Επαναληπτικό Διαγώνισμα *Β Τάξης Λυκείου*
Παρασκευή 15 Μάη 2015
Μηχανική/Θερμοδυναμική/Ηλεκτρικό Πεδίο

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Στην άκρη ενός τραπεζιού βρίσκονται δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2. Κάποια χρονική στιγμή η σφαίρα Σ_1 εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα υ_o , ενώ η σφαίρα Σ_2 αφήνεται ελεύθερη. Πρώτη στο πάτωμα θα φτάσει η:

(γ) Και οι δύο σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα

Α.2 Δύο όμοια θετικά φορτισμένα σωματίδια συγκρατούνται ακίνητα σε απόσταση r μεταξύ τους. Το σύστημα των δύο φορτίων είναι μονωμένο και και η δυναμική ενέργεια του είναι $100J$. Αν αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν, όταν βρεθούν απόσταση $2r$, το κάθε ένα από αυτά θα έχει κινητική ενέργεια K_1 και K_2 για τις οποίες θα ισχύει:

(α) $K_1 = K_2 = 25J$

Α.2 Μια μηχανή Carnot που λειτουργεί ανάμεσα στις θερμοκρασίες T_c και T_h έχει συντελεστή αποδοσης e_1. Τετραπλασιάζουμε την θερμοκρασία T_h, διατηρώντας σταθερή την θερμοκρασία T_c, οπότε ο συντελεστής απόδοσης της παραπάνω μηχανής γίνεται e_2. Η σχέση που συνδέει τους δύο συντελεστές απόδοσης είναι:

(β) $e_1 = 4e_2 - 3$

Α.4. Επίπεδος πυκνωτής φορτίζεται με πηγή τάση V και αποκτά ενέργεια U. Αν ο ίδιος πυκνωτής φορτιστεί με πηγή τάσης $2V$ τότε:

(γ) η ενέργεια του θα τετραπλασιαστεί.

Α.5. *Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.* **[5 × 1 = 5 μονάδες]**

(α) Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται πάντα σταθερή. **Λάθος**

(β) Ένα νετρόνιο που εκτοξεύεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. **Σωστό**

(γ) Κατά την αδιαβατική εκτόνωση ενός ιδανικού αερίου η εσωτερική ενέργεια του αερίου μειώνεται. **Σωστό**

(δ) Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση η ορμή παραμένει σταθερή. **Λάθος**

(ε) Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο της Θερμοδυναμικής μια θερμική μηχανή Carnot μετατρέπει την θερμότητα που λαμβάνει εξ ολοκλήρου σε μηχανικό έργο. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού δείχνουν ακριβώς $12h$. Οι δύο δείκτες θα συμπίπτουν κάθε:

(γ) $\dfrac{12}{11}h$

Για να συναντηθούν οι δύο δείκτες θα πρέπει για κάθε θετικό ακέραιο k να ισχύει:

$$|\theta_\lambda - \theta_\omega| = |\omega_\lambda t - \omega_\omega t| = 2k\pi \Rightarrow (|\omega_\lambda - \omega_\omega|)t = 2k\pi \Rightarrow |\frac{2\pi}{T_\lambda} - \frac{2\pi}{T_\omega}|t = 2k\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{T_\lambda T_\omega}{|T_\omega - T_\lambda|}k = \frac{1 \cdot 12}{|12-1|}k \Rightarrow t = \frac{12}{11}k$$

Οι δείκτες θα συναντηθούν τις χρονικές στιγμές $\frac{12}{11}h, 2\frac{24}{11}h, \frac{36}{11}h, \ldots$ *Άρα κάθε* $\frac{12}{11}h$.

Β.2 Ένα αυτοκίνητο με μάζα Μ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πάνω σε οριζόντιο δρόμο. Στην πορεία του συναντά ακίνητο κιβώτιο που έχει μάζα $m_1 = \frac{M}{20}$ και συγκρούεται με αυτό πλαστικά δημιουργώντας συσσωμάτωμα. Το συσσωμάτωμα αυτοκίνητο - κιβώτιο, αποκτά ταχύτητα $\vec{V}$, αμέσως μετά την κρούση. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του αυτοκινήτου κατά την κρούση είναι ίσο με:

$$\textbf{(γ)}\ \frac{M\upsilon}{21}$$

Για την πλαστική κρούση του μονωμένου συστήματος θα εφαρμόσω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για να υπολογίσω την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$$\vec{P}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ(μετά)}} = M\upsilon + 0 = (m_1 + M)V \Rightarrow M\upsilon = \frac{21}{20}M \Rightarrow V = \frac{20}{21}\upsilon$$

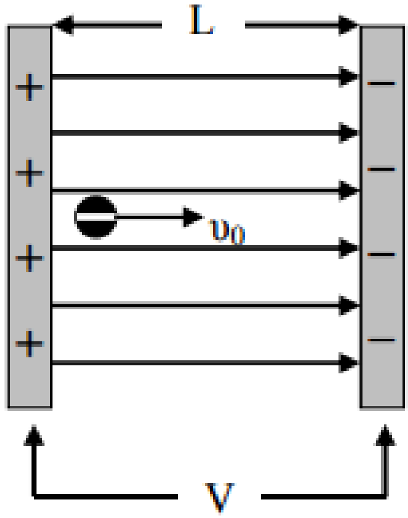
Η μεταβολή της ορμής για το αυτοκίνητο κατά την κρούση θα υπολογίζεται:

$$\Delta P = MV - M\upsilon = M\frac{20}{21}\upsilon - M\upsilon = -\frac{M\upsilon}{21}$$

Β.3. Φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και αρνητικού φορτίου q βάλλεται με αρχική ταχύτητα υ_o παράλληλη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης $\vec{E}$ και ομόρροπα με αυτές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το πεδίο δημιουργείται ανάμεσα σε δύο φορτισμένες πλάκες που παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού V και απέχουν απόσταση L. Οι βαρυτική αλληλεπίδραση θεωρείται αμελητέα. Η απόσταση που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\textbf{(γ)}\ x = \frac{\upsilon_o^2 mL}{2|q|V}$$



Στο σωματίδιο ασκείται επιβραδύνουσα ηλεκτρική δύναμη ($\vec{F} = q\vec{E}$)με αποτέλεσμα να επιβραδύνεται μέχρι να σταματήσει, εξαιτίας του έργου της δύναμης ($W = -Fx$). Η ένταση του ομογενούς πεδίου είναι $E = E = \dfrac{V}{L}$. Εφαρμόζω το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -|q|Ex \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = |q|\frac{V}{L}x \Rightarrow x = \frac{\upsilon_o^2 mL}{2|q|V}$$

Θέμα Γ

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου που βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α(P_o, V_o, T_o), υπόκειται στην παρακάτω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή:

- ΑΒ: Ισοβαρής εκτόνωση μέχρι να διπλασιάσει τον όγκο του,

$$P_B = P_A = P_o, \quad \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = 2T_A = 2T_o$$

- ΒΓ: ισόθερμη εκτόνωση μέχρι να διπλασιάσει τον όγκο που είχε στην κατάσταση Β,

$$T_B = T_\Gamma = 2T_o, \quad P_B V_B = P_\Gamma V_\Gamma \Rightarrow V_\Gamma = 2V_B = 4V_o$$

- ΓΔ: ισόχωρη ψύξη μέχρι το αέριο να αποκτήσει την θερμοκρασία που είχε στην κατάσταση Α

$$V_\Gamma = V_\Delta = 4V_o, \quad \frac{P_\Gamma}{T_\Gamma} = \frac{P_\Delta}{T_\Delta} \Rightarrow P_\Delta = \frac{P_\Gamma}{2} = \frac{P_o}{4}$$

- ΔΑ : ισόθερμη συμπίεση μέχρι να επανέλθει στην αρχική κατάσταση Α.

$$T_\Delta = T_A = T_o$$

Γ.1 Να γίνει γραφική παράσταση Πίεσης - Όγκου και Όγκου - Θερμοκρασίας, με τις τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας εκφρασμένες συναρτήσει των P_o, V_o, T_o.

Γ.2 Να υπολογίσετε την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας σε κάθε μία από τις παραπάνω μεταβολές σε συνάρτηση με τα δεδομένα της κατάστασης Α.

$$\Delta U_{AB} = nC_v\Delta T = \frac{3}{2}nR(2T_o - T_o) \Rightarrow \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}nRT_o = \frac{3}{2}P_oV_o$$

$$\Delta U_{B\Gamma} = nC_v\Delta T = 0$$

$$\Delta U_{\Gamma\Delta} = nC_v\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_o - 2T_o) \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -\frac{3}{2}nRT_o = -\frac{3}{2}P_oV_o$$

$$\Delta U_{\Delta A} = nC_v\Delta T = 0$$

Γ.3 Να υπολογίσετε την θερμότητα και το έργο που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον σε κάθε μεταβολή σε συνάρτηση με τα δεδομένα της κατάστασης Α.

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R$$

$$Q_{AB} = nC_p\Delta T = \frac{5}{2}nR(2T_o - T_o) \Rightarrow Q_{AB} = \frac{5}{2}nRT_o = \frac{5}{2}P_oV_o$$

$$W_{AB} = P\Delta V = P_o(2V_o - V_o) \Rightarrow W_{AB} = P_oV_o$$

$$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} = nRT_B ln(\frac{V_\Gamma}{V_B}) = nR2T_o ln2 = 1,4P_oV_o$$

$$W_{\Gamma\Delta} = 0, Q_{\Gamma\Delta} = \Delta U_{\Gamma\Delta}$$

$$Q_{\Delta A} = W_{\Delta A} = nRT_\Delta ln(\frac{V_A}{V_\Delta}) = nRT_o ln(\frac{1}{4}) = -1,4P_oV_o$$

Γ.4 Να υπολογίσετε τον συντελεστή απόδοσης θερμικής μηχανής που λειτουργεί σύμφωνα με τον παραπάνω αντιστρεπτό κύκλο. Να εξηγήσεις γιατί δεν παραβιάζετε ο 2ος Θερμοδυναμικός Νόμος.

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta A}}{Q_{AB} + Q_{B\Gamma}} \simeq 0,26$$

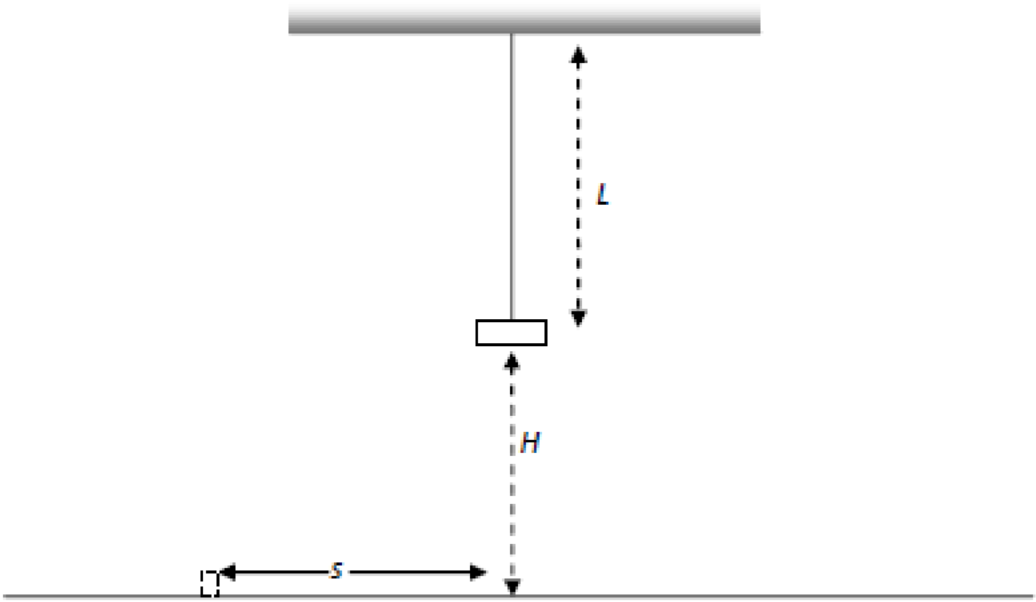
Σύμφωνα με τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο μια θερμική μηχανή δεν μπορεί να μετατρέπει εξ ολοκλήρου την θερμότητα σε μηχανικό έργο, δηλαδή ο συντελεστής απόδοσης πρέπει να είναι πάντα μικρότερος της μονάδας.

Γ.5 Να υπολογίσετε την απόδοση μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ισόθερμων του παραπάνω κύκλου.

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 0,5$$

Θέμα Δ

Ένα σώμα μάζας $M = 9kg$ είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους $L = 2m$ και ισορροπεί κατακόρυφα, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το σώμα φέρει έναν εκρηκτικό μηχανισμό, αποτελούμενο από ένα ελατήριο, που όταν ενεργοποιείται διασπά το αρχικό σώμα σε δύο μέρη που το ένα έχει μάζα $m_1 = 6kg$ και παραμένει δεμένο στην άκρη του νήματος, ενώ το άλλο μάζας m_2 εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα. Αν το σώμα M βρίσκεται αρχικά σε ύψος $H = 1,8m$ από την επιφάνεια του εδάφους και μετά την έκρηξη το m_2 φθάνει σε οριζόντια απόσταση $s = 6m$ από την αρχική θέση να υπολογίσετε:



Δ.1 Την ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος m_2 και την ταχύτητα με την οποία ξεκινά την κίνηση του το σώμα m_1.

Μετά την έκρηξη το Σ_2 εκτελεί οριζόντια βολή για την οποία ισχύει:

$$y = H = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t = 0,6s \Rightarrow x = S = \upsilon_2 t \Rightarrow \upsilon_2 = 10m/s$$

Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την έκρηξη του αρχικού σώματος, με τα Σ_1 και Σ_2 να φεύγουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και $m_2 = M - m_1 = 3kg$:

$$\vec{P}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow 0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = 5m/s$$

Δ.2 Την ενέργεια που απελευθερώθηκε στο περιβάλλον από τον εκρηκτικό μηχανισμό.

$$E = 0 - (\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2) = -75J$$

Δ.3 Την μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος μετά την έκρηξη και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος στην ίδια θέση.

Για την μέγιστη ανύψωση του σώματος κατά h από την κατακόρυφη θέση (γωνιακή εκτροπή θ εφαρμόζω το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow\Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -m_1gh \Rightarrow h = \frac{\upsilon_1^2}{2g} = \frac{5}{4}m.$$

Κάνοντας το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{L-h}{L} = \frac{3}{8} \Rightarrow \theta = 68^o$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στην θέση αυτή είναι:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \Sigma F = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(W_x)^2 + (F_K)^2} = W_x = m_1 g \sigma \upsilon \nu \theta$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t} = 22,5 kg \cdot m/s^2$$

* *Είναι προφανές ότι πρέπει να γίνει σχήμα και να αναλυθεί το βάρος σε συνιστώσες. Στον άξονα y η συνισταμένη δύναμη είναι η κεντρομόλος F_K η οποία είναι μηδέν στην θέση μέγιστης εκτροπής λόγο μηδενισμού της ταχύτητας.*

Δ.4 Την δύναμη που ασκεί το νήμα στην οροφή πριν και αμέσως μετά την έκρηξη.

Η δύναμη που ασκεί το νήμα στην οροφή είναι ίση με την δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα που είναι δεμένο στο άκρο του γιατί το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό.

Πριν την κρούση το σώμα M ισορροπεί $\Sigma F = 0 \Rightarrow T = Mg = 90N$

Μετά την κρούση το m_1 θα εκτελέσει κυκλική κίνηση άρα $\Sigma F_y = F_K \Rightarrow$ $T' - m_1 g = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{L} \Rightarrow T' = 135N$

Δ.5 Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_2 την στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

Το m_2 φτάνει στο έδαφος την χρονική στιγμή $t = 0,6s$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_2^2 + (gt)^2} = \sqrt{136} m/s$$