

6 Κύματα

6.1 Ορισμός του κύματος

Κύμα ονομάζεται η διάδοση μιας διαταραχής που μεταφέρει ενέργεια και ορμή με σταθερή ταχύτητα.

Ελαστικό μέσο ονομάζεται κάθε υλικό μέσο που, για λόγους απλότητας, δεχόμαστε ότι έχει τις εξής ιδιότητες:

- Αποτελείται από σωματίδια, τα οποία πληρούν το μέσο χωρίς διάκενα.
- Τα σωματίδια αυτά συνδέονται μεταξύ τους με ελαστικές δυνάμεις.

Αν για κάποιο λόγο ένα σωματίδιο Σ απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, τότε εμφανίζεται μια δύναμη που τείνει να επαναφέρει το σωματίδιο στη θέση ισορροπίας του. Ταυτόχρονα, λόγω αντιδράσεων, δέχονται δυνάμεις και τα γειτονικά σωματίδια, οπότε απομακρύνονται και αυτά από τις θέσεις ισορροπίας τους. Με τον τρόπο αυτό η διαταραχή που προκλήθηκε στο σωματίδιο Σ διαδίδεται σταδιακά από το ένα σημείο του ελαστικού μέσου στο άλλο και προς όλες τις διευθύνσεις με ορισμένη ταχύτητα. όταν το μέσο είναι ομογενές και ισότροπο (δηλ. έχει τις ίδιες φυσικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις), η ταχύτητα είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις.

Κατά την διάδοση ενός κύματος μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο, όχι όμως και ύλη

Αν ένα σωματίδιο Σ (η πηγή των κυμάτων) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης, τότε η ενέργεια που προσφέρεται συνεχώς στο σωματίδιο ευτό θα μεταβιβάζεται προς όλες τις διευθύνσεις με ορισμένη ταχύτητα. Όταν το κύμα φθάνει σε ένα οποιοδήποτε σωματίδιο του μέσου, αυτό αρχίζει επίσης να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση και αποκτά ενέργεια (κινητική και δυναμική), η οποία μεταβιβάζεται στα γειτονικά του σωματίδια κ.ο.κ. Έτσι με την διαδικασία αυτή, γίνεται μεταφορά της ενέργειας που παρέχεται στη πηγή Σ των κυμάτων από το εξωτερικό αίτιο, χωρίς να γίνεται μεταφορά ύλης, αφού τα σωματίδια του μέσου εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους.

Όταν η ταλάντωση της πηγής Σ είναι απλή αρμονική ταλάντωση, τότε το παραγόμενο κύμα ονομάζεται **Αρμονικό Κύμα**.

6.2 Τα είδη των κυμάτων

Τα κύματα, ανάλογα με τον μηχανισμό παραγωγής και διάδοσης τους, διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Στα **Μηχανικά Κύματα**, που είναι η διάδοση μιας διαταραχής σε ένα ελαστικό μέσο. Τα μηχανικά κύματα (σεισμικά, υδάτινα, ηχητικά κλπ) διαδίδονται μόνο σε υλικά σώματα που έχουν την ικανότητα να δέχονται και να μεταβιβάζουν προσωρινές παραμορφώσεις.

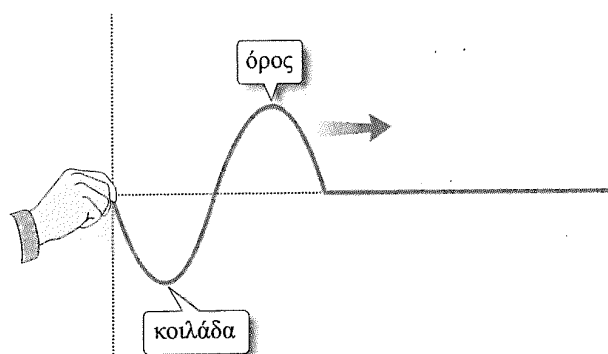
- Στα **Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα**, που είναι η διάδοση μιας ηλεκτρομαγνητικής διαταραχής. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φωτεινά κύματα, ραδιοκύματα, ακτίνες Χ, ακτίνες γ) διαδίδονται και στο κενό με ταχύτητα $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Με κριτήριο τις διαστάσεις του ελαστικού μέσου, τα κύματα διακρίνονται σε :

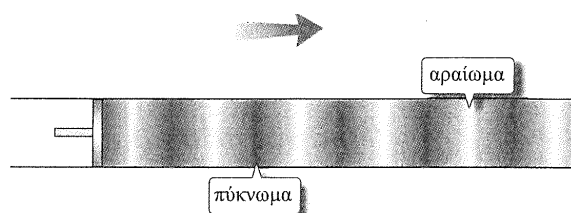
- **Γραμμικά Κύματα**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται μόνο σε μια διεύθυνση. Γραμμικά κύματα διαδίδονται κατά μήκος μιας τεντωμένης ελαστικής χορδής.
- **Επιφανειακά Κύματα**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια ενός υλικού μέσου. Επιφανειακά κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού.
- **Κύματα χώρου**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται προς όλες τις διευθύνσεις ενός υλικού μέσου. Κύματα χώρου είναι τα ηχητικά κύματα που διαδίδονται στον αέρα.

Με κριτήριο το μηχανισμό διάδοσης, τα κύματα διακρίνονται σε :

- **Εγκάρσια Κύματα**, όπου τα σωματίδια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται σε διεύθυνση κάθετη προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά σώματα και στην ελεύθερη επιφάνεια των υγρών. Κατά τη διάδοση των εγκαρσίων κυμάτων σχηματίζονται "όρη" και "κοιλιάδες", όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- **Διαμήκη Κύματα**, όπου τα σωματίδια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται σε διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται στα στερεά, τα υγρά και τα αέρια. Κατά την διάδοση



των διαμήκων κυμάτων εμφανίζονται "πυκνώματα" και "αραιώματα". Στα στερεά τα διαμήκη κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από ό,τι στα εγκάρσια.

Με κριτήριο τη μετακίνηση ή όχι της φάσης, τα κύματα διακρίνονται σε :

- **Τρέχοντα Κύματα**, όπου συμβαίνει μετακίνηση της φάσης του κύματος από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο με πεπερασμένη ταχύτητα.
- **Στάσιμα Κύματα**, όπου η φάση του κύματος δεν μετακινείται.

6.3 Τα στοιχεία του τρέχοντος αρμονικού κύματος

Τα στοιχεία ενός τρέχοντος αρμονικού κύματος είναι τα εξής:

α. **Η περίοδος, η συχνότητα και το πλάτος του αρμονικού κύματος**

Όταν η πηγή ενός κύματος, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T , συχνότητα f και πλάτος A , τότε τα σωματίδια του ελαστικού μέσου όπου διαδίδεται το κύμα εκτελούν επίσης απλή αρμονική ταλάντωση που έχει την ίδια περίοδο, την ίδια συχνότητα και το ίδιο πλάτος με την ταλάντωση της πηγής. Τα μεγέθη αυτά, όταν αναφερόμαστε στο κύμα, αποτελούν τα αντίστοιχα μεγέθη του κύματος. Άρα:

Περίοδος (T) ενός αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση. Αν φωτογραφίζαμε το μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα την χρονική στιγμή $t_1 = T$ και $t_2 = 2T$, θα βλέπαμε ότι η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την περίοδο ενός αρμονικού κύματος και ως εξής:

Περίοδος ενός αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται.

Συχνότητα (f) ενός αρμονικού κύματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου.

Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης των σωματιδίων ενός ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα, αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της πηγής του κύματος και δεν εξαρτάται από το ελαστικό μέσο.

Πλάτος (A) ενός αρμονικού κύματος είναι το πλάτος με το οποίο ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου.

β. **Η ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος**

Ταχύτητα διάδοσης (v) ενός αρμονικού κύματος ονομάζεται η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το κύμα σε ένα ορισμένο ελαστικό μέσο. Όταν το ελαστικό μέσο είναι ομογενές και ισότροπο, η ταχύτητα διάδοσης ενός μηχανικού κύματος είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση:

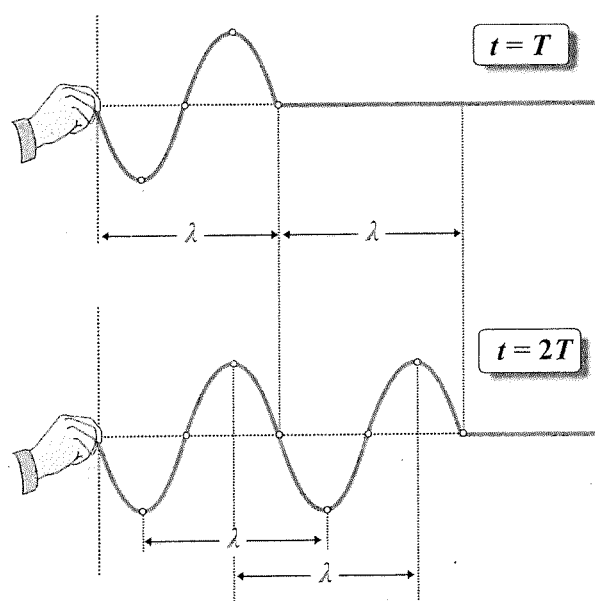
$$v = \frac{x}{t} \quad (82)$$

όπου x είναι η απόσταση την οποία διατρέχει το κύμα κατά μήκος μιας ευθείας διάδοσης του και t ο χρόνος που χρειάζεται για αυτό.

Η σταθερή ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σε ένα ελαστικό μέσο δεν πρέπει να συγχέεται με τη χρονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα της ταλάντωσης των σωματιδίων του μέσου.

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από το αν το κύμα είναι εγκάρσιο ή διαμήκες και καθορίζεται από την ελαστικότητα και την αδράνεια του ελαστικού μέσου.

γ. Το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος



Σχήμα 21: Σε χρόνο T μια κορυφή του κύματος μετακινείται κατά λ

Μήκος Κύματος (λ) ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο ονομάζεται η απόσταση την οποία διατρέχει το κύμα στο μέσο αυτό σε χρόνο ίσο με μια περίοδο του κύματος. Αν στην σχέση (82) θέσουμε $t = T$ και $x = \lambda$, θα έχουμε:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda \cdot f \quad (83)$$

όπου f είναι η συχνότητα του κύματος. Η τελευταία σχέση ισχύει για οποιοδήποτε αρμονικό κύμα και ονομάζεται **Θεμελιώδης εξίσωση της Κυματικής**.

Στην θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής η συχνότητα f καθορίζεται από την πηγή του κύματος και η ταχύτητα v από το μέσο διάδοσης του κύματος. Κατα συνέπεια, όταν ένα κύμα μεταβαίνει από ένα μέσο Α σε ένα άλλο μέσο Β, αλλάζει η ταχύτητα και κατα συνέπεια το μήκος κύματος.

6.4 Η εξίσωση του Αρμονικού Κύματος

Εξίσωση ενός αρμονικού κύματος ονομάζουμε την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση ενός σωματιδίου του μέσου διάδοσης του κύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο και με την απόσταση του σωματιδίου από την αρχή μέτρησης των αποστάσεων.

Υποθέτουμε ότι στο σημείο Ο ενός ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κυμάτων, η οποία εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας f και ότι το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα Οx (προς τα δεξιά της πηγής των κυμάτων) με ταχύτητα v .

Εκλέγουμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) το σημείο Ο και ως αρχή των χρόνων ($t=0$) τη χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση στο σημείο Ο είναι ίση με μηδέν, δηλαδή η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι $y = 0$ και η ταχύτητα έχει θετική φορά ($v > 0$). Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης στο σημείο Ο θα είναι της μορφής!

$$y = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (84)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα και T η περίοδος της ταλάντωσης της πηγής των κυμάτων.

Ένα σημείο Μ του μέσου που απέχει απόσταση (ΟΜ)= x από την πηγή θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{x}{v} \quad (85)$$

Επομένως σε μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Μ θα έχει ταλαντωθεί για χρόνο:

$$t - t_1 = t - \frac{x}{v} \quad (86)$$

Άρα, με την προϋπόθεση ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ είναι ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Ο, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ θα δίνεται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (87)$$

Η σχέση (87) αποτελεί την **Εξίσωση του Αρμονικού Κύματος**

Διάδοση του Κύματος κατά την αρνητική φορά Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα Ox , δηλαδή από το σημείο M προς το O , τότε φτάνει πρώτα στο σημείο M και μετά στο σημείο O . Αυτό σημαίνει ότι η φάση της ταλάντωσης στο σημείο O προηγείται της φάσης της ταλάντωσης στο σημείο M κατά γωνία $\phi = 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Άρα αν κατά την χρονική στιγμή t η απομάκρυνση στο σημείο O δίνεται από την εξίσωση (84), την ίδια χρονική στιγμή η απομάκρυνση στο σημείο M δίνεται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (88)$$

Για κάθε σημείο που βρίσκεται στο αρνητικό ημιάξονα το x θα μπαίνει στις εξισώσεις με το πρόσημο του.

Η ταλάντωση των σωματιδίων του ελαστικού μέσου Όταν στο ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, κάθε σημείο του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αφού το κύμα περάσει από αυτό και το διεγείρει. Αν υποθέσουμε ένα κύμα που οδεύει προς τον ημιάξονα με φορά προς τα δεξιά, οι χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου M που απέχει απόσταση x_M από το O θα είναι:

Εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θέση Ισορροπίας

$$y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (89)$$

Εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης

$$V_M = \omega A \sigma \nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (90)$$

Εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης

$$\alpha_M = -\omega^2 \cdot y_M \Rightarrow \alpha_M = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (91)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι οι γνωστές μας εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης για ένα σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται στο ελαστικό μέσο. **Οι παραπάνω σχέσεις όμως έχουν νόημα όταν το κύμα έχει φτάσει στο σημείο M , δηλαδή όταν:**

$$\phi \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{x_M}{v} \quad (92)$$

Προφανώς, για κάθε σωματίδιο μάζας m του ελαστικού μέσου που ταλαντώνεται με πλάτος A και σταθερά επαναφοράς $D = m\omega^2$ ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA^2 \quad (93)$$

όπου y η απομάκρυνση του σωματιδίου από την θέση ισορροπίας και v η ταχύτητα ταλάντωσης του σε μια τυχαία χρονική στιγμή.

6.5 Γραφική παράσταση του αρμονικού κύματος

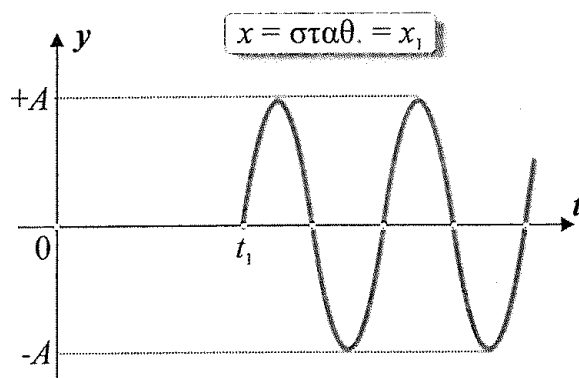
Από τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού κύματος προκύπτει ότι η απομάκρυνση y από την θέση ισορροπίας είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Εξαρτάται από τον χρόνο t και από την θέση x του σωματιδίου. Κατα συνέπεια η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης να μπορεί να πραγματοποιηθεί αν θεωρήσουμε τη μια από τις δύο μεταβλητές σταθερή. Έτσι διακρίνουμε 2 περιπτώσεις γραφικών παραστάσεων.

α) Ταλάντωση σωματιδίου του μέσου

Για ένα δεδομένο σωματιδίο του μέσου που βρίσκεται σε ένα σημείο του άξονα Ox , δηλαδή για $x = x_1$ η εξίσωση του αρμονικού κύματος παριστάνει την εξίσωση ταλάντωσης του σωματιδίου και γράφεται:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = f(t), \quad t \geq \frac{x_1}{v}$$

και δείχνει ότι η απομάκρυνση y στο θεωρούμενο σημείο είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Επίσης είναι σαφές ότι η ταλάντωση του σωματιδίου ξεκινά



Σχήμα 22: Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σωματιδίου που βρίσκεται στην θέση x_1 σε συνάρτηση με τον χρόνο.

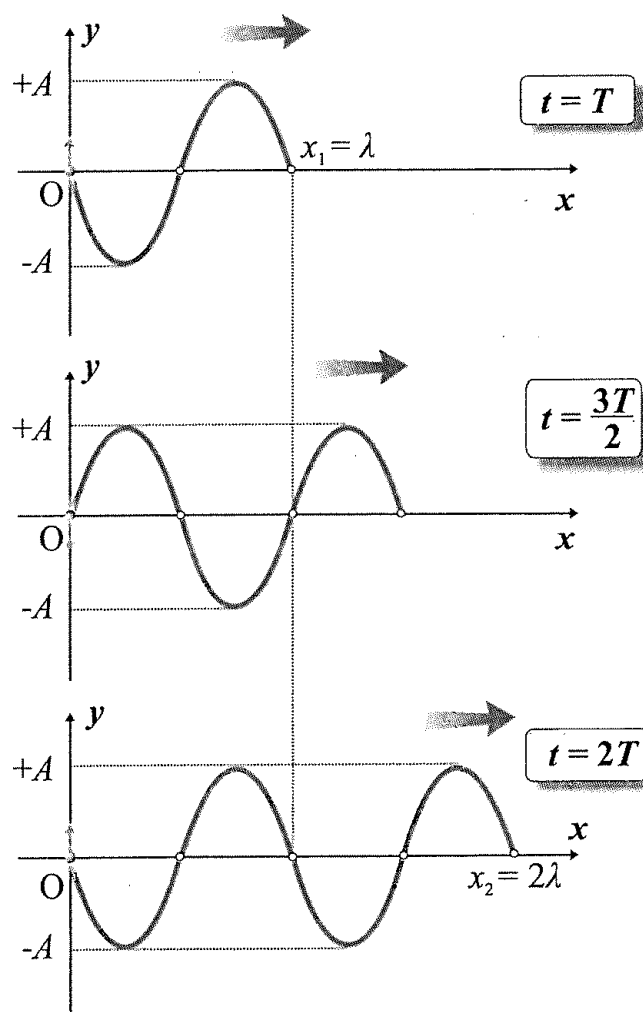
μετά την χρονική στιγμή που το κύμα έχει φτάσει στο σημείο αυτό. Αντίστοιχες είναι και οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας, της επιτάχυνσης, της Δύναμης επαναφοράς.

β) Στιγμιότυπο του κύματος

Για μια δεδομένη χρονική στιγμή, δηλαδή για $t = t_1$, η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = f(x)$$

και δείχνει ότι η απομάκρυνση y στα διάφορα σημεία του άξονα Ox είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της απόστασης x .



Σχήμα 23: Στιγμιότυπα του κύματος σε διάφορες χρονικές στιγμές. Στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος, αυτό διατρέχει απόσταση ίση με το μήκος κύματος λ και κάθε σωματίδιο του μέσου εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση.

Η Μεθοδολογία για την σχεδίαση ενός στιγμιότυπου

- 1ο Βήμα: Θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $t = t_1$ για να βρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ της οποίας την γραφική παράσταση θα σχεδιάσουμε.
- 2ο Βήμα: Βρίσκουμε πόσο μακριά έχει φτάσει από την αρχή O το κύμα ($x = vt$) και συγκρίνουμε αυτή την απόσταση με το μήκος κύματος λ (ή το $\lambda/4$).
- 3ο Βήμα: Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου O ($x = 0$) την χρονική στιγμή t_1 , θέτοντας στην εξίσωση που βρήκαμε στο 1ο βήμα $x = 0$.
- 4ο Βήμα: Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο από την

αρχή Ο, όπου έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή t_1 . Το σημείο αυτό την στιγμή t_1 βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.1 - 9.27, 9.70, 9.73, 9.74, 9.76, 9.78, 9.79, 9.81, 9.82, 9.85, 9.87, 9.89, 9.90, 9.91 - 9.94, 9.96 - 9.98, 9.100 - 9.105, 9.107, 9.109

6.6 Φάση του Αρμονικού Κύματος

Στην εξίσωση του αρμονικού κύματος η παράσταση:

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \quad (94)$$

έχει διαστάσεις γωνίας (rad) και ονομάζεται **φάση του κύματος**. Από τη σχέση (94) προκύπτει ότι η φάση ϕ ενός κύματος εξαρτάται από την απόσταση x από το σημείο Ο και από τον χρόνο t . Αυτό σημαίνει ότι για ένα δεδομένο σημείο του άξονα Ox ($x = x_1$) η φάση θα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t και σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ η φάση θα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή του κύματος.

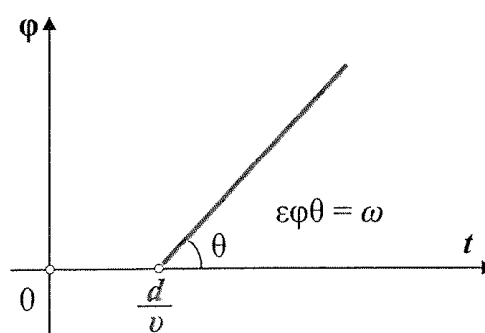
Κάθε σημείο του μέσου που ταλαντώνεται έχει φάση $\phi \geq 0$. Την ίδια χρονική στιγμή t κάθε τέτοιο σημείο έχει διαφορετική φάση από τα υπόλοιπα. Μεταξύ δύο σημείων, μεγαλύτερη φάση έχει το σημείο στο οποίο φτάνει πρώτα το κύμα.

Φάση ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Για ένα δεδομένο σημείο Μ που βρίσκεται στην θέση $x = x_1$ η φάση γράφεται:

$$\phi_M = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad t \geq \frac{x_1}{v}$$

βέβαια παραπάνω υποθέσαμε ότι το κύμα διαδίδεται προς την θετική φορά του άξονα διάδοσης.

Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τον χρόνο t για το σωματίδιο στη θέση Μ θα είναι μια ευθεία γραμμή. Η χρονική στιγμή $\frac{d}{v}$ είναι η στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο Μ.



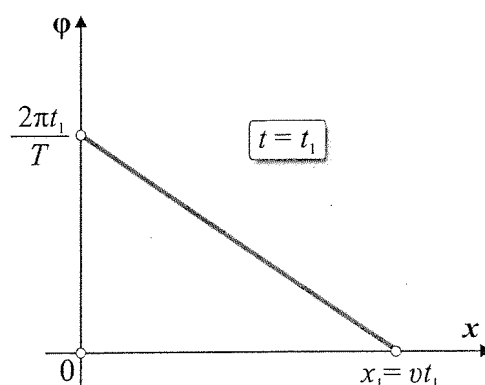
Διαφορά φάσης του ίδιου υλικού σημείου σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για το υλικό σημείο Μ σε δύο τυχαίες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 η διαφορά φάσης υπολογίζεται:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

Φάση ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου για μια δεδομένη χρονική στιγμή Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $t - t_1$ η φάση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$\phi_M = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Παρατηρούμε ότι τα υλικά σημεία του μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα θα έχουν διαφορετική φάση σε μια χρονική στιγμή t_1 .



Διαφορά φάσης δύο υλικών σημείων του μέσου σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Θεωρούμε δυο σημεία το Α και το Β του άξονα Ox που απέχουν αποστάσεις x_A και x_B από το σημείο Ο. Οι φάσεις των ταλαντώσεων τους κατά την ίδια χρονική στιγμή t θα είναι αντίστοιχα:

$$\phi_A = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$$

και

$$\phi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_B > x_A$ τότε θα είναι και $\phi_A > \phi_B$. Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ τους θα είναι:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε τα εξής:

α) Αν είναι $\Delta x = \kappa\lambda$, τότε θα είναι:

$$\Delta\phi = 2\kappa\pi$$

και κατά συνέπεια:

$$y_A = A\eta\mu(\phi_A) \Rightarrow y_A = A\eta\mu(\phi_B + 2\kappa\pi) = A\eta\mu(\phi_B) \Rightarrow y_A = y_B$$

Άρα: όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων από την πηγή του κύματος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε τα σημεία αυτά έχουν σε κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Δηλαδή:

$$\Delta x = \kappa\lambda, \kappa = 1, 2, \dots \Rightarrow \text{Συμφωνία Φάσης}$$

Από το παραπάνω προκύπτει και ένας άλλος ορισμός του μήκους κύματος: **Μήκος Κύματος λ ονομάζεται η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων της ευθείας διάδοσης του κύματος, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης**

β) Αν είναι $\Delta x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$, τότε θα είναι:

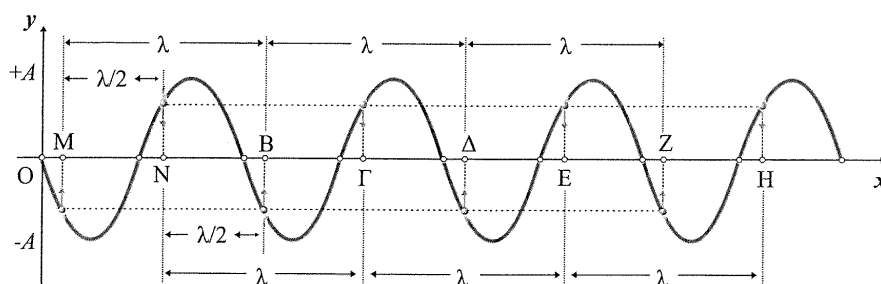
$$\Delta\phi = (2\kappa + 1)\pi$$

και κατά συνέπεια,

$$y_A = A\eta\mu(\phi_A) \Rightarrow y_A = A\eta\mu(\phi_B + (2\kappa + 1)\pi) = -A\eta\mu(\phi_B) \Rightarrow y_A = -y_B$$

Άρα: όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων από την πηγή του κύματος είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, τότε τα σημεία αυτά έχουν σε κάθε χρονική στιγμή αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα ταλάντωσης και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Δηλαδή:

$$\Delta x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}, \kappa = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \text{Αντίθεση Φάσης}$$



Σχήμα 24: Σημεία σε συμφωνία φάσης απέχουν αποστάσεις $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$, ενώ σημεία σε αντίθεση φάσης απέχουν αποστάσεις $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.28 - 9.58, 9.122, 9.123, 9.126, 9.127, 9.128, 9.130 - 9.136, 9.139, 9.140, 9.143 - 9.150, 9.153

6.7 Αρμονικό Κύμα με αρχική φάση

Αν η ταλάντωση του σημείου Ο ($x = 0$), που το θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων, έχει αρχική φάση ϕ_0 ,

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

τότε η εξίσωση του αρμονικού κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) \quad (95)$$

η παραπάνω μορφή προκύπτει εύκολα αν θυμηθούμε την απόδειξη της εξίσωσης του αρμονικού κύματος (87).

Πρακτικά Αρχική φάση ϕ_0 για ένα κύμα μπορεί να σημαίνει ότι:

- είτε ότι το σημείο Ο έχει αρχίσει να εκτελεί ταλάντωση πριν τη χρονική στιγμή που θεωρούμε εμείς ως $t = 0$, οπότε αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα να έχει διαδοθεί σε κάποια απόσταση πέρα από το Ο. Για αν βρούμε που έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή $t = 0$ αρκεί να θέσουμε $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) = 0$,
- είτε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Ο,
- είτε το σημείο Ο ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με φορά προς τα κάτω και με ταχύτητα $v = -v_{max}$. Στην περίπτωση αυτή το κύμα δεν έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t = 0$, αλλά όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου στα οποία φτάνει το κύμα ξεκινούν να ταλαντώνονται με φορά προς τα κάτω (όπως το σημείο Ο).

Με βάση τα παραπάνω πρέπει να μας είναι σαφές ότι ένα κύμα **δεν έχει αρχική φάση** όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Ο ($x = 0$) ξεκινά να ταλαντώνεται με ταχύτητα $v = +v_{max}$.

Επίσης αν και η αρχική φάση στις ταλαντώσεις παίρνει τιμές $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi rad$, στα κύματα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.156, 9.158, 9.160, 9.162, 9.163