
6ο Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Μηχανική Στερεού Σώματος

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Στις ημιτελείς προτάσεις Α.1 - Α.4 να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της πρότασης και, δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία τη συμπληρώνει σωστά. **[4 × 5 = 20 μονάδες]**

A.1. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού

(β) είναι μονόμετρο μέγεθος

A.2. Ένα μηχανικό στερεό περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα περιστροφής. Αν διπλασιαστεί η στροφορμή του στερεού, χωρίς να αλλάξει θέση ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο στρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια

(δ) τετραπλασιάζεται.

A.3. Σε μια μικρή ράβδο μάζας m και μήκους L η οποία είναι ακίνητη σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, προς τα πάνω, με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας της ράβδου. Αν το μέτρο της $\vec{F}$ είναι διπλάσιο του βάρους της ράβδου τότε :

(α) η ράβδος θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση

A.4. Μια ομογενής σφαίρα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα $\vec{v}_0$. Η σφαίρα ανέρχεται και στη συνέχεια κατέρχεται χωρίς να ολισθαίνει. Σε όλη την διάρκεια της κίνησης της :

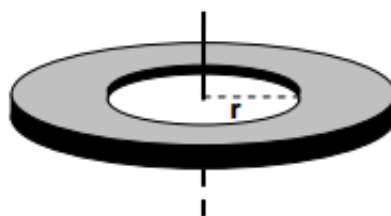
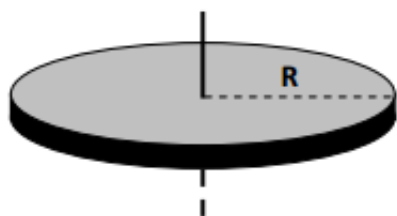
(β) η στατική τριβή παραμένει σταθερή

A.5. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη. **[5 × 1 = 5 μονάδες]**

- (α) Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται, όταν τους ασκούνται δυνάμεις, λέγονται μηχανικά στερεά. **Σωστό**
- (β) Όταν ένα αστέρι μετατραπεί σε αστέρας νετρονίων αυξάνεται πάρα πολύ η περίοδος αυτοπεριστροφής του. **Λάθος**
- (γ) Σε στερεό σώμα σφαιρικού σχήματος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του ισχύει πάντα $\Sigma F = 0$. **Λάθος**
- (δ) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν οι δύο δυνάμεις. **Σωστό**
- (ε) Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. **Σωστό**

Θέμα Β

B.1. Ομογενής λεπτός δίσκος μάζας M και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο του ίση με $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Αν αφαιρέσουμε από το δίσκο ένα εσωτερικό ομόκεντρο τμήμα του ακτίνας $r = \frac{R}{2}$, η ποσοστιαία μείωση της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής θα ισούται με:

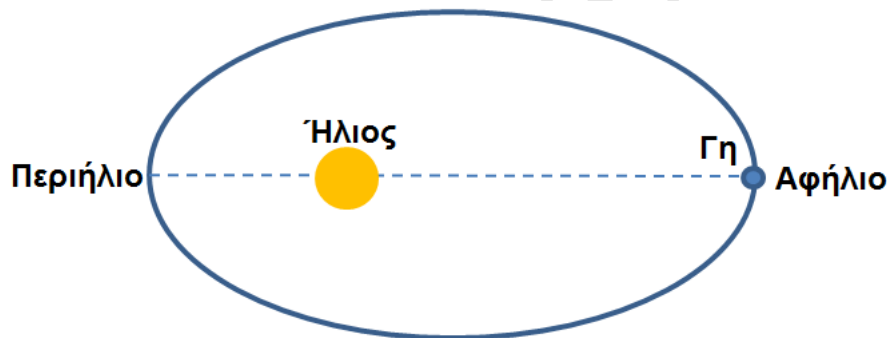


(δ) 6,25%

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίζεται θα υπολογίζεται $I' = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$. Η μάζα m του αφαιρούμενου τμήματος θα σχετίζεται με την συνολική μάζα, αφού η πυκνότητα θα είναι σταθερή, η μάζα θα είναι ανάλογη της ακτίνας στο τετράγωνο. $\frac{M}{R^2} = \frac{m}{r^2} \Rightarrow m = M \frac{r^2}{R^2} = \frac{M}{4}$. Οπότε η ροπή αδράνειας θα προκύψει να είναι: $I' = \frac{15}{32}MR^2$. Το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\frac{I' - I}{I} 100\% = 6,25\%$$

Β.2. Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά, με την επίδραση της βαρυτικής έλξης που δέχεται από αυτόν.



Αν η μέγιστη (αφήλιο) και η ελάχιστη (περιήλιο) απόσταση της Γης από τον Ήλιο κατά την διάρκεια της ελλειπτικής τροχιάς της ικανοποιούν την σχέση $r_{max} = 4r_{min}$, τότε η τροχιακή κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο αφήλιο (K_a) και η κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο περιήλιο (K_{π}) ικανοποιούν την σχέση.

$$(γ) K_{\pi} = 16K_a$$

Η βαρυτική έλξη που δέχεται η γη από τον ήλιο, είναι δύναμη κεντρική, δηλαδή ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς και η ροπή της ως προς το κέντρο της τροχιάς της γης θα είναι μηδέν, οπότε θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της τροχιακής Στροφορμής της Γης. Αν θεωρήσουμε την Γη ως υλικό σημείο:

$$L_a = L_{\pi} \Rightarrow Mv_a r_a = Mv_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow 4v_a = v_{\pi}$$

Ο λόγος των Κινητικών ενεργειών στα δύο σημεία της τροχιάς θα ισούται με:

$$\frac{K_a}{K_\pi} = \frac{\frac{1}{2}Mv_a^2}{\frac{1}{2}Mv_\pi^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow K_\pi = 16K_a$$

B.3. Λεπτή και ομογενής ράβδος (ΑΓ) μήκους d και μάζας M , μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο της, που διέρχεται από το σημείο Ο με $(AO) = \frac{d}{4}$.

Σημειακό βλήμα μάζας $m = \frac{M}{3}$ σφηνώνεται με ταχύτητα v στο μέσο Μ της ράβδου. Το σύστημα που προκύπτει μετά την κρούση μόλις που φτάνει στην ανώτερη κατακόρυφη θέση.

Η ταχύτητα του βλήματος ακριβώς πριν την κρούση θα ισούται με:

$$(\delta) \sqrt{32gd}$$

Σας δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}Md^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της Στροφορμής (αφού η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν):

$$mv\frac{d}{4} = I_{(o)}\omega \Rightarrow mv\frac{d}{4} = \left(\frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{d}{4}\right)^2 + m\left(\frac{d}{4}\right)^2\right)\omega \Rightarrow \frac{Mvd}{12} = \frac{Md^2}{6}\omega$$

Άρα προκύπτει ότι: $v = 2\omega d$

* Παραπάνω έχω υπολογίζει την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής για το σύστημα μετά την κρούση κάνοντας Steiner για την ράβδο και προσθέτοντας την ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής.

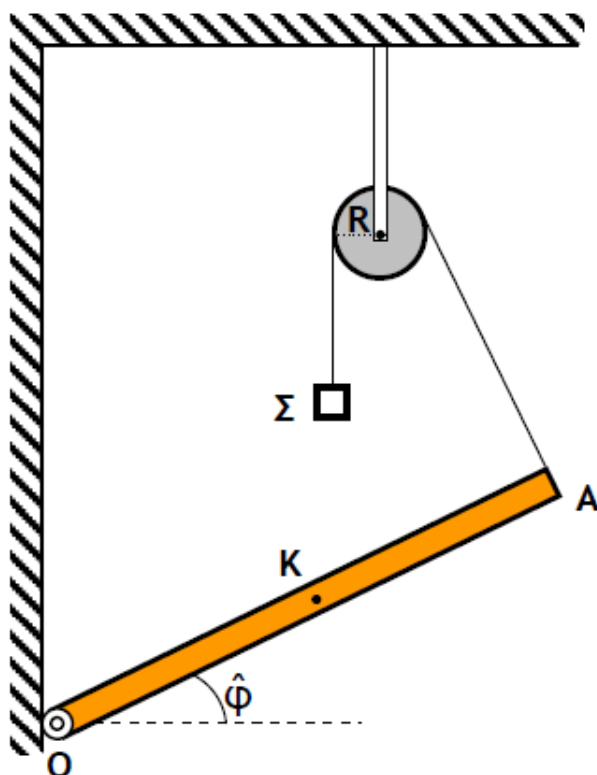
Για την ανύψωση του συστήματος μετά την κρούση εφαρμόζω ΘΜΚΕ:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}I_{(o)}\omega^2 = -(M+m)g\frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{Md^2}{6}\omega^2 = -\frac{4}{3}Mg\frac{d}{2}$$

Με αντικατάσταση $\omega = \frac{v}{2d}$ στην παραπάνω σχέση θα προκύψει: $v = \sqrt{32gd}$

Θέμα Γ

Η λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μήκος L και μάζα $M = 0,2\sqrt{10}kg$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα (άρθρωση) που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου είναι δεμένο ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου, είναι αναρτημένο, μέσω τροχαλίας ακτίνας R , ένα σώμα Σ μάζας $m = 0,1\sqrt{5}kg$.



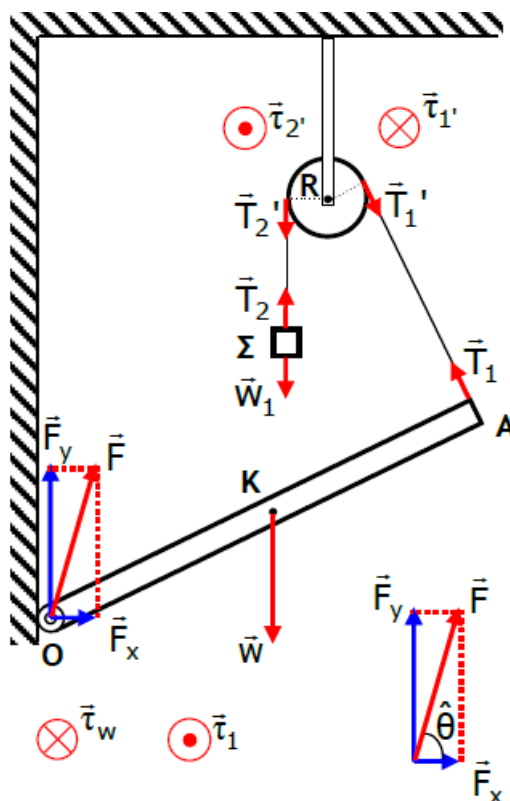
Το νήμα είναι κάθετο στην ράβδο ΟΑ στο άκρο της Α. Η ράβδος το σώμα και η τροχαλία ισορροπούν ακίνητα με την ράβδο να σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε:

Γ.1 το μήκος L της ράβδου αν η ροπή αδράνειας της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο της ράβδου είναι $I_o = 15\sqrt{10} \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$.

Με το θεώρημα Steiner προκύπτει ότι $I_o = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow L = 0,15m$

Γ.2 το μέτρο της τάσης του νήματος.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε όλα τα σώματα.



Για την ισορροπία της τροχαλίας έχω:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_2' R - T_1' R = 0 \Rightarrow T_2' = T_1'$$

Για την ισορροπία του σώματος έχω:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 - mg = 0 \Rightarrow T_2 = mg = \sqrt{5} N$$

Αφού το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$. Άρα η ζητούμενη τάση θα είναι: $T_1 = \sqrt{5} N$

* Το παραπάνω ερώτημα μπορεί να ληθεί και με εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας στην ράβδο. Εναλλακτικά θα μπορούσε να ζητηθεί ο υπολογισμός της μάζας της ράβδου, αν δεν ήταν δεδομένη με συνδυασμό των συνθηκών ισορροπίας σε όλα τα σώματα.

Γ.3 το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση,

Για την ράβδο που ισορροπεί, αφού αναλύσω την T_1 σε συνιστώσες προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{1x} = F_x \Rightarrow F_x = T_1 \eta \mu \phi \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{10}}{2} N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} + F_y - Mg = 0 \Rightarrow F_y = Mg - T_1 \sigma \nu \nu \phi \Rightarrow F_y = \frac{3}{2} \sqrt{10} N$$

$$\text{Άρα: } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 5 N$$

Κάποια στιγμή κόβουμε ακαριαία το νήμα στο σημείο Α της ράβδου και απομακρύνουμε το σώμα Σ από την τροχαλία. Να βρείτε:

Γ.4 την επιτάχυνση του σημείου Α της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα.

Εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για την ράβδο:

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma \omega \nu} \Rightarrow Mg \sigma \nu \nu \phi \frac{L}{2} = I_o a_{\gamma \omega \nu} \Rightarrow a_{\gamma \omega \nu} = 50 \sqrt{2} \text{ rad/s}^2$$

Η επιρόχιος επιτάχυνση του σημείου Α της ράβδου θα είναι: $a_A = a_{\gamma \omega \nu} L = 7,5 \sqrt{2} \text{ m/s}^2$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι μηδέν, αφού η ράβδος εκείνη την στιγμή είναι ακίνητη.

Γ.5 την στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής την στιγμή που διέρχεται από την οριζόντια θέση.

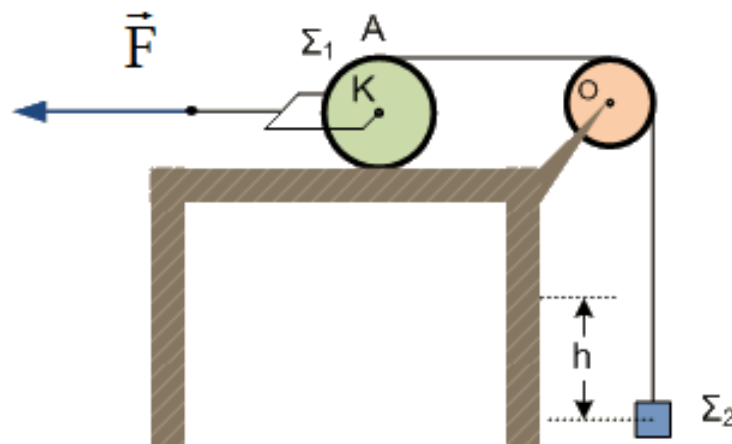
Όταν η ράβδος φτάνει στην οριζόντια θέση έχει στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής $L = I_o \omega$. Από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κάθοδο της ράβδου προκύπτει:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_o \omega^2 = Mg \frac{L}{2} \eta \mu \phi \Rightarrow \omega = 10 \sqrt{\sqrt{2}} \text{ rad/s}$$

$$\text{Άρα } L = 15 \sqrt{5 \sqrt{2}} 10^{-3} \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

Θέμα Δ

Η κατακόρυφη τροχαλία του σχήματος, μάζας $m = 3\text{kg}$ και ακτίνας $r = 0,1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο αυλάκι της τροχαλίας περνά νήμα που από το ένα άκρο του κρέμεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2\text{kg}$ και στο άλλο άκρο του είναι δεμένος ένας κατακόρυφος τροχός (Σ_1) που έχει μάζα $M = 4\text{kg}$ και ακτίνα $R = 0,2\text{m}$.



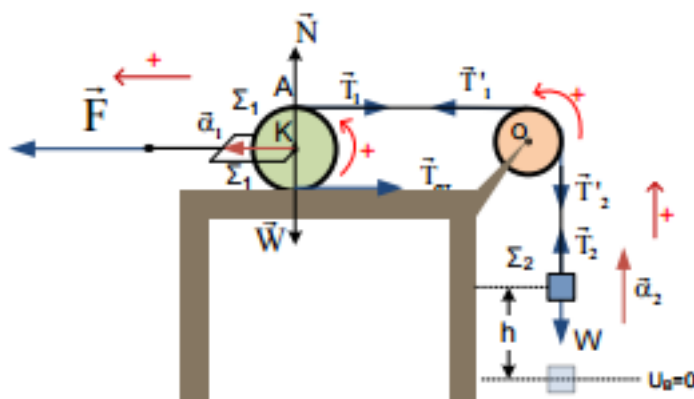
Δ.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμείνει ακίνητο.

Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει $\Sigma \vec{F} = 0$ και $\Sigma \tau = 0$. Για κάθε σώμα εφαρμόζω τις συνθήκες:

- **Για το Σ_2 :** $T_2 = w_2 = m_2 g \Rightarrow T_2 = 20\text{N}$
- **Για την τροχαλία:** $T_2' r - T_1' r = 0 \Rightarrow T_1' = T_2' = T_2 = 20\text{N}$
- **Για τον δίσκο:** $T_1 R - T_{\sigma} R = 0 \Rightarrow T_{\sigma} = T_1 = T_1' = 20\text{N}$, $F - T_1 - T_{\sigma} = 0 \Rightarrow F = 40\text{N}$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε τη δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F = 80\text{N}$.

Δ.2 Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος Σ_2 .



Εφαρμόζουμε τους Νόμους της Κίνησης για κάθε σώμα:

- **Για το Σ2:** $T_2 - m_2g = m_2a_2$
- **Για την τροχαλία:** $T_1'r - T_2'r = \frac{1}{2}mr^2a_{γων}$
- **Για τον δίσκο:** $T_{στ}R - T_1R = \frac{1}{2}MR^2a_{γων(1)}$, $F - T_1 - T_{στ} = Ma_{cm}$

Ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει οπότε: $\Delta x_{cm} = R\Delta\theta \Rightarrow v_{cm} = \omega_1 R \Rightarrow a_{cm} = a_{γων(1)}R$.

Το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας οπότε: $\Delta x = r\Delta\theta \Rightarrow v_2 = \omega r \Rightarrow a_2 = a_{γων}r$

Κάθε σημείο του νήματος έχει την ίδια ταχύτητα - επιτάχυνση, οπότε η ταχύτητα του Σ2 (v_2) είναι ίδια με την ταχύτητα του ανώτερου σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας (Αρχή της Επαλληλίας $v_2 = v_{cm} + \omega_1 R = 2v_{cm} \Rightarrow a_2 = 2a_{cm}$).

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν υπολογίζουμε: $a_2 = 4m/s^2$

Για τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ2 έχει ανέλθει κατά $h = 2m$, να υπολογίσετε:

Δ.3 Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Για την ανύψωση του σώματος $h = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \Rightarrow t = 1s \Rightarrow v_2 = 4m/s \Rightarrow$
 $\omega = \frac{v_2}{r} = 40rad/s \Rightarrow L = I\omega = 0,6kgm^2/s$

Δ.4 Τη μετατόπιση του τροχού από την αρχική του θέση.

Για τον τροχό: $a_{cm} = \frac{a_2}{2} = 2m/s^2 \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow x_{cm} = 1m$

Δ.5 Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του τροχού Σ_1 κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ_2 κατά h .

η ταχύτητα του τροχού θα είναι $v_{cm} = a_{cm}t = 2m/s$

$$\frac{K}{W_F} 100\% = \frac{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2}{Fx_{cm}} 100\% = 15\%$$

