

## ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

3<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ) - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

1. β

2. δ

3. δ

4. β

5. α.Λ    β.Σ    γ.Λ    δ.Σ    ε.Λ

## ΘΕΜΑ Β

1. Σωστή είναι η απάντηση γ.

Ο ρυθμός αύξησης της γωνιακής ταχύτητας ισούται με τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος, δηλαδή ισχύει  $\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$ .

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με  $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I}$ . Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η ροπή από  $t=2s$  έως  $t=4s$  είναι σταθερή και συνεπώς η γωνιακή επιτάχυνση, δηλαδή ο ρυθμός αύξησης της γωνιακής ταχύτητας, στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι και αυτή σταθερή.

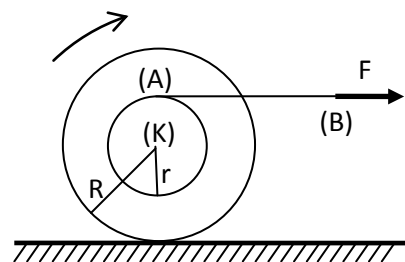
2. Σωστή είναι η απάντηση β.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το ανώτατο σημείο (Α) της εσωτερικής τροχαλίας έχει ταχύτητα μέτρου  $v_A = v_{cm} + \omega \cdot r$ .

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην επιφάνεια της εσωτερικής τροχαλίας, θα έχει την ίδια ταχύτητα με το σημείο Α και έτσι

$$v_{νημ} = v_A = v_{cm} + \omega \cdot r$$

Από τη σχέση  $v_{νημ} = v_{cm} + \omega \cdot r$  προκύπτει ότι  $v_{νημ} > v_{cm}$ , δηλαδή η ταχύτητα των σημείων του νήματος άρα και του άκρου Β είναι μεγαλύτερη από τη ταχύτητα του κέντρου μάζας (Κ) της διπλής τροχαλίας. Αυτό έχει σαν συνέπεια η απόσταση μεταξύ των σημείων (Β) και (Κ) να μεγαλώνει και έτσι το νήμα ξετυλίγεται

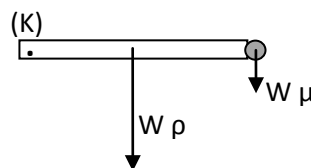


**3. Σωστή είναι η απάντηση γ.**

Για τους ρυθμούς μεταβολής της στροφορμής της ράβδου και της μάζας ισχύουν αντίστοιχα ότι:

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{ράβδου}} = \Sigma \tau_{\text{ράβδου}(K)} = I_{\text{ράβδου}(K)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{μάζας}} = \Sigma \tau_{\text{μάζας}(K)} = I_{\text{μάζας}(K)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$



Η ράβδος και η σημειακή μάζα έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση. Διαιρώντας κατά

$$\text{μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι : } \frac{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{ράβδου}}}{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{μάζας}}} = \frac{I_{\text{ράβδου}(K)}}{I_{\text{μάζας}(K)}} \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής ισούται με

$$I_{\text{ράβδου}(K)} = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow I_{\text{ράβδου}(K)} = \frac{ML^2}{3}, \quad (4)$$

ενώ η ροπή αδράνειας της μάζας ως προς τον άξονα περιστροφής ισούται με

$$I_{\text{μάζας}(K)} = mL^2 \rightarrow I_{\text{μάζας}(K)} = \frac{M}{6} L^2. \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3), τις σχέσεις (4) και (5), προκύπτει:

$$\frac{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{ράβδου}}}{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{μάζας}}} = \frac{\frac{ML^2}{3}}{\frac{ML^2}{6}} \rightarrow \frac{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{ράβδου}}}{\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_{\text{μάζας}}} = 2.$$

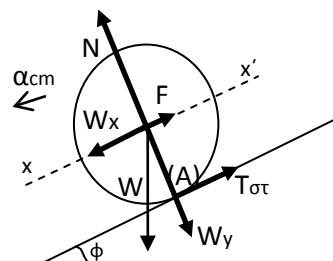
**ΘΕΜΑ Γ**

α. Η δύναμη F έχει μέτρο F=20N ενώ η συνιστώσα  $w_x$  του βάρους στον άξονα  $xx'$  ισούται με

$$w_x = mg \eta \mu \phi \rightarrow w_x = 10 \text{ kg} \cdot \frac{10 \text{ m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow w_x = 50 \text{ N}.$$

Επειδή  $w_x > F$ , ο κύλινδρος μεταφορικά θα κινηθεί προς τα κάτω επιταχυνόμενος.

Το διάνυσμα της στατικής τριβής έχει σημείο εφαρμογής το σημείο A του κυλίνδρου που είναι σε επαφή με το πλάγιο επίπεδο και κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης που τείνει να κάνει αυτό στο επίπεδο εξαιτίας όλων των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στον κύλινδρο εκτός της τριβής. Επειδή οι δυνάμεις F, N και w δεν δημιουργούν ροπή, το σημείο (A) αρχικά αποκτά μόνο τη μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Άρα η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς τα πάνω.



β. Κατά την κάθοδό του ο κύλινδρος κυλιέται πραγματοποιώντας στροφική και μεταφορική κίνηση.

Ο θεμελιώδης νόμος για τη μεταφορική κίνηση γράφεται ως εξής:

$$\Sigma F_x = Ma_{cm} \rightarrow W_x - F - T_{στ} = Ma_{cm} \rightarrow Mg\eta\mu\phi - F - T_{στ} = Ma_{cm} \quad (1)$$

Ο θεμελιώδης νόμος για τη στροφική κίνηση γράφεται ως εξής:

$$\Sigma \tau_{(K)} = I_{(K)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_{στ} \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

$$\text{Επειδή ο κύλινδρος κυλιέται, ισχύει ότι} \quad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

$$\text{Η σχέση (2) με τη βοήθεια της σχέσης (3) γίνεται:} \quad T_{στ} = \frac{1}{2} Ma_{cm} \quad (4)$$

Με αντικατάσταση της  $T_{στ}$  στη σχέση (1) και επίλυση ως προς  $a_{cm}$  παίρνουμε:

$$Mg\eta\mu\phi - F = Ma_{cm} + \frac{1}{2} Ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\phi - F}{\frac{3}{2}M} = \frac{10\text{kg} \cdot \frac{10\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} - 20\text{N}}{\frac{3}{2}10\text{kg}} \rightarrow$$

$$a_{cm} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

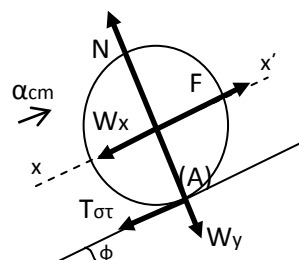
γ. Για τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησής του, ο κύλινδρος κατεβαίνει κυλιόμενος με σταθερή μεταφορική επιτάχυνση  $a_{cm} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , οπότε η μεταφορική ταχύτητά του θα δίνεται από τη σχέση  $v_{cm} = a_{cm} \cdot t$  και το διάστημα που θα διανύει θα δίνεται από τη σχέση  $S = \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot t^2$ .

Έτσι, με αντικατάσταση  $a_{cm} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  και  $t_1 = 10\text{s}$  παίρνουμε :

$$v_{cm,1} = 20\text{m/s} \text{ και } S_1 = 100\text{m}.$$

Από τη στιγμή που το μέτρο της δύναμης  $F$  γίνεται 65N ισχύει,  $W_x < F$

με τη συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα κίνησης να έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας, οπότε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου επιβραδύνεται, με συνέπεια να τείνει  $v_{cm} < \omega R$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σημείο A να τείνει να κινηθεί προς τα πάνω με συνέπεια η στατική τριβή να αλλάξει κατεύθυνση και να έχει φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.



δ. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των θέσεων (B) και (Γ) .

$$K_{(Γ)}^{στρ} + K_{(Γ)}^{μετ} - K_{(B)}^{στρ} - K_{(B)}^{μετ} = W_N + W_F + W_{W_x} + W_{W_y} + W_{T_{στ}} \quad (5)$$

Όμως:

$$- K_{(Γ)}^{στρ} = K_{(Γ)}^{μετ} = 0, \text{ αφού ο κύλινδρος στη θέση (Γ) σταματά.}$$

-  $W_N = W_{W_y} = 0$  , αφού οι δυνάμεις  $N$  και  $W_y$  δεν παράγουν μεταφορικό έργο ως κάθετες στην μετατόπιση, αλλά ούτε και στροφικό έργο, αφού δεν έχουν ροπή ως προς το κέντρο μάζας.

- Το έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν,  $W_{T_{στ}} = 0$

- Το έργο της δύναμης  $F$  είναι μόνο μεταφορικό και ισούται με  
 $W_{F(B \rightarrow \Gamma)} = -F \cdot S_2 \rightarrow W_{F(B \rightarrow \Gamma)} = -65 S_2 (J)$

- Το έργο της δύναμης  $W_{W_x}$  είναι μόνο μεταφορικό και ισούται με:

$$W_{W_x(B \rightarrow \Gamma)} = mgh_{\mu\phi} \cdot S_2 = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot S_2 (J) \rightarrow W_{W_x} = 50 S_2 (J)$$

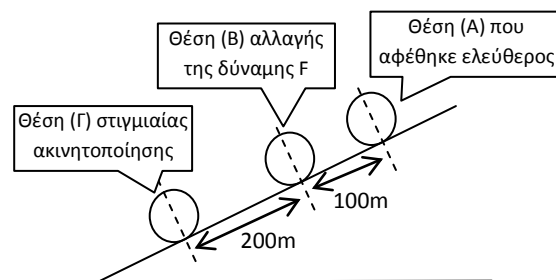
Με αντικατάσταση όλων των παραπάνω στη σχέση (5) παίρνουμε:

$$0 + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = 0 - 65 S_2 + 50 S_2 + 0 + 0$$

Παίρνοντας υπόψη ότι  $v_{cm} = \omega \cdot R$  η τελευταία σχέση γίνεται:

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 - \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = -65 S_2 + 50 S_2 \rightarrow \frac{3}{4} Mv_{cm}^2 = 15 S_2 \rightarrow$$

$$S_2 = \frac{3}{4 \cdot 15} Mv_{cm}^2 (J) = \frac{3}{4 \cdot 15} 10 \cdot 20^2 (J) \rightarrow S_2 = 200m$$

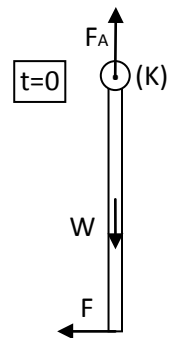


## ΘΕΜΑ Δ

α. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση η γωνιακή

$$\text{επιτάχυνση ισούται με } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma \tau_{(K)}}{I_{(K)}}. \quad (1)$$

Από τις δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  η μοναδική δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η δύναμη  $F$  διότι ο φορέας του βάρους διέρχεται από τον άξονα περιστροφής και η ροπή του είναι μηδέν. Έτσι για τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  ισχύει  $\Sigma \tau_{(K)} = F \cdot L$ .



Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς (K) θα υπολογισθεί με το θεώρημα παράλληλων αξόνων (Steiner) :

$$I_{\rho\alpha\beta(K)} = I_{cm} + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow I_{\rho\alpha\beta(K)} = \frac{1}{12} ML^2 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad I_{\rho\alpha\beta(K)} = \frac{ML^2}{3}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3 \cdot F \cdot L}{ML^2} = \frac{3 \cdot F}{M \cdot L} \quad \text{και} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3 \cdot 102}{1,5 \cdot \pi \cdot 2} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad \text{ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{102}{\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ), ώστε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ελάχιστα πριν συγκρουσθεί με τη μάζα m.

$$K_{(Γ)}^{\text{στρ}} - K_{(Α)}^{\text{στρ}} = W_F + W_w \rightarrow \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega_{(Γ)}^2 = K_{(Α)}^{\text{στρ}} + W_F + W_w \quad (2)$$

Όμως:

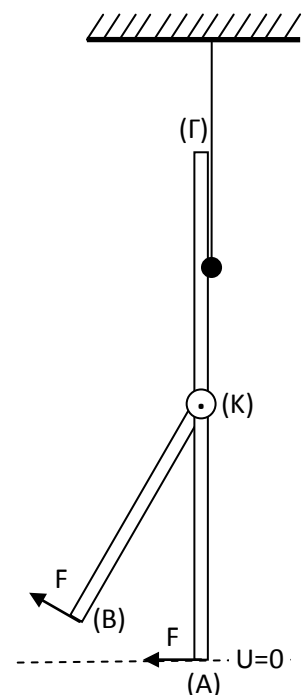
- $K_{(Α)}^{\text{στρ}} = 0$  , διότι  $\omega_{(Α)} = 0$
- $W_{w(A \rightarrow \Gamma)} = U_{(Α)} - U_{(Γ)} = g \frac{L}{2} - Mg \frac{3L}{2} = -MgL$
- $W_{F(A \rightarrow \Gamma)} = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{6}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2), προκύπτει

$$\frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega_{(Γ)}^2 = F L \frac{\pi}{6} - MgL \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1,5 \text{ kg} \cdot (2\text{ m})^2}{3} \omega_{(Γ)}^2 = \frac{102 \text{ N}}{\pi} \cdot 2\text{ m} \frac{\pi}{6} - 1,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{ m} \rightarrow \quad \text{ή}$$

$$\omega_{(Γ)}^2 = 34 \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 - 30 \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \quad \text{ή} \quad \omega_{(Γ)} = 2 \text{ rad/s}$$



γ. Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής, καθώς οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις δεν προκαλούν ροπή.

$$L_{ολ(Δ)} = L_{ολ(Γ)} \quad (3)$$

Η στροφορμή  $L_{ολ(Γ)}$  του συστήματος ράβδου-μάζας λίγο πριν τη σύγκρουση της ράβδου με τη σημειακή μάζα ισούται με τη στροφορμή της ράβδου, διότι η σημειακή μάζα είναι ακίνητη. Έτσι,

$$L_{ολ(Γ)} = I_{ραβ(K)} \cdot \omega_{(Γ)} \quad (4)$$

Η στροφορμή  $L_{ολ(Δ)}$  του συστήματος ράβδου-μάζας αμέσως μετά τη σύγκρουση της ράβδου με τη σημειακή μάζα θα ισούται με

$$L_{ολ(Δ)} = I_{ολ(K)} \cdot \omega_K \quad (5)$$

Όπου 
$$I_{ολ(K)} = \frac{ML^2}{3} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Με αντικατάσταση των (4) και (5) στη σχέση (3) προκύπτει:

$$\frac{ML^2}{3} \cdot \omega_{(Γ)} = \left[ \frac{ML^2}{3} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \cdot \omega_K$$

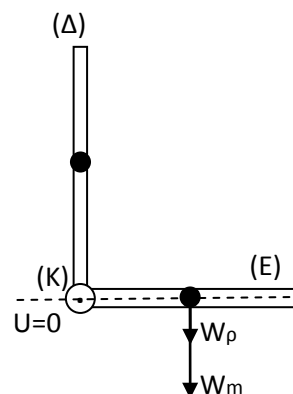
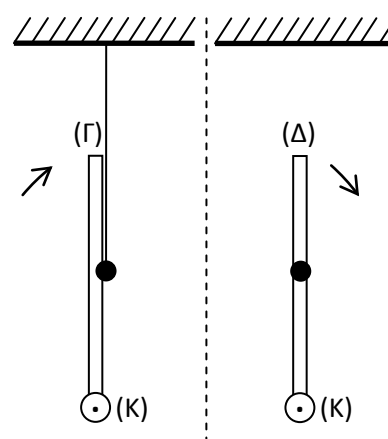
Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές προκύπτει:

$$\frac{1,5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2}{3} \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left[ \frac{1,5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2}{3} + 2\text{kg} \cdot \left(\frac{2\text{m}}{2}\right)^2 \right] \cdot \omega_K \quad \text{ή} \quad \omega_K = 1 \text{rad / s}$$

δ. Η σημειακή μάζα  $m$  εκτελεί μη ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση με κέντρο τον άξονα περιστροφής. Έτσι, όταν το σύστημα ράβδου-μάζας διέρχεται από την οριζόντια θέση, το σώμα μάζας  $m$  θα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση,  $\vec{a}_K$ , και γραμμική επιτάχυνση,  $\vec{a}_{γρ}$ , κατακόρυφα προς τα κάτω.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση  $\vec{a}_K$  της σημειακής μάζας έχει διεύθυνση πάνω στη ράβδο, φορά προς τον άξονα περιστροφής και μέτρο  $a_K = \omega^2(L/2)$ . (6)

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των θέσεων (Δ) και (Ε) για να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου-μάζας όταν διέρχεται από την οριζόντια θέση (Ε).



$$K_{(E)}^{\text{στρ}} - K_{(\Delta)}^{\text{στρ}} = W_W \rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{ML^2}{3} + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \cdot \omega_{(E)}^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{ML^2}{3} + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] \cdot \omega_{(\Delta)}^2 = W_W \quad (7)$$

$$\text{Όμως } W_W = U_{(\Delta)} - U_{(E)} \rightarrow W_W = (M + m)g \frac{L}{2} - 0 \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7) τη σχέση (8) και κάνοντας αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει:

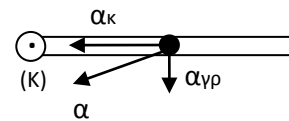
$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1,5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2}{3} + 2\text{kg} \cdot \left( \frac{2\text{m}}{2} \right)^2 \right] \cdot \omega_{(E)}^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1,5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2}{3} + 2\text{kg} \cdot \left( \frac{2\text{m}}{2} \right)^2 \right] \cdot (1\text{rad/s})^2 + (1,5\text{kg} + 2\text{kg}) \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{2\text{m}}{2},$$

$$\text{από όπου προκύπτει } \omega_{(E)}^2 = \frac{37}{2} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^4} \quad (9)$$

$$\text{Με αντικατάσταση στη σχέση (6) παίρνουμε: } \alpha_K = \frac{37}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η γραμμική επιτάχυνση  $\vec{a}_{\gamma\rho}$  της σημειακής μάζας εξαιτίας της κυκλικής της κίνησης, θα είναι κάθετη στη ράβδο με φορά προς τα κάτω και με μέτρο



$$\alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{L}{2} \quad (10)$$

Το  $\alpha_{\gamma\omega\nu}$  θα υπολογιστεί από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\sum \tau_{(K)}}{I_{\text{ολ}(K)}} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{W_p \cdot \frac{L}{2} + W_m \cdot \frac{L}{2}}{I_{\text{ολ}(K)}} \quad (11)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-μάζας ως προς τον άξονα περιστροφής ισούται με

$$I_{\text{ολ}(K)} = \frac{ML^2}{3} + m \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 \text{ και η σχέση (11) γράφεται:}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{M \cdot g \cdot \frac{L}{2} + m \cdot g \cdot \frac{L}{2}}{\frac{ML^2}{3} + m \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1,5\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{2\text{m}}{2} + 2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{2\text{m}}{2}}{\frac{1,5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2}{3} + 2\text{kg} \cdot \left(\frac{2\text{m}}{2}\right)^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{35}{4} \text{rad/s}^2.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\rho} = \frac{35}{4} \text{rad/s}^2 \cdot \frac{2\text{m}}{2} \rightarrow \alpha_{\gamma\rho} = \frac{35}{4} \text{m/s}^2.$$

Το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης της μάζας  $m$  προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα και ισούται με:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{\left(\frac{37}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(\frac{35}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{6701}{16}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow \alpha \approx 20,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$