

1ο Διαγώνισμα - Λύσεις Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Θέμα 1ο

1.1. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη, όταν η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι:

(α) ίση με το μηδέν

1.2. Το πλάτος ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή διπλασιάζεται. Τότε:

(β) η περίοδος παραμένει σταθερή

1.3 Σώμα μάζας m εκτελεί Απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T και πλάτος A . Τετραπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσής του και διπλασιάζουμε τη μάζα του ενώ διατηρούμε αμετάβλητη τη σταθερά επαναφοράς D . Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις ακραίες θέσεις θα:

(α) τετραπλασιαστεί

1.4 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4s$. Η συχνότητα μεγιστοποίησης του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι f' ίση με:

(γ) $0,5 \text{ Hz}$

1.5

(α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται η μέγιστη ταχύτητα και η ενέργεια ταλάντωσης. **Λ**

(β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσες αποστάσεις. **Λ**

(γ) Για να εκτελέσει ένα σώμα Α.Α.Τ πρέπει για τη συνισταμένη δύναμη να ισχύει $\Sigma F = Dx$. **Λ**

(δ) Στην Α.Α.Τ η επιτάχυνση αλλάζει κατεύθυνση στη θέση ισορροπίας **Σ**

(ε) Στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει ταχύτητα $v < 0$ και επιτάχυνση $a < 0$. Εκείνη τη στιγμή το σώμα κινείται επιταχυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) της ταλάντωσης. **Σ**

Θέμα 2ο

2.1

(α) Στη θέση απομάκρυνσης $x = +0,1m$ η κινητική ενέργεια K και η δυναμική ενέργεια U ικανοποιούν τη σχέση:

ι) $K = 3U$

Αιτιολόγηση: Από το διάγραμμα της Κινητικής Ενέργειας που μας δίνεται προκύπτει ότι $E = 4J$ και $A = 0,2m$. Άρα η θέση $x = +0,1m = \frac{A}{2}$. Με την βοήθεια της Α.Δ.Ε.Τ.

$$\begin{aligned} E = K + U &\Rightarrow K = E - \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow K = E - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}DA^2\right) \\ &\Rightarrow K = E - \frac{E}{4} = \frac{3E}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{4}(K + U) \Rightarrow K = 3U \end{aligned}$$

(β) Η δύναμη επαναφοράς F και η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας ικανοποιούν τη σχέση:

$$\iota) F = -200x(S.I.)$$

Αιτιολόγηση: Από το διάγραμμα της Κινητικής Ενέργειας που μας δίνεται προκύπτει ότι $E = 4J$ και $A = 0,2m$. Άρα:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = 200N/m \\ &\Rightarrow F = -Dx \Rightarrow F = -200x(S.I.) \end{aligned}$$

2.2. Από το διάγραμμα της Κινητικής Ενέργειας με τον χρόνο προκύπτει ότι για $t = 0, K = 0$, άρα το σώμα βρίσκεται σε μία ακραία θέση. Με αυτή την λογική απορρίπτουμε το διάγραμμα (β). Επειδή την χρονική στιγμή $t_1 = T/4$ το σώμα έχει θετική ταχύτητα, που είναι και μέγιστη σημαίνει ότι περνά από την θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Άρα αυτό σημαίνει ότι την στιγμή $t = 0$ βρισκόταν στην ακραία αρνητική θέση. Το διάγραμμα που ανταποκρίνεται στα παραπάνω είναι το (γ)

2.3. Στην κάτω άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $d/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d . Στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος, ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$(\delta) F_{ελ}/F_{επ} = 3$$

Αιτιολόγηση: Από το σχήμα προκύπτει εύκολα ότι:

$$\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = \frac{k\Delta l}{kx} = \frac{d + d/2}{d/2} = 3$$

Θέμα 3ο

$$(\alpha) d = 2A \Rightarrow A = 20cm = 0,2m, \Delta t_{min} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,2\pi sec \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 10rad/sec$$

(β) Προσφέραμε ενέργεια ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης.

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 0,2J$$

(γ) Από την Α.Δ.Ε.Τ. προκύπτει:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + U_1 \Rightarrow U_1 = 0,05J$$

- (δ) Την χρονική στιγμή $t = 0$ γνωρίζουμε ότι $x = 0, 1\sqrt{2}, v > 0$ (το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται καθώς κινείται το σώμα προς ακραία θέση). Άρα:

$$0, 1\sqrt{2} = 0, 2\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

και επειδή για $t = 0, v > 0 \Rightarrow \sin\phi_0 > 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

- (ε) Υπολογίζω την απομάκρυνση από την θ.ι την χρονική στιγμή $t = 3T/4$ με την χρήση της χρονικής εξίσωσης για την απομάκρυνση.

$$x = 0, 2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, 2\eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow x = -0, 1\sqrt{2}m$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας θα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma Fv = +Dxv$$

Για να υπολογίσω την ταχύτητα v την χρονική στιγμή $t = 3T/4$ χρησιμοποιώ την αντίστοιχη χρονική της εξίσωση.

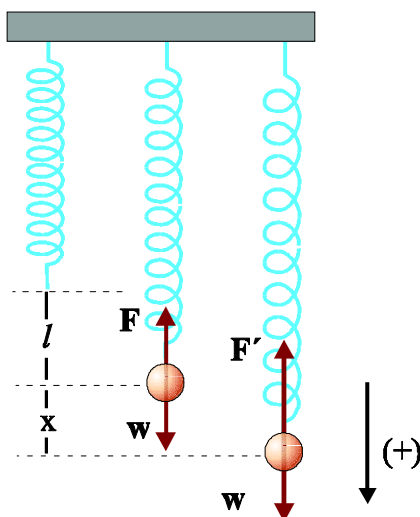
$$v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow v = 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow v = +\sqrt{2}m/s$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$\frac{dU}{dt} = +Dxv = m\omega^2 xv = -2J/s$$

Θέμα 4ο

- (α) Για να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση αρκεί να δείξουμε ότι σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θ.ι. ισχύει η συνθήκη $\Sigma F = -Dx$. Σχεδιάζουμε το σχήμα:



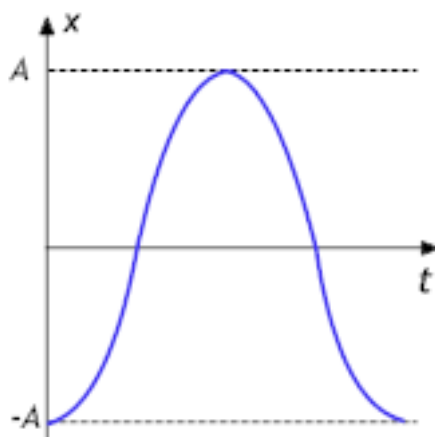
Για την θέση ισορροπίας ισχύει ότι $\Sigma F = 0 \Rightarrow kl = mg(1)$. Στην τυχαία θέση ισχύει ότι $\Sigma F = mg - k(l + x)$. Όμως λόγω της σχέσης (1) $\Rightarrow \Sigma F = -kx$. Άρα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Το πλάτος θα είναι ίσο με την αρχική εκτροπή από την θ.ι. άρα $A = l$. Από την σχέση (1) προκύπτει ότι $A = 0, 1m$

- (β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$. Όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/sec}$. Αφού για $t = 0, x = -A$ βρίσκω και την αρχική φάση:

$$-A = A\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

Άρα:

$$x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \quad (S.I.)$$



- (γ) Το σώμα περνάει για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του την χρονική στιγμή που $x = 0$. Άρα την στιγμή $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20}\text{sec}$ (μπορώ να το βρώ αν θέσω $x = 0$ στην παραπάνω χρονική εξίσωση).
- (δ) Το νέο πλάτος θα είναι $A' = 0,15\text{m}$ (50% μεγαλύτερο από το 0,1). Άρα η νέα ενέργεια που θα έπρεπε να έχουμε προσφέρει είναι ίση με:

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}mv_{\epsilon\kappa\tau}^2 + \frac{1}{2}kl^2 \Rightarrow v_{\epsilon\kappa\tau}^2 = \frac{k}{m}(A'^2 - l^2) \Rightarrow v_{\epsilon\kappa\tau} = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{m/s}$$