

1ο Διαγώνισμα - Λύσεις Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Θέμα 1ο

1.1. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και γωνιακής συχνότητας ω , είναι της μορφής $x = A\sin(\omega t)$. Τότε, η εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι η:

(β) $v = -\omega A \sin(\omega t)$

1.2. Ένα σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ολική ενέργεια E , πλάτος A και περίοδο T . Αν το σύστημα απορροφήσει επιπλέον ενέργεια $3E$, τότε

(δ) το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται

1.3 Σώμα μάζας m εκτελεί Απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T και πλάτος A . Τετραπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσής του και διπλασιάζουμε τη μάζα του ενώ διατηρούμε αμετάβλητη τη σταθερά επαναφοράς D . Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις ακραίες θέσεις θα:

(α) τετραπλασιαστεί

1.4 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4s$. Η συχνότητα μεγιστοποίησης του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι f' ίση με:

(γ) $0,5 \text{ Hz}$

1.5

(α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται η μέγιστη ταχύτητα και η ενέργεια ταλάντωσης. **Λ**

(β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσες αποστάσεις. **Λ**

(γ) Για να εκτελέσει ένα σώμα Α.Α.Τ πρέπει για τη συνισταμένη δύναμη να ισχύει $\Sigma F = Dx$. **Λ**

(δ) Στην Α.Α.Τ η επιτάχυνση αλλάζει κατεύθυνση στη Θέση ισορροπίας **Σ**

(ε) Στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει ταχύτητα $v < 0$ και επιτάχυνση $a < 0$. Εκείνη τη στιγμή το σώμα κινείται επιταχυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) της ταλάντωσης. **Σ**

Θέμα 2ο

2.1

- (α) Στη θέση απομάκρυνσης $x = +0,1m$ η κινητική ενέργεια K και η δυναμική ενέργεια U ικανοποιούν τη σχέση:

$$u) \quad K = 3U$$

Αιτιολόγηση: Από το διάγραμμα της Κινητικής Ενέργειας που μας δίνεται προκύπτει ότι $E = 4J$ και $A = 0,2m$. Άρα η θέση $x = +0,1m = \frac{A}{2}$. Με την βοήθεια της Α.Δ.Ε.Τ.

$$\begin{aligned} E = K + U &\Rightarrow K = E - \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow K = E - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}DA^2\right) \\ &\Rightarrow K = E - \frac{E}{4} = \frac{3E}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{4}(K + U) \Rightarrow K = 3U \end{aligned}$$

- (β) Η δύναμη επαναφοράς F και η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας ικανοποιούν τη σχέση:

$$i) \quad F = -200x(S.I.)$$

Αιτιολόγηση: Από το διάγραμμα της Κινητικής Ενέργειας που μας δίνεται προκύπτει ότι $E = 4J$ και $A = 0,2m$. Άρα:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = 200N/m \\ &\Rightarrow F = -Dx \Rightarrow F = -200x(S.I.) \end{aligned}$$

2.2. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**. Όπως φαίνεται απ' το κοινό διάγραμμα $U-t$ και $K-t$, τα σημεία τομής, είναι οι στιγμές όπου εξισώνονται η κινητική ενέργεια K με τη δυναμική ενέργεια U . Αυτό συμβαίνει 4 φορές σε κάθε περίοδο, μιας και στο διάγραμμα έχουμε 4 σημεία τομής ανά περίοδο ταλάντωσης. Άρα το σώμα εκτελεί $N = \frac{120}{4} = 30$ ταλαντώσεις το λεπτό. Επομένως με βάση τον ορισμό της συχνότητας: $f = \frac{30}{1min} = \frac{30}{60sec} \Rightarrow f = 0.5Hz$

2.3. Στην κάτω άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $d/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d . Στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος, ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$(δ) \quad F_{ελ}/F_{επ} = 3$$

Αιτιολόγηση: Από το σχήμα προκύπτει εύκολα ότι:

$$\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = \frac{k\Delta l}{kx} = \frac{d + d/2}{d/2} = 3$$

Θέμα 3ο

- (α) Από την σχέση της δύναμης επαναφοράς προκύπτει ότι $D = 16N/m$. Άρα $U = \frac{1}{2}Dx^2 = 16J \Rightarrow K = 3U = 48J$ Με την χρήση της Α.Δ.Ε.Τ. την χρονική στιγμή $t = 0$:

$$K + U = E \Rightarrow E = 64J$$

(β)

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 2\sqrt{2}m \quad (1)$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ γνωρίζουμε ότι $x = \sqrt{2}m, v > 0$. Άρα:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 2\sqrt{2}\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \phi_0 &= \frac{\pi}{6}, \phi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{aligned}$$

και επειδή για $t = 0, v > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_0 > 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$$(\gamma) \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = 4 \text{ rad/sec}$$

$$x = 2\sqrt{2}\eta\mu(4t + \frac{\pi}{6}) \quad (S.I.)$$

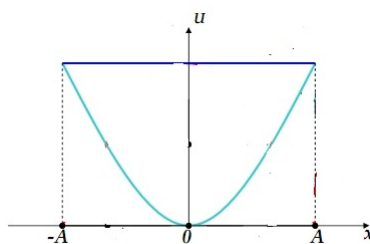
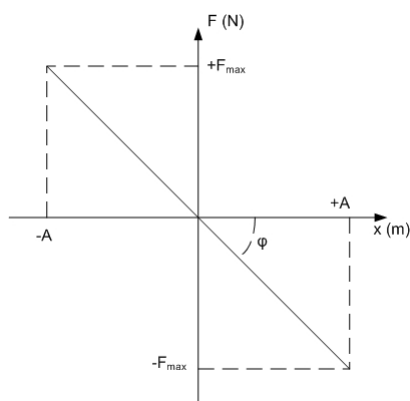
(δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής δίνεται από την σχέση:

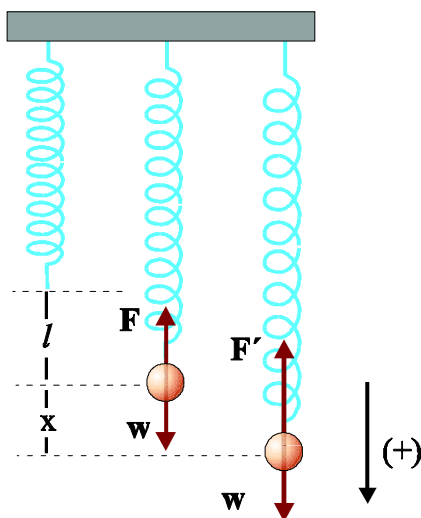
$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = -32\sqrt{2}\eta\mu(4t + \frac{\pi}{6})$$

Αντικαθιστώ την χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{24} \text{ s}$

$$\frac{dP}{dt} = -32\sqrt{2}\eta\mu(4\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6}) = -64\eta\mu(\frac{\pi}{3}) = -32\sqrt{3} \text{ kgm/s}^2$$

(ε) Οι γραφικές παραστάσεις είναι:





Θέμα 4ο

- (α) Για να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση αρκεί να δείξουμε ότι σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θ.ι. ισχύει η συνθήκη $\Sigma F = -Dx$. Σχεδιάζουμε το σχήμα:

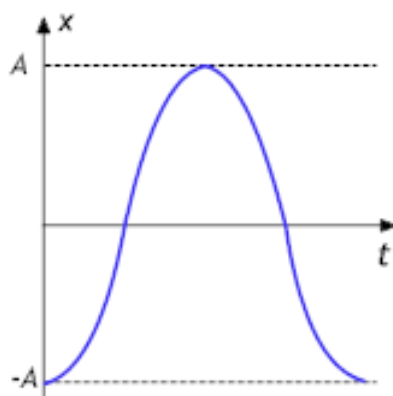
Για την θέση ισορροπίας ισχύει ότι $\Sigma F = 0 \Rightarrow kl = mg(1)$. Στην τυχαία θέση ισχύει ότι $\Sigma F = mg - k(l + x)$. Όμως λόγω της σχέσης (1) $\Rightarrow \Sigma F = -kx$. Άρα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Το πλάτος θα είναι ίσο με την αρχική εκτροπή από την θ.ι. άρα $A = l$. Από την σχέση (1) προκύπτει ότι $A = 0,1m$

- (β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$. Όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/sec}$. Αφού για $t = 0, x = -A$ βρίσκω και την αρχική φάση:

$$-A = A\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

Άρα:

$$x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \quad (S.I.)$$



- (γ) Το σώμα περνάει για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του την χρονική στιγμή που $x = 0$. Άρα την στιγμή $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ sec}$ (μπορώ να το βρώ αν θέσω $x = 0$ στην παραπάνω χρονική εξίσωση).
- (δ) Το νέο πλάτος θα είναι $A' = 0,15 \text{ m}$ (50% μεγαλύτερο από το 0,1). Άρα η νέα ενέργεια που θα έπρεπε να έχουμε προσφέρει είναι ίση με:

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}mv_{\epsilon\kappa\tau}^2 + \frac{1}{2}kl^2 \Rightarrow v_{\epsilon\kappa\tau}^2 = \frac{k}{m}(A'^2 - l^2) \Rightarrow v_{\epsilon\kappa\tau} = \frac{\sqrt{5}}{2}m/s$$