
3ο Διαγώνισμα Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Κυριακή 21 Σεπτέμβρη 2014

Το σύστημα Ελατηρίου - Μάζας / Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

A.1. Σύστημα ελατηρίου - σώματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Αν διπλασιάσουμε την μάζα του σώματος και το πλάτος της ταλάντωσης παραμείνει σταθερό τότε μεταβάλλεται:

(β) η συχνότητα της ταλάντωσης

A.2. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν θετική αλγεβρική τιμή, στην διάρκεια μιας περιόδου κατά το χρονικό διάστημα:

(α) $\frac{T}{2} \rightarrow \frac{3T}{4}$

A.3. Όταν ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, βρίσκεται στην θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της Ορμής είναι μέγιστος τότε:

(β) η δύναμη επαναφοράς είναι μέγιστη

A.4. Δύο σώματα με ίσες μάζες που κινούνται με μέτρα ταχυτήτων v_1 και v_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση τα σώματα θα αποκτήσουν ταχύτητες με μέτρα v'_1 και v'_2 αντίστοιχα που θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

(δ) $v'_1 = v_2$ και $v'_2 = v_1$

A.5.

- (α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται η μέγιστη ταχύτητα και η ενέργεια ταλάντωσης. **Λ**
- (β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσες αποστάσεις. **Λ**
- (γ) Σε ένα ταλαντούμενο σύστημα ελατηρίου - μάζας, η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης και η δύναμη του ελατηρίου συμπίπτουν πάντα. **Λ**
- (δ) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος μιας ταλάντωσης τότε διπλασιάζετε ο χρόνος μετάβασης του σώματος από την μια ακραία θέση στην άλλη. **Λ**
- (ε) Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει πάντα σταθερή. **Λ**

Θέμα Β

B.1. Σώμα Σ μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στην θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Αντικαθιστούμε το ελατήριο με άλλο, σταθεράς $2k$, χωρίς να αλλάξουμε το αναρτημένο σώμα. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από την νέα θέση ισορροπίας κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Ο λόγος των μέτρων των μέγιστων επιταχύνσεων $\frac{\alpha_{max,1}}{\alpha_{max,2}}$ είναι: **(γ)** $\frac{1}{2}$

Οι δύο ταλαντώσεις θα έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης και διαφορετικές συχνότητες, $\frac{\alpha_{max,1}}{\alpha_{max,2}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{2}$

B.2. Στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου δένουμε σώμα Σ_1 μάζας m_1 . Κάτω από το σώμα Σ_1 δένουμε μέσω αβαρούς νήματος άλλο σώμα μάζας m_2 με $m_2 = 2m_1$

Αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το Σ_1 αρχίζει να ταλαντώνεται. Ο λόγος της μέγιστης Δυναμικής Ενέργειας ελατηρίου για το Σ_1 προς την μέγιστη δυναμική Ενέργεια ταλάντωσης θα είναι: **(γ)** $\frac{U_{ελ(max)}}{U_{(max)}} = \frac{9}{4}$

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στην θέση φυσικού μήκους, τα σώματα στην θέση που ισορροπούν με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά Δl_2 και το σώμα Σ_1 στην Θέση Ισορροπίας της ταλάντωσης με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά Δl_1 . Από τις συνθήκες ισορροπίας στις δυο αυτές θέσεις υπολογίζω τα $\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k}$, $\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$. Επειδή η θέση αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος είναι η ακραία θέση προκύπτει ότι $A = \Delta l_2 - \Delta l_1 = \frac{m_2 g}{k}$. Επίσης η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι προφανές η Δl_2 . Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{U_{ελ(max)}}{U_{(max)}} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta l_2)^2}{\frac{1}{2}kA^2} = \frac{(\Delta l_2)^2}{A^2} = \frac{9}{4}$$

B.3. Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα v . Στην πορεία του συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $M = 3m$. Η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας $\Delta K_{ολ}$ του συστήματος είναι αντίστοιχα:

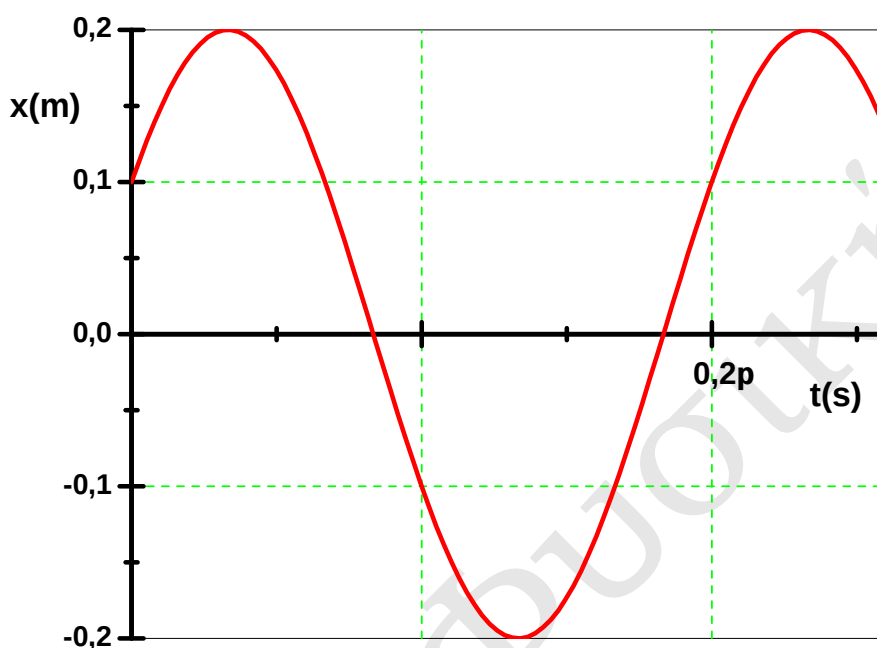
$$\textbf{(γ)} \quad |\Delta \vec{P}_{ολ}| = 0, \quad |\Delta K_{ολ}| = \frac{3mv^2}{8}$$

Για την κρούση των δύο σωμάτων θα εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής ($|\Delta \vec{P}_{ολ}| = 0$) άρα $mv + 0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{v}{4}$. Η μεταβολή της Κινητικής Ενέργειας θα είναι: $\frac{1}{2}(M + m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$

Θέμα Γ

Σώμα μάζας $m = 1kg$ είναι προσαρμοσμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου άγνωστης σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο

ακλόνητα. Με κατάλληλο τρόπο το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με την απομάκρυνση να παριστάνεται ως συνάρτηση του χρόνου από το παρακάτω διάγραμμα.



Γ.1 Να υπολογίσετε την αρχική φάση ϕ_0 της ταλάντωσης.

Την $t = 0$ παρατηρούμε στο διάγραμμα ότι $x = +0,1m$ και $v > 0$. Επίσης $A = 0,2m$ και $T = 0,2\pi$. Υπολογίζουμε την αρχική φάση: $0,1 = 0,2\eta\mu(0 + \phi_0) \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$ (1ο τεταρτημόριο γιατί $v > 0$)

Γ.2 Να υπολογίσετε την σταθερά k του ελατηρίου και την ενέργεια που προσφέραμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow D = k = m\omega^2 = 100 \text{ N/m. Η ενέργεια που ξοδέψαμε είναι } E = \frac{1}{2}kA^2 = 2 \text{ J}$$

Γ.3 Να γράψετε την εξίσωση της Δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε την χρονική στιγμή που η

δύναμη επαναφοράς γίνεται για πρώτη φορά μέγιστη.

$$\Sigma F = -Dx = -20\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})(S.I.)$$

Η δύναμη θα γίνει για πρώτη φορά μέγιστη στην ακραία θετική θέση ($x = +A$). Με το περιστρεφόμενο διάνυσμα προκύπτει ότι $\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\pi}{30}s$, εναλλασσικά με αντικατάσταση στην σχέση για την δύναμη επαναφοράς και επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης πάλι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα ($\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) = 1$).

- Γ.4** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή που περνά για πρώτη φορά από τη θέση $x = -0,1m$.

$$A.D.E.T. : \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = -\sqrt{3}m/s$$

- Γ.5** Να βρείτε το πηλίκο της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τις στιγμές που η συνισταμένη δύναμη την οποία δέχεται το σώμα έχει μέτρο $10N$.

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow |x| = 0,1m \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{E - \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kx^2} = 3$$

Θέμα Δ

Ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$ έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 3kg$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από την θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

- Δ.1** Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

Σχεδιάζουμε το ελατήριο στην Θέση Φυσικού Μήκους και το σώμα στην Θέση Ισορροπίας του με το ελατήριο επιμηκυμένο κατά Δl . Από την συνθήκη ισορροπίας θα προκύψει $k\Delta l = m_1g$. Σχεδιάζω το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την Θέση Ισορροπίας του και εκεί σχεδιάζω

την δύναμη του βάρους και την δύναμη του ελατηρίου, υπολογίζοντας την συνισταμένη τους $\Sigma F = mg - k(\Delta l + x) = -kx$. Άρα το σώμα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς την σταθερά του ελατηρίου (Προφανώς πρέπει να γίνει το σχήμα αναλυτικά για να είναι σωστή η απάντηση).

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2\sqrt{3}\pi s$ και το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = \Delta l = \frac{m_1 g}{k} = 0,3m$

Την στιγμή που το Σ_1 διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση μέγιστης Κινητικής ενέργειας συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1kg$ που κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 5\sqrt{3}m/s$.

Δ.2 Να υπολογιστούν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων α-μέσως μετά την κρούση.

Η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ, άρα $v_1 = \omega A \Rightarrow v_1 = \sqrt{3}m/s$ Θεωρούμε ως θετική την φορά της ταχύτητας του Σ_1 ($v_2 = -5\sqrt{3}m/s$). Για την ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων, οι ταχύτητες μετά την κρούση θα δίνονται από:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \Rightarrow v'_1 = -2\sqrt{3}m/s$$

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \Rightarrow v'_2 = 4\sqrt{3}m/s$$

Το Σ_1 μετά την κρούση κινείται προς τα πάνω.

Δ.3 Βρείτε το πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση.

Επειδή η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ και είναι ελαστική $v'_1 = \omega A' \Rightarrow A' = 0,6m$

Δ.4 Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας στην θέση που $K = 3U$ για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Για πρώτη φορά μετά την κρούση αν θεωρήσουμε την Θετική φορά προς τα κάτω $K = 3U$ σε μια αρνητική θέση με αρνητική ταχύτητα (άνοδος του σώματος μετά την κρούση)

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv = -Dxv.$$

Με την χρήση της ΑΔΕΤ θα προκύψουν η ταχύτητα και η θέση
 $E = K + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = 4\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = -\frac{A'}{2}$

$$E = \frac{4K}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_{max}.$$

$$\frac{dK}{dt} = -90J/s$$

Αν η κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι κεντρική και πλαστική,

Δ.5 να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος στην θέση μετά την κρούση.

Αν η κρούση είναι πλαστική το συσσωμάτωμα θα έχει νέα Θέση Ισορροπίας με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta l'$. Εφαρμόζω την συνθήκη ισορροπίας σε αυτή την θέση και βρίσκω $\Delta l' = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$. Η θέση αμέσως μετά την κρούση απέχει $x = \Delta l' - \Delta l = \frac{m_2 g}{k} = 0,1m$ (Απαιτείται σχήμα !) Άρα η Δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης στην παραπάνω θέση θα είναι $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0,5J$.

Επιμέλεια: Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου

