
Φυσική Β Λυκείου, Γενικής Παιδείας

2ο Φυλλάδιο - Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Επιμέλεια: Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου, MSc Φυσικός
<http://perifysikhs.wordpress.com>

Οι έννοιες που σχετίζονται με την μελέτη της κυκλικής κίνησης είναι βασικές για την μελέτη σύνθετων κινήσεων σωμάτων. Στην Γ Λυκείου θα αναπτυχθούν αναλυτικά οι μέθοδοι για την μελέτη αυτών των κινήσεων. Παρακάτω παραθέτω βασικές έννοιες για την μελέτη της Ομαλής Κυκλικής κίνησης που θα μας είναι χρήσιμες και αργότερα.

1 Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** (T) και τη **Συχνότητα** (f) του.

- **Περίοδος (T)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s .

- **Συχνότητα (f)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού N των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο t , προς το χρόνο t . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz ή 1 s^{-1}

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

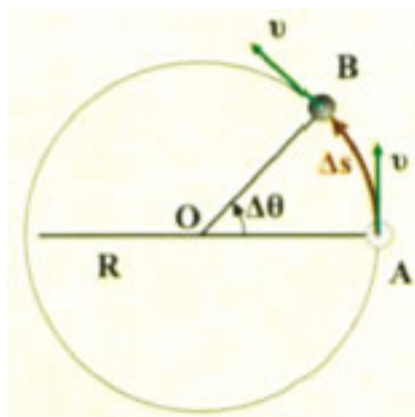
$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της συχνότητας, γιατί σε χρόνο μιας περιόδου έχει εκτελεστεί μια επανάληψη του φαινομένου.

2 Η κινηματική της ομαλής κυκλικής κίνησης

Η κυκλική κίνηση είναι γενικά η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν το σχήμα της τροχιάς του είναι ένας κύκλος. Ιδιαίτερο βέβαια ενδιαφέρον έχει η μελέτη της **Ομαλής Κυκλικής Κίνησης**, στην οποία το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα παραμένει σταθερή. Τέτοια κίνηση είναι η κίνηση της Γης γύρω από τον ήλιο, η κίνηση ενός σημείου του γνωστού μας cd κλπ. Στην ομαλή κυκλική κίνηση το σώμα σε ίσα διαστήματα διανύει ίδια τμήματα κύκλου. Τα βασικά μεγέθη για την περιγραφή μιας τέτοιας κίνησης είναι η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα.

Γραμμική Ταχύτητα



Σχήμα 1: Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m και υποθέτουμε ότι σε χρονικό διάστημα Δt διαγράφει μήκος τόξου Δs που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\Delta \theta$.

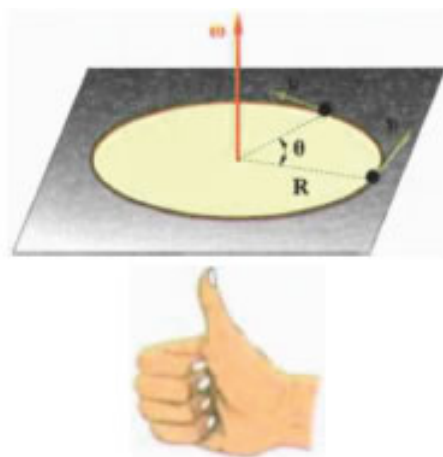
Ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ του υλικού σημείου, ένα διάνυσμα, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του τόξου Δs προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt .

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4)$$

Η γραμμική ταχύτητα εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς στη θέση που βρίσκεται κάθε φορά το υλικό σημείο και έχει τη φορά της κίνησης του. Η μονάδα μέτρησης είναι το $1m/s$. **Είναι προφανές ότι το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας δεν έχει σταθερή κατεύθυνση κατά την διάρκεια της κυκλικής κίνησης, καθώς αλλάζει συνεχώς προσανατολισμό.**

Γωνιακή Ταχύτητα

Ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του υλικού σημείου ένα διάνυσμα, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του και μέτρο ίσο με το πηλίκο της επίκεντρης γωνιάς $\Delta\theta$ προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt .



Σχήμα 2: Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (5)$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το $1rad/s$.

Προσοχή η επίκεντρη γωνιά θ έχει ως μονάδα μέτρησης το **1 ακτίνιο** (1 rad) το οποίο ορίζεται ως η επίκεντρη γωνιά που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ίσο με το μήκος της ακτίνας

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

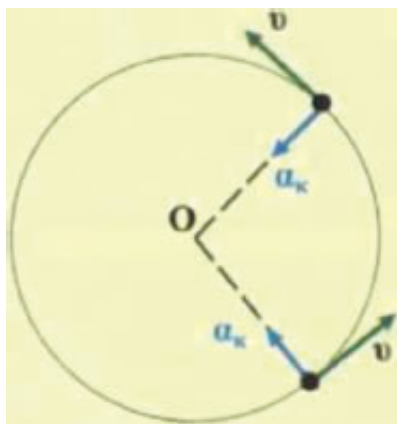
Η επίκεντρη γωνιά θ που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου S μας είναι γνωστό ότι ορίζεται από την σχέση $\theta = \frac{s}{R}$. Εύκολα προκύπτει από τον ορισμό της γωνίας έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \Delta s = R \cdot \Delta\theta \Rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = \omega \cdot R \quad (6)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι σαφές ότι η γραμμική ταχύτητα είναι ανάλογη της απόστασης του σώματος από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Αν για παράδειγμα μελετήσουμε την κυκλική κίνηση ενός δίσκου, όλα τα σημεία του έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά τα σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια του δίσκου έχουν την μέγιστη γραμμική ταχύτητα.

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Στην κυκλική κίνηση **λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του**, το σώμα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, της οποίας το



Σχήμα 3: Το διάνυσμα της a_c

μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (7)$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η διεύθυνση της είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα.

Ομαλή κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, οπότε προκύπτει:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - 0}{t - 0} \Rightarrow s = v \cdot t \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \omega \cdot t \quad (9)$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το υλικό σημείο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα και ίσες γωνίες.

Σχέση γραμμικής ταχύτητας (γωνιακής ταχύτητας)- περιόδου

Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου ($\Delta t = T$) το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή, επομένως η έχει διαγράψει μήκος ίσο με την περιφέρεια του κύκλου ($\Delta s = 2\pi R$) και επίκεντρη γωνία ίση με $\Delta \theta = 2\pi$. Άρα για την Ομαλή κυκλική κίνηση η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα μπορούν να γραφτούν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = \frac{2\pi R}{T} \quad (10)$$

που αν λάβουμε υπόψη μας την σχέση περιόδου - συχνότητας προκύπτει ότι:

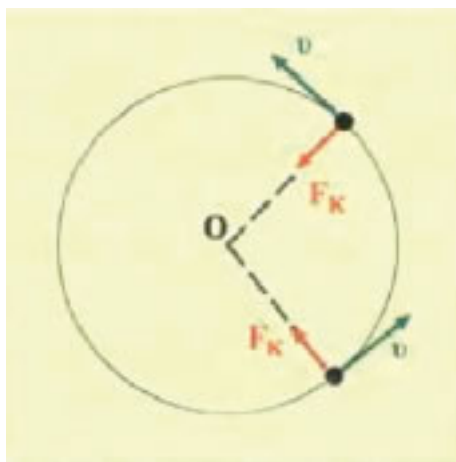
$$\omega = 2\pi f \quad v = 2\pi Rf \quad (11)$$

Η κεντρομόλος δύναμη

Σύμφωνα με τους Νόμους του Νεύτωνα η αιτία για το είδος μιας κίνησης είναι μια δύναμη. Η κεντρομόλος δύναμη είναι εκείνη που “ευθύνεται” για την κυκλική κίνηση, καθώς “αναγκάζει” το σώμα να στρίβει συνεχώς ακολουθώντας μια κυκλική τροχιά. Η κεντρομόλος δύναμη είναι συνεχώς κάθετη στην γραμμική ταχύτητα και έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \Rightarrow \Sigma F = m \cdot \alpha_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow F_{\kappa} = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (12)$$

Η παραπάνω σχέση είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη” για να εκτελεί ένα σώμα Κυκλική Κίνηση. Άρα αν ένα σώμα εκτελεί Κυκλική Κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του να έχουν μέτρο ίσο με την F_{κ} . Για παράδειγμα αν υποθέσουμε



Σχήμα 4: Το διάνυσμα της F_{κ}

ότι η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια κυκλική κίνηση η αιτία είναι η βαρυτική έλξη του ήλιου στην γη που λόγω της κατεύθυνσης της θα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Αντίστοιχο παράδειγμα είναι η κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα του ατόμου σύμφωνα με την κλασσική ερμηνεία του ατόμου. Εκεί η ηλεκτρική δύναμη Coulomb θα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

3 Ασκήσεις - Προβλήματα προς λύση

Με βάση τα παραπάνω προσπαθήστε να λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις και προβλήματα.

3.1 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις, που αναφέρονται στην ομαλή κυκλική κίνηση, είναι σωστές;

- α) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό.
- β) Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό.
- γ) Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι σταθερό.
- δ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι κάθε χρονική στιγμή κάθετη στη γραμμική ταχύτητα.
- ε) Για να πραγματοποιήσει ένα σώμα κυκλική κίνηση δεν απαιτείται δύναμη.
- στ) Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μια ακόμα δύναμη που ασκείται στο σώμα, αλλά η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στην διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής κίνησης.

3.2 Ένα σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, Ποια από τα επόμενα μεγέθη παραμένουν σταθερά;

- α) Η γραμμική ταχύτητα
- β) Η περίοδος
- γ) Η συχνότητα
- δ) Η κεντρομόλος δύναμη

3.3 Στην ομαλή κυκλική κίνηση:

- α) η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι κάθε στιγμή κάθετη στη γραμμική ταχύτητα,

- β) η φορά της κεντρομόλου επιτάχυνσης εξαρτάται από την φορά της κίνησης του κινητού,
- γ) όταν διπλασιάζεται η γωνιακή ταχύτητα διπλασιάζεται και η κεντρομόλος επιτάχυνση.
- δ) Η επιτάχυνση του κινητού είναι εφαπτόμενη στην τροχιά.
- ε) Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι ίση με μηδέν

3.4 Για ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ποιοι από τους παρακάτω τύπους δίνουν το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης ;

- α) $F_{\kappa} = m \cdot \frac{4\pi^2}{f} \cdot R$
- β) $F_{\kappa} = m \cdot 4\pi^2 f^2 \cdot R$
- γ) $F_{\kappa} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$
- δ) $F_{\kappa} = m \cdot \frac{v^2}{R}$

3.5 Ένας δρομέας διανύει την περιφέρεια ενός κυκλικού στίβου, που το μήκος της είναι 200 m, σε χρόνο 40s. Να βρείτε :

- α) την περίοδο και την συχνότητα της κυκλικής κίνησης του δρομέα,
- β) τη γραμμική και τη γωνιακή του ταχύτητα.

3.6 Μικρό σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $v = 10\pi m/s$ και με περίοδο $T = 10s$. Να βρείτε :

- α) τη συχνότητα περιφοράς,
- β) την ακτίνα περιφοράς,
- γ) τη γωνιακή ταχύτητα,
- δ) την κεντρομόλο επιτάχυνση.

3.7 Στο άτομο του υδρογόνου σύμφωνα με την θεωρία του Bohr, το ηλεκτρόνιο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τον πυρήνα με ακτίνα περιφοράς $R = 10^{-10}m$ και με περίοδο $T = 10^{-16}s$. Να βρείτε :

- α) τη συχνότητα περιφοράς του ηλεκτρονίου,
- β) τη γωνιακή και την γραμμική ταχύτητα του ηλεκτρονίου,
- γ) τη κεντρομόλο επιτάχυνση του.

3.8 Ποδήλατο, του οποίου οι ρόδες έχουν ακτίνα $R = 0,5m$, κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 20m/s$ σε ευθύγραμμο δρόμο.

- α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας κάθε ρόδας των ποδηλάτων είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του ποδηλάτου.
- β) Να βρείτε την περίοδο και τη συχνότητα περιστροφής της κάθε ρόδας.
- γ) Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της ρόδας που βρίσκεται στο μέσο της ακτίνας της.

3.9 Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε λασπωμένο δρόμο, χωρίς να γλιστράνε οι τροχοί του. Κάθε τροχός σε χρόνο $t = 5s$ αφήνει ίχνη μήκους $s = 200m$. Αν η ακτίνα του κάθε τροχού είναι $R = 0,5m$, να βρείτε :

- α) την ταχύτητα του αυτοκινήτου,
- β) την περίοδο περιστροφής των τροχών,
- γ) πόσο είναι το μήκος του ίχνους που αφήνει ένας τροχός σε χρόνο μιας περιόδου.

3.10 Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της και σε $24h$ εκτελεί μια πλήρη περιστροφή. Αν στον Ισημερινό η ακτίνα της Γης είναι $R = 6400km$ να βρείτε για ένα σημείο του Ισημερινού :

α) την περίοδο και την συχνότητα,

β) τη γωνιακή ταχύτητα

γ) τη γραμμική ταχύτητα

3.11 Σώμα μάζας $m = 4kg$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε τροχιά ακτίνας $r = 1m$. Αν η κεντρομόλος δύναμη έχει μέτρο $F_{\kappa} = 100N$, να βρείτε για το σώμα :

α) την κεντρομόλο επιτάχυνση του,

β) τη γραμμική του ταχύτητα,

γ) τη συχνότητα του,

δ) την περίοδο του.

3.12 Σώμα μάζας $m = 1kg$ κινείται με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου $v = 10m/s$, δεμένο στο άκρο σχοινιού μήκους $r = 1m$. Το άλλο άκρο του σχοινιού το κρατάμε με το χέρι μας. Αν το σχοινί είναι συνέχεια οριζόντιο, να βρείτε :

α) τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος,

β) την κεντρομόλο δύναμη στο σώμα,

γ) την τάση του σχοινιού,

δ) τη δύναμη που δέχεται το χέρι μας από το σχοινί,

στ) Αν το όριο θραύσης του σχοινιού είναι $T = 400N$, ποια πρέπει να είναι η μέγιστη συχνότητα περιστροφής για να μην κοπεί το σχοινί.

3.13 Όχημα κινείται σε οριζόντιο κυκλικό δρόμο ακτίνας $R = 25m$.

- α) Ποια δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης·
- β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος είναι $\mu_{στ} = 0,4$ να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί το όχημα με ασφάλεια.
- γ) Η μέγιστη ταχύτητα εξαρτάται από την μάζα του οχήματος·

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

3.14 Σώμα μικρών διαστάσεων είναι δεμένο στη μια άκρη σχοινιού μήκους $l = 80cm$ και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο γύρω από την μια την άλλη άκρη του σχοινιού, που διατηρείται ακίνητη. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή ταχύτητα που μπορεί να έχει το σώμα όταν βρίσκεται στην ανώτερη θέση, ώστε να εξακολουθεί να κινείται κυκλικά·

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

