Rightarrow v = -2\frac{\sqrt{3}}{3}\text{m/s}$$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = +20\text{N}$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv = -40\frac{\sqrt{3}}{3}\text{J/s}$$

- Δ.5.** Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση, έως την χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία για δεύτερη φορά.

$$W = U_{\text{ελ(αρχ)}} - U_{\text{ελ(τελ)}} = \frac{1}{2}k(\Delta l_2 - A')^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l_1)^2 = -18\text{J}$$

Επιμέλεια: Καραδημητρίου Μιχάλης, MSc Φυσικός

