

Πρόχειρες Σημειώσεις Φυσικής Γ Λυκείου

Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης



Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου

Msc **Φυσικός**

Ηράκλειο Κρήτης

Ιούνιος 2012

Περιεχόμενα

1	Ταλαντώσεις	7
1.1	Απλή Αρμονική Ταλάντωση	7
1.1.1	Περιοδικά Φαινόμενα	7
1.1.2	Οι εξισώσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης	8
1.1.3	Γραφικές παραστάσεις	9
1.1.4	Παραδείγματα Υπολογισμού Αρχικής φάσης	11
1.1.5	Η Δύναμη στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση	12
1.2	Το συστημα "Μάζας - Ελατηρίου"	13
1.2.1	Η ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση	15
1.2.2	Ρυθμοί μεταβολής στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση	20
1.2.3	Η Διαφορά φάσης στην απλή αρμονική ταλάντωση	21
1.2.4	Η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος	22
1.2.5	Κρούση και Απλή Αρμονική Ταλάντωση	23
1.2.6	Σώματα που βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν α.α.τ.	25
1.3	Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις	25
1.3.1	Το κύκλωμα L - C	25
1.3.2	Οι εξισώσεις της Ηλεκτρικής Ταλάντωσης	27
1.3.3	Γραφικές παραστάσεις	28
1.3.4	Η ενέργεια στην Ηλεκτρική Ταλάντωση	29
1.4	Φθίνουσες Ταλαντώσεις	34
1.4.1	Μηχανικές Ταλαντώσεις	34
1.4.2	Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις	38
1.5	Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις	40
1.5.1	Μηχανικές Ταλαντώσεις	40
1.5.2	Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις	42
1.6	Σύνθεση Ταλαντώσεων	43
2	Κύματα	49
2.1	Ορισμός του κύματος	49
2.2	Τα είδη των κυμάτων	49
2.3	Τα στοιχεία του τρέχοντος αρμονικού κύματος	51
2.3.1	Η εξίσωση του Αρμονικού Κύματος	53
2.3.2	Γραφική παράσταση του αρμονικού κύματος	55
2.3.3	Φάση του Αρμονικού Κύματος	57
2.3.4	Αρμονικό Κύμα με αρχική φάση	60
2.4	Συμβολή Κυμάτων	61
2.4.1	Σύγχρονες και Σύμφωνες πηγές κυμάτων	62
2.5	Στάσιμα Κύματα	65
2.5.1	Η εξίσωση του Στάσιμου Κύματος	66
2.6	Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα	70

2.6.1 Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας	71
2.7 Ανάκλαση - Διάθλαση - Ολική Ανάκλαση	73
2.7.1 Ανάκλαση του φωτός	73
2.7.2 Διάθλαση του φωτός	74
2.7.3 Ολική Εσωτερική Ανάκλαση	76
3 Μηχανική Στερεού Σώματος	79
3.1 Η κινηματική της κυκλικής κίνησης	79
3.2 Κινήσεις Στερών Σωμάτων	82
3.2.1 Υλικό σημείο και μηχανικό στερεό	82
3.3 Ροπή Δύναμης - Ισορροπία Στερεού Σώματος	86
3.4 Ροπή Αδράνειας	90
3.5 Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης	92
3.5.1 Εφαρμογή των Θεμελιωδών Νόμων στην κίνηση στερεού σώματος	93
3.6 Στροφορμή-Διατήρηση Στροφορμής	99
3.6.1 Διατήρηση της Στροφορμής	102
3.7 Κινητική Ενέργεια και Έργο στην Στροφική Κίνηση	104
3.7.1 Κινητική Ενέργεια λόγω μεταφορικής Κίνησης	104
3.7.2 Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφής	104
3.7.3 Κινητική Ενέργεια σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση	104
3.7.4 Έργο κατά την στροφική κίνηση	105
3.7.5 Ισχύς δύναμης στη στροφική κίνηση	105
3.7.6 Θεώρημα Έργου- Ενέργειας στη στροφική κίνηση	106
3.7.7 Η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας	107
4 Κρούσεις	109
4.1 Τα είδη της κρούσης, ανάλογα με την διεύθυνση κίνησης των σωμάτων πριν συγκρουστούν.	109
4.2 Τα είδη της κρούσης ανάλογα με την διατήρηση της κινητικής ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων.	110
4.2.1 Η κεντρική Ελαστική κρούση	111
4.2.2 Η Κεντρική Ανελαστική κρούση	114
4.2.3 Η Πλάγια ελαστική κρούση	114
4.3 Δυναμική Ενέργεια μέγιστης ελαστικής παραμόρφωσης	115
5 Φαινόμενο Ντόμπλερ(Doppler)	117
5.1 Ακίνητη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής	117
5.2 Ακίνητη πηγή - Κινούμενος παρατηρητής	118
5.3 Κινούμενη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής	119
5.4 Γενικές παρατηρήσεις	120

I Διαγωνίσματα 2011 - 2012	123
II Χρήσιμη Τριγωνομετρία	189

Πρόλογος

Οι «Πρόχειρες Σημειώσεις» έχουν σαν στόχο να συνοδεύσουν την διδασκαλία του Μαθήματος Φυσικής Κατεύθυνσης στους μαθητές της Γ Λυκείου. Ο όρος «πρόχειρες» είναι αναγκαίος γιατί κάθε χρόνο θα τίθενται σε αμφισβήτηση από τον συγγραφέα και τους αναγνώστες.

Σημειώνω ότι οι σημειώσεις έχουν πάρει στοιχεία από διάφορα βοηθήματα Φυσικής που κυκλοφορούν στα βιβλιοπωλεία. Αναφέρω αυτά του Γιώργου Δημόπουλου, Άγγελου & Σπύρου Σαββάλα, Γιώργου Παναγιωτακόπουλου & Γιώργου Μαθιουδάκη που έχουν κάνει καταπληκτική δουλειά.

Προφανώς ο στόχος των σημειώσεων αυτών δεν είναι να υποκαταστήσουν κανένα βιβλίο, είναι απλά συνοδευτικές του μαθήματος. Σε κάθε παράγραφο άλλωστε υπάρχουν προτεινόμενες ασκήσεις από τα παραπάνω βιβλία για να μελετήσει ο μαθητής. Στο τέλος των σημειώσεων υπάρχουν Διαγωνίσματα που δώθηκαν στους μαθητές μου κατά το σχολικό έτος 2011 - 2012. Βέβαια όλο το υλικό είναι δημοσιευμένο στο [http : //perifysikhs.wordpress.com](http://perifysikhs.wordpress.com).

Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου, *Msc* Φυσικός

Κεφάλαιο 1

Ταλαντώσεις

1.1 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

1.1.1 Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** (T), τη **Συχνότητα** (f) και την **γωνιακή συχνότητα** (ω)

- **Περίοδος (T)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1.1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s.

- **Συχνότητα (f)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού N των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο t , προς το χρόνο t . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (1.2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz ή 1 s⁻¹

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

- Η **γωνιακή συχνότητα (ω)** είναι ένα μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.4)$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο 2π sec.

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 rad/sec.

1.1.2 Οι εξισώσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Ταλάντωση ονομάζεται μια παλινδρομική περιοδική κίνηση. **Γραμμική ταλάντωση** ονομάζεται η ταλάντωση που εξελίσσεται πάνω σε ευθεία τροχιά. Μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)**.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από την αρχή Ο του άξονα, που είναι το μέσον της τροχιάς του. Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο Ο είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου t , δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.5)$$

τότε η κίνηση του σώματος λέγεται **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το **A** είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το σώμα και ονομάζεται **Πλάτος** της ταλάντωσης. Η γωνία $\phi = \omega t + \phi_0$ που η τιμή της καθορίζει και την τιμή της απομάκρυνσης x του σώματος την χρονική στιγμή t ονομάζεται **φάση της ταλάντωσης**. Το σημείο Ο είναι η **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.

Η φάση αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$ αντιστοιχεί σε αύξηση της φάσης κατά $\Delta\phi = 2\pi \text{ rad}$

Η ποσότητα ϕ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης για την χρονική στιγμή $t = 0$ και γι' αυτό ονομάζεται **αρχική φάση**. Ουσιαστικά η αρχική φάση καθορίζεται από τις "αρχικές συνθήκες" της απλής αρμονικής ταλάντωσης (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση). Για την αρχική φάση ισχύει:

$$0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

Η **ταχύτητα** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad (1.6)$$

όπου $v_{\max} = \omega A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα, όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας Ο ($x = 0$).

Η **επιτάχυνση** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.7)$$

όπου $\alpha_{\max} = \omega^2 A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη επιτάχυνση, όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης ($x = \pm A$).

Οι χρονικές εξισώσεις (1.5), (1.6), (1.7) απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι η "ταυτότητα" της κάθε κίνησης στην μηχανική και συγκροτούν την **Κινηματική προσέγγιση** του προβλήματος. Για την περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης οι εξισώσεις αυτές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου

Σχέση στιγμιαίας επιτάχυνσης-απομάκρυνσης Η σχέση (1.7) με την βοήθεια της (1.5) γράφεται:

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 x \quad (1.8)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η επιτάχυνση α και η απομάκρυνση x του σώματος έχουν πάντα αντίθετη φορά, ή με άλλα λόγια, ότι η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς την θέση ισορροπίας Ο.

Σχέση στιγμιαίας ταχύτητας-απομάκρυνση Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας σε μια τυχαία χρονική στιγμή και της απομάκρυνσης την ίδια χρονική στιγμή συνδέονται με την σχέση:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (1.9)$$

η απόδειξη της σχέσης προκύπτει με δύο τρόπους παραθέτω τον πρώτο παρακάτω

$$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \eta\mu^2(\omega t)$$

και

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v}{\omega A} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.1.3 Γραφικές παραστάσεις

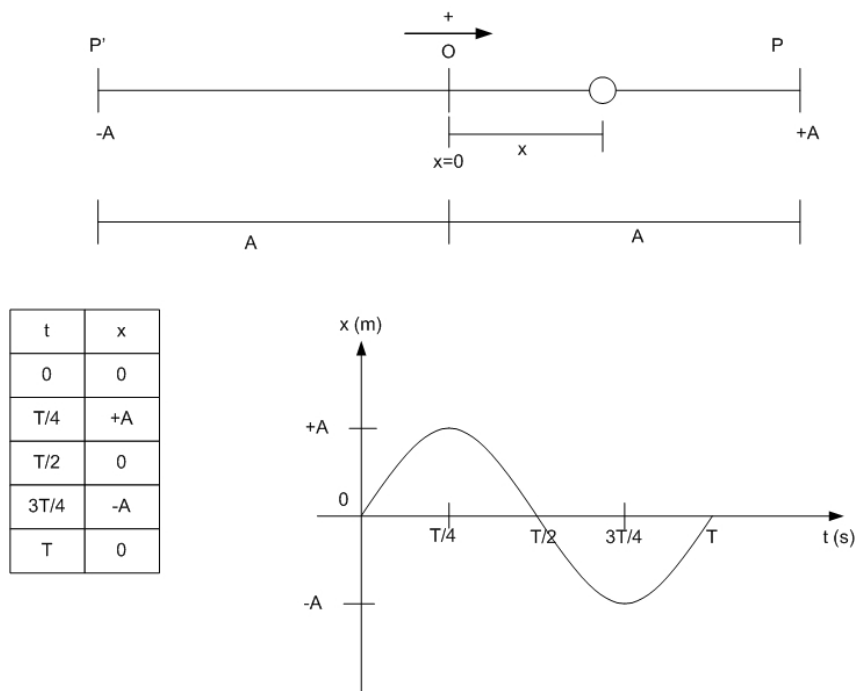
Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων αποδίδεται η μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\phi_0 = 0$.

Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε απο τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις:

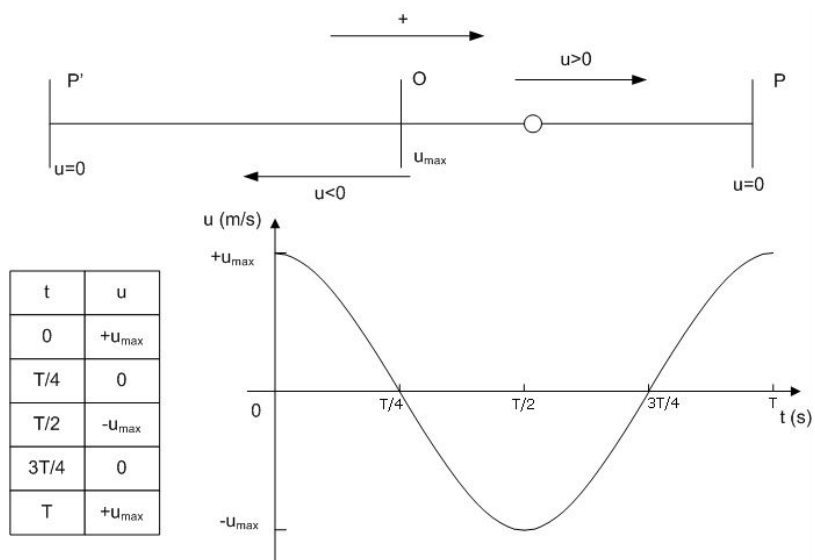
α) Η χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνει την αρχική φάση ϕ_0 .

β) Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα διέρχεται απο την θέση ισορροπίας.

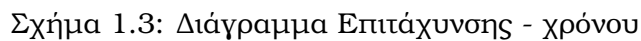
γ) Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα διέρχεται απο την θέση ισορροπίας του, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα φτάνει σε ακραία θέση.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα Απομάκρυνσης - χρόνου



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ταχύτητας - χρόνου



- Αρνητική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα κάτω ή αριστερά.

δ) Όταν το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του ελαττώνεται κατά μέτρο (άρα επιτάχυνση αντίθετη στην ταχύτητα), ενώ όταν το σώμα πλησιάζει προς την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του αυξάνεται κατά μέτρο (άρα επιτάχυνση και ταχύτητα στην ίδια φορά)

π.χ.1 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ($x = +A$). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

π.χ.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση ισορροπίας και κινείται με φορά προς την ακραία αρνητική θέση. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 0 \Rightarrow 0 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi$. Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v = -v_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi rad$

π.χ.3 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = +A/2$ και κινείται προς την θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = +A/2 \Rightarrow A/2 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 1/2 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/6$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi - \pi/6$.

Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) < 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 rad$ (2ο τεταρτημόριο) * Άν για την στιγμή $t = 0$ κινούνταν προς την ακραία θετική θέση τότε $v > 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi/6 rad$

1.1.5 Η Δύναμη στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Όταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση α , ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της κίνησης του. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του δίνεται από τον θεμελιώδη Νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F = m\alpha \quad (1.10)$$

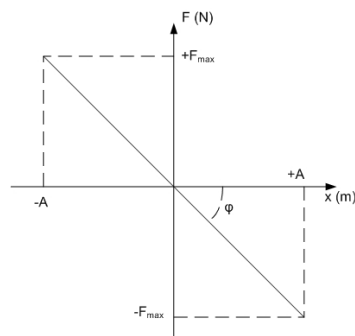
όμως λόγω της σχέσης (1.8) προκύπτει

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \quad (1.11)$$

Αν συμβολίσουμε $D = m\omega^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Sigma F = -Dx \quad (1.12)$$

Η σταθερά αναλογίας D λέγεται **σταθερά επαναφοράς** της ταλάντωσης και η τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Από την σχέση (1.12) φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνολική δύναμη που δέχεται:



Σχήμα 1.4: Διάγραμμα Δύναμης-Απομάκρυνσης

- έχει ως φορέα την ευθεία πάνω στην οποία γίνεται η ταλάντωση του σώματος,
- είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας O ,
- έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση του σώματος και πάντοτε προς την θέση ισορροπίας
- στην θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0$

Η σχέση (1.12) ονομάζεται και **Δύναμη Επαναφοράς**, αφού δρα έτσι ώστε να επιταχύνει το σώμα πάντα προς την θέση ισορροπίας και παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 1.4

Παρατήρηση: Η σχέση (1.12) αποτελεί **ικανή και αναγκαία συνθήκη**, ώστε ένα σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτό σημαίνει πως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γραμμική ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα είναι και αρμονική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας ικανοποιεί την σχέση (1.12).

Σχέση Περιόδου- σταθεράς επαναφοράς

Από την σχέση $D = m\omega^2$ προκύπτει: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
από τον ορισμό της γωνιακής συχνότητας $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (1.13)$$

Απο την τελευταία σχέση προκύπτει ότι **η περίοδος T δεν εξαρτάται από το πλάτος A της ταλάντωσης.**

Η δύναμη επαναφοράς ως συνάρτηση του χρόνου

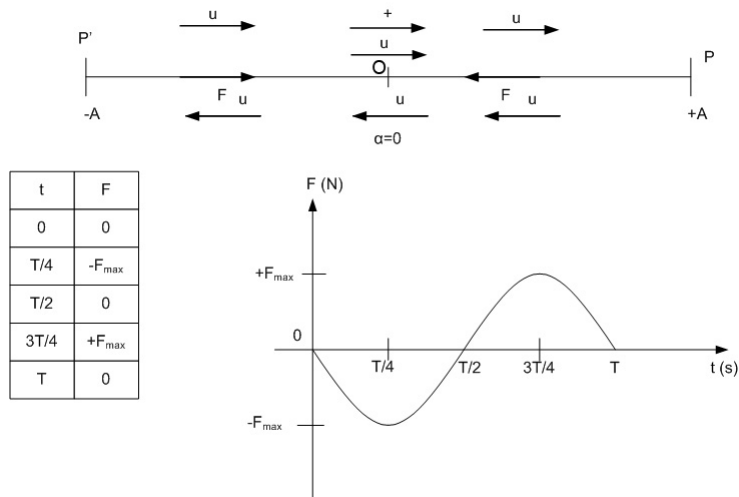
Από τις σχέσεις (1.12),(1.5) προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{max}\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1.14)$$

,με την μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $F_{max} = DA$

1.2 Το συστημα “Μάζας - Ελατηρίου”

Το ποιο χαρακτηριστικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στις μηχανικές ταλαντώσεις είναι το πρόβλημα της μάζας που είναι στερεωμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου.



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα Δύναμης - Χρόνου

Ιδανικό ελατήριο είναι κάθε ελατήριο που μπορεί να θεωρηθεί ως αβαρές και υποπακούει στον **Νόμο του Hooke** $F_{ελ} = k\Delta l$ όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου (εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου) και Δl είναι η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από την **Θέση Φυσικού μήκους** του. Η δύναμη $F_{ελ}$ έχει τέτοια φορά ώστε να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση φυσικού μήκους (l_0)

Η Δύναμη Ελατηρίου ($F_{ελ}$) συμπίπτει με την δύναμη επαναφοράς μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου, όπου η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους συμπίπτουν, αντίθετα στην περίπτωση του κατακόρυφου ή κεκλιμένου συστήματος η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους είναι διαφορετικές, άρα δεν συμπίπτουν οι δύο δυνάμεις μεταξύ τους.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα το οποίο είναι δεμένο σε ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν το διεγείρουμε από την κατάσταση ισορροπίας του ;

Βήματα - μεθοδολογία σε προβλήματα οριζοντίων και κατακόρυφων ελατηρίων που στο άκρο τους έχουν σώμα μάζας m

- 1ο :** Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, το σώμα στην θέση ισορροπίας και το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας
- 2ο :** Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα στην θέση ισορροπίας. Από την συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma F = 0$) βρίσκουμε μια σχέση
- 3ο :** Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην τυχαία θέση και υπολογίζουμε την ΣF . Προσέχουμε στον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, από τις δυ-

νάμεις που έχουν την ίδια φορά με την απομάκρυνση x να αφαιρούμε εκείνες που έχουν αντίθετη φορά.

4ο : Αφού καταλήξω σε σχέση της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με D θετική σταθερά τό σωμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D .

5ο : Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την αρχική απομάκρυνση του σώματος απο την Θέση Ισορροπίας. Η περίοδος υπολογίζεται απο την σχέση (1.13) και η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται απο την (1.5) με την κατάλληλη αρχική φάση ϕ_0

1.2.1 Η ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Η ενέργεια της ταλάντωσης E ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισουτε με την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται απο τον τύπο:

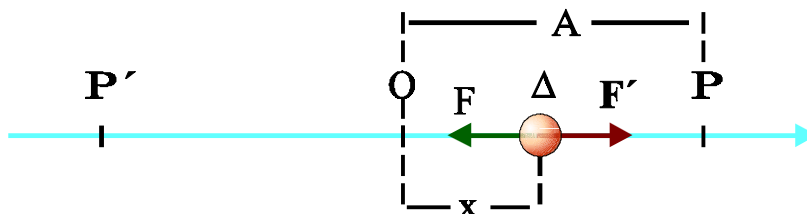
$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (1.15)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το πλάτος A καθορίζεται απο την ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται. Σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια παραμένει σταθερή. Άρα: **Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της.**

Δυναμική & Κινητική Ενέργεια Ταλάντωσης Στην διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και ως κινητική ενέργεια ταλάντωσης. Η κινητική και η Δυναμική ενέργεια υπολογίζονται αντίστοιχα απο τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.16)$$

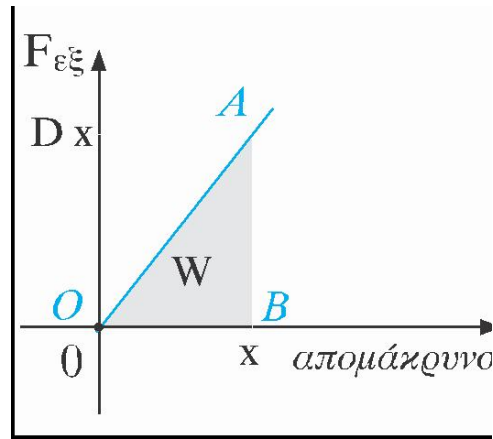
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.17)$$



Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$: Αν το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην θέση ισορροπίας O , για να μετακινηθεί σε μια άλλη θέση πρέπει να του ασκηθεί κατάλληλη εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$. Κατά την μετακίνηση αυτή θα ασκείται στο σώμα και η δύναμη επαναφοράς. Για να μετακινηθεί το σώμα στην ακραία θέση (x) χωρίς ταχύτητα θα πρέπει το μέτρο της εξωτερικής δύναμης να είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς και να έχει αντίθετη φορά, σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$F_{εξ} = -\Sigma F = -(-Dx) = Dx$$

Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο και με την προσφερόμενη ενέργεια για να απομακρύνουμε το σώμα κατά x από την θέση ισορροπίας. Επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $F_{εξ} = f(x)$.



Από το εμβαδόν προκύπτει η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα και αποθηκεύεται σ' αυτό ως Δυναμική Ενέργεια:

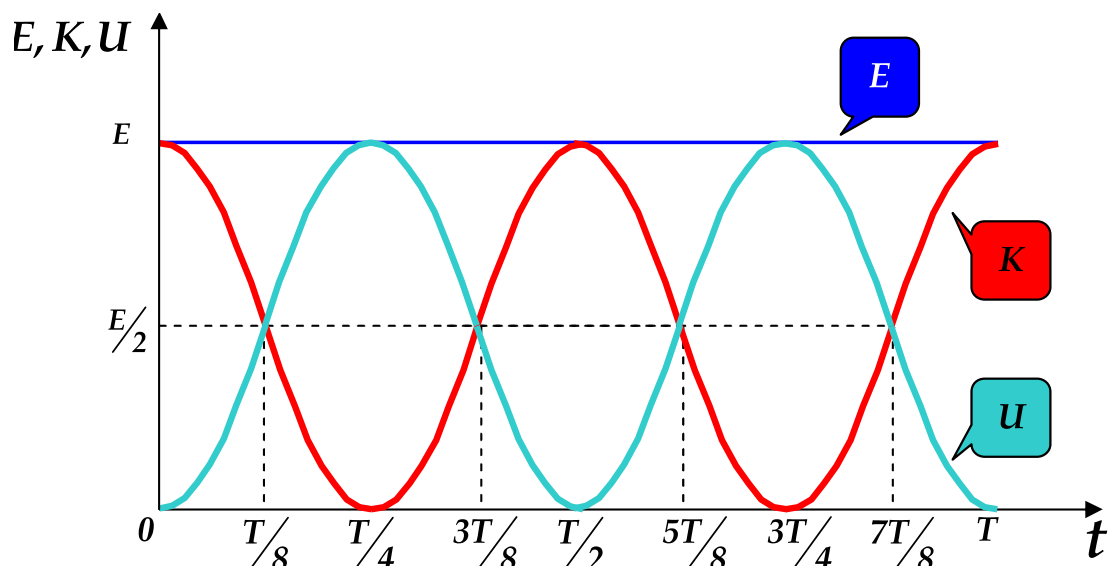
$$W_{F_{εξ}} = E = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1.18)$$

K, U ως συναρτήσεις του χρόνου: Αντικαθιστώντας στις σχέσεις 1.16 και 1.17 της χρονικές εξισώσεις για την στιγμιαία απομάκρυνση και στην στιγμιαία ταχύτητα μπορούμε να οδηγηθούμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m(v_{max}\sigma\sigma\nu(\omega t))^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sigma\sigma\nu^2(\omega t) \\ &\Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2\sigma\sigma\nu^2(\omega t) = E\sigma\sigma\nu^2(\omega t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$U = \frac{1}{2}D(A\eta\mu(\omega t))^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t) = E\eta\mu^2(\omega t) \quad (1.20)$$

Από τις σχέσεις 1.20 και 1.19 προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. Οι γραφικές παραστάσεις της Κινητικής, της Δυναμικής και της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 1.6: E, K, U σε συνάρτηση με τον χρόνο

Διατήρησης της Ενέργειας: Η ολική ενέργεια E στην απλή αρμονική ταλάντωση παραμένει σταθερή και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E$$

, όπου βέβαια E =σταθερή και δίνεται από την σχέση 1.15

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι:

(α) Στην θέση ισορροπίας ($x = 0$) η Δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Κινητική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την Ενέργεια ταλάντωσης. $E = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

(β) Στις ακραίες θέσεις ($x = \pm A$) η Κινητική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης $E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2$

(γ) Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση (εκτός από την Θ.Ι.) το σύστημα έχει και Κινητική και Δυναμική Ενέργεια και σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad (1.21)$$

Γνωρίζοντας την Δυναμική και την Κινητική Ενέργεια κατά την διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα ο χρόνος. Αυτή η προσέγγιση είναι η **Ενεργειακή προσέγγιση** της κίνησης, που σε πολλές περιπτώσεις είναι χρησιμότερη από την Κινητική προσέγγιση που απαιτεί γνώση του χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζω δύο βασικές αποδείξεις:

Απόδειξη της σχέσης $v_{max} = \omega A$:

$$E = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m}{D}v_{max}^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}}v_{max}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v_{max} = \omega A$

Απόδειξη της σχέσης $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow mv^2 = D(A^2 - x^2) \Rightarrow v \pm \sqrt{\frac{D}{m}(A^2 - x^2)}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

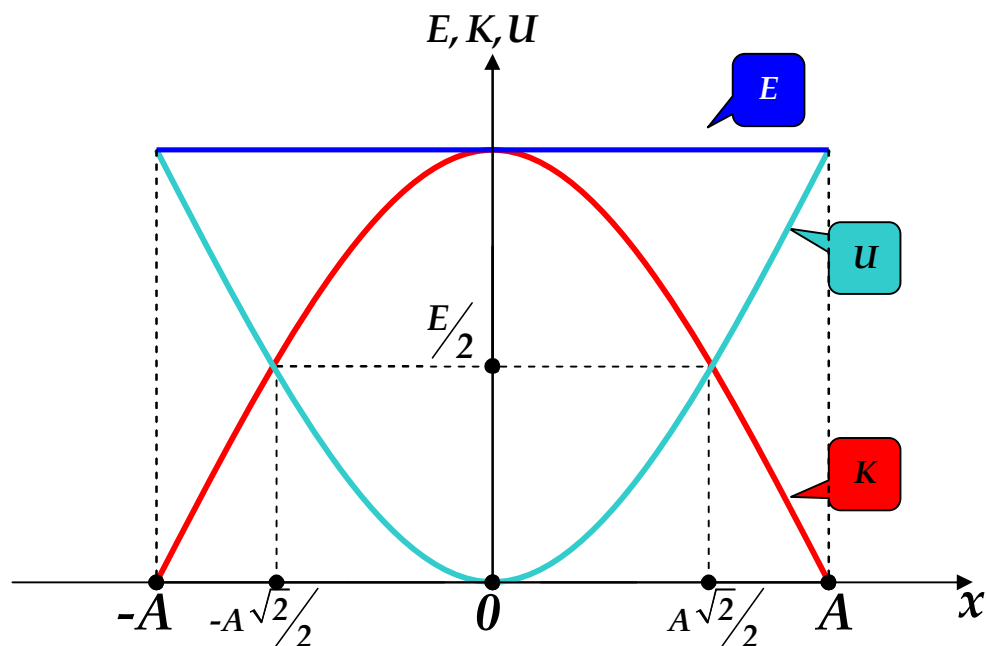
Τα διαγράμματα $U = f(x)$, $K = f(x)$ **στην απλή αρμονική ταλάντωση** Η δυναμική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A$$

Η κινητική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A \quad (1.22)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θ.Ι. παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.7:



Σχήμα 1.7: Διάγραμμα E, K, U με την απομάκρυνση

Τα διαγράμματα $U = f(v), K = f(v)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

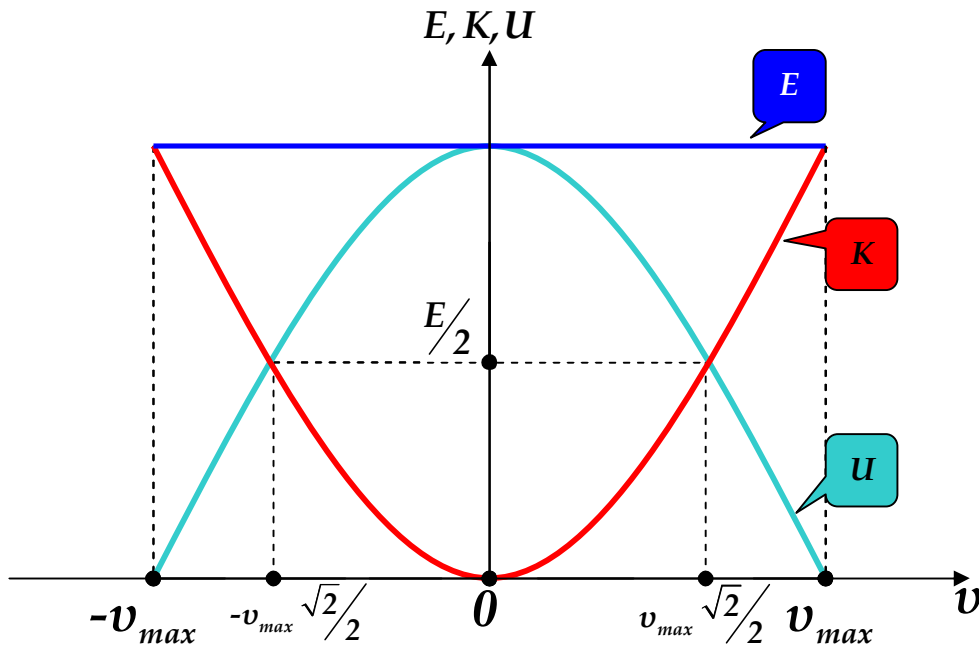
$$E = K + U \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max} \quad (1.23)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την από την ταχύτητα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.8:

Η ενέργεια στο Ιδανικό Ελατήριο: Στην περίπτωση του ιδανικού ελατηρίου που αναλύσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την Δυναμική Ενέργεια του ελατηρίου, η οποία χαρακτηρίζεται ως δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Υπολογίζεται από την σχέση :

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (1.24)$$

, όπου βέβαια k η σταθερά του ελατηρίου και Δl η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Προσοχή η Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης

Σχήμα 1.8: Διάγραμμα E, K, U με την ταχύτητα

συμπίπτει με την Ενέργεια του Ελατηρίου μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου.

Το έργο της Δύναμης του Ελατηρίου μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ}^{(αρχ)} - U_{ελ}^{(τελ)} \quad (1.25)$$

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.1 - 1.108, 2.1 - 2.60, 1.131 - 1.146, 1.149 - 1.156, 1.160, 1.161, 1.172, 1.174, 1.176, 1.178, 1.179, 1.180, 1.183, 1.184, 1.186, 1.187, 1.188, 1.190

1.2.2 Ρυθμοί μεταβολής στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ο Ρυθμός μεταβολής είναι από τις χρησιμότερες έννοιες στην Φυσική καθώς μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την συμπεριφορά μιας φυσικής ποσότητας. Στα μαθηματικά Γ Λυκείου θα μάθουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης είναι η παράγωγος συνάρτηση. Παρακάτω παρουσιάζω ρυθμούς μεταβολής βασικών μεγεθών στην απλή αρμονική ταλάντωση.

- **Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης** $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v = \omega A \sin(\omega t) \quad (1.26)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t) \quad (1.27)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ορμης** $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -D A \eta \mu(\omega t) \quad (1.28)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της Κινητικής - Δυναμικής Ενέργειας** $\frac{dK}{dt}, \frac{dU}{dt}$

Γνωρίζουμε ότι $K + U = E \Rightarrow d(K + U) = 0$, αφού $E = \text{σταθερή}$, $\Rightarrow dK = -dU$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (1.29)$$

επίσης

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot v \quad (1.30)$$

και σε συνάρτηση με τον χρόνο, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.5),(1.6) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -D A \eta \mu(\omega t) \omega A \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.31)$$

άρα

$$\frac{dU}{dt} = +\frac{D A \omega^2}{2} \eta \mu(2\omega t) \quad (1.32)$$

1.2.3 Η Διαφορά φάσης στην απλή αρμονική ταλάντωση

Διαφορά Φάσης $\Delta\phi$ δύο αρμονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών λέγεται η διαφορά των φάσεων τους. Όταν τα δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω , τότε η διαφορά φάσης είναι χρονικά σταθερή. Για να βρούμε την διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της ταχύτητας** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A \eta \mu(\omega t) \text{ και } v = v_{\max} \sigma \nu \nu(\omega t) \Rightarrow v = v_{\max} \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ και προηγείται η ταχύτητα.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $v = +v_{max}$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A$ σε χρόνο $\frac{T}{4}$.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \text{ και } a = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) \Rightarrow a = \alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \pi$ και προηγείται η επιτάχυνση.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \pi$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $a = +\alpha_{max}/2$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A/2$ σε χρόνο $\frac{T}{2}$.

Γενικά λέμε ότι δύο αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη δεν έχουν διαφορά φάσης όταν παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους.

1.2.4 Η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

Μια ακόμα έξυπνη μέθοδος για την επίλυση ασκήσεων στην απλή αρμονική ταλάντωση. Θα αποδείξουμε την φράση: **Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση τότε η προβολή του πάνω σε μια διάμετρο της κίνησης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.**

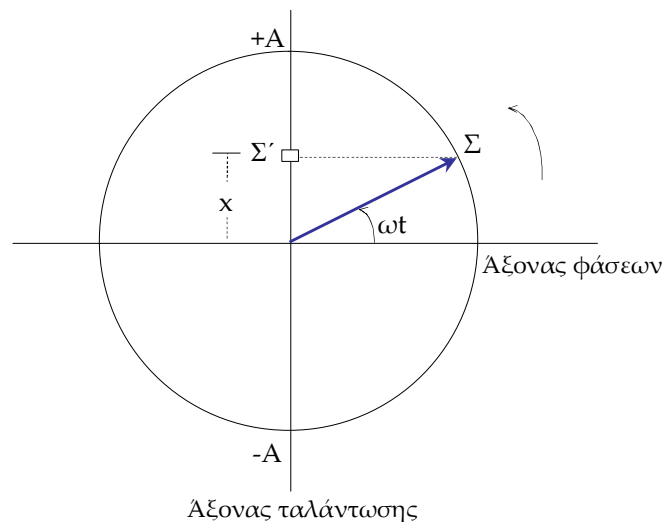
Από το σχήμα (1.9) έχουμε ότι:

$$(O\Sigma') = (O\Sigma) \eta\mu(\phi) \Rightarrow x = \eta\mu(\omega t)$$

αφού βέβαια ισχύει ότι $\phi = \omega t$ για το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ω την γωνιακή ταχύτητα του.

Άρα για κάθε σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα περοστρεφόμενο διάνυσμα μήκος A και γωνιακής ταχύτητας ω . Παράλληλα σε κάθε τεταρτημόριο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με βάση το πρόσημο του $\sin(\phi)$. Η μέθοδος του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι αρκετά χρήσιμη στον υπολογισμό της αρχικής φάσης ϕ_0 .

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.162 - 1.165, 1.169, 1.191, 1.192, 1.194, 1.196, 1.197, 1.198, 1.200, 1.203, 1.33 - 1.70, 1.83 - 1.98, 1.101 - 1.108



Σχήμα 1.9: η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

1.2.5 Κρούση και Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε πολλά προβλήματα εμφανίζεται το φαινόμενο της Κρούσης ανάμεσα σε σώματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μετά ή πριν την κρούση. Ας εισάγουμε την βασική ιδέα της Κρούσης για μια γρήγορη εφαρμογή σε προβλήματα Ταλαντώσεων. Η κρούση θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο της ύλης, άρα εδώ θα μείνουμε στις κύριες ιδέες.

Έστω ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ αντίστοιχα. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή. Παρατηρούμε δύο βασικές κατηγορίες κρούσεων.

Ανελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία έχουμε απώλειες ενέργειας, λόγω ανελαστικών δυνάμεων ή δυνάμεων πλαστικής παραμόρφωσης που ασκούνται κατά την διάρκεια της κρούσης. Αν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ορμής** και της ενέργειας του συστήματος. Δηλαδή:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (1.33)$$

και

$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 + E_{απωλ} \quad (1.34)$$

όπου $E_{απωλ}$ οι απώλειες ενέργειας λόγω της ανελαστικής παραμόρφωσης ή της θερμότητας. Σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ($K_{ολ(αρχ)} > K_{ολ(τελ)}$)

Στην περίπτωση ανελαστικής κρούσης που αμέσως μετά την κρούση προκύπτει συσσωμάτωμα η κρούση θα λέγεται **Πλαστική Κρούση** και θα ισχύουν πάλι οι παραπάνω εξισώσεις.

Ελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος καθώς και η Ορμή του. Άν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η σχέση (1.33) και η διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \quad (1.35)$$

Και στις δύο περιπτώσεις κρούσης ισχύει η Αρχή της Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των σωμάτων. **Για την επίλυση κάθε προβλήματος κρούσης με απλή αρμονική ταλάντωση ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:**

- 1ο:** Σχεδιάζουμε το σώμα που εκτελεί α.α.τ. στην θέση ισορροπίας του (αν υπάρχει ελατήριο το σχεδιάζουμε στην θέση φυσικού μήκους του)
- 2ο:** Σχεδιάζουμε τις θέσεις των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση και αμέσως μετά την κρούση και υπολογίζουμε τις ταχύτητες πριν την κρούση εφόσον δεν μας είναι γνωστές με την χρήση μεθόδων που αναλύσαμε παραπάνω (π.χ. αν γνωρίζουμε την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας πριν την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα με την βοήθεια της Ενέργειας στην α.α.τ.)
- 3ο:** Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (1.33), (1.35) αν έχουμε ελαστική κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος μετά την κρούση. Αν η κρούση είναι πλαστική ή ανελαστική εφαρμόζουμε την (1.33) και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.
- 4ο:** Υπολογίζουμε την Ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος μετά την κρούση με την χρήση της Διατήρησης της Ενέργειας μετά την κρούση $E' = K' + U'$.
- 5ο:** Υπολογίζουμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης A' από την νέα Ενέργεια E'

Προσοχή γιατί υπάρχουν περιπτώσεις προβλημάτων που αλλάζει η θέση ισορροπίας του ταλαντούμενου συστήματος αμέσως μετά την κρούση με συνέπεια να αλλάζει και το πρόβλημα που μελετούμε. Οι περιπτώσεις αυτές είναι εκείνες της πλαστικής κρούσης σε κατακόρυφο ή κεκλιμένο σύστημα ελατηρίου - μάζας. Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε την νέα θέση ισορροπίας μετά την κρούση, για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο 4ο και 5ο βήμα.

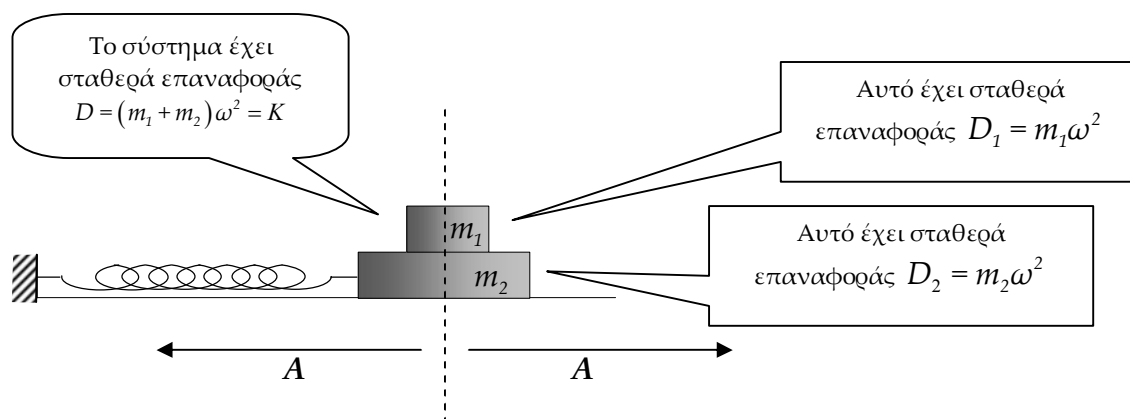
Τέλος στα προβλήματα που μετά την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα (Πλαστική Κρούση) αλλάζει και η γωνιακή συχνότητα ω , άρα και η περίοδος της ταλάντωσης.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.136, 2.138, 2.139, 2.140, 2.141, 2.143, 2.145, 2.146, 2.148, 2.149, 2.150, 2.151, 2.153, 2.154, 2.155, 2.156, 2.158, 2.159, 2.160

1.2.6 Σώματα που βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν α.α.τ.

Όταν δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση ταυτόχρονα, τότε έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Η συχνότητα ω υπολογίζεται από την σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m_1 + m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}}$$



Το κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά επαναφοράς D_1, D_2 που την υπολογίζουμε από τις σχέσεις:

$$D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2$$

Αν το σύστημα που εκτελεί την απλή αρμονική ταλάντωση είναι δεμένο σε ελατήριο, τότε η σταθερά επαναφοράς είναι $D = k$

Όταν ένα σώμα είναι σε επαφή με μια επιφάνεια (ή με ένα άλλο σώμα), δέχεται από την επιφάνεια δύναμη N . **Στην οριακή περίπτωση που $N = 0$ το σώμα χάνει την επαφή με την επιφάνεια.**

1.3 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

1.3.1 Το κύκλωμα L - C

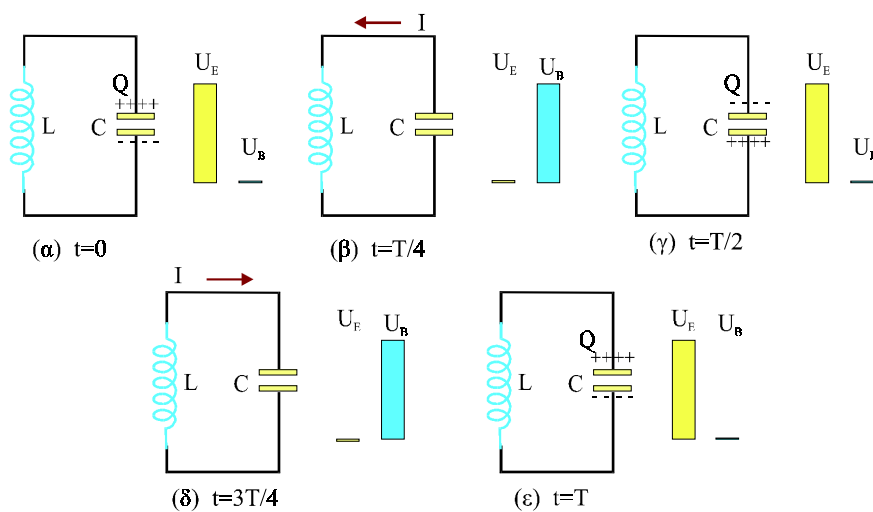
Διαθέτουμε ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει ένα πυκνωτή χωρητικότητας C , ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και ένα διακόπτη Δ συνδεδεμένα σε σειρά. Αν θεωρήσουμε αμελητέες όλες τις ωμικές αντιστάσεις το κύκλωμα αυτό ονομάζεται **Ιδανικό Κύκλωμα L-C**.

Φορτίζουμε τον πυκνωτή με πηγή σταθερής τάσης V και απομακρύνουμε την πηγή φόρτισης. Ο αρχικά φορτισμένος πυκνωτής έχει φορτίο Q και ενέργεια U_E ο διακόπτης Δ είναι ανοικτός. Το φορτίο και η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV \quad (1.36)$$

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (1.37)$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$, κλείνουμε τον διακόπτη Δ , οπότε αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος αυξάνεται σταδιακά, γιατί το πηνίο αντιστέκεται στην απότομη αύξηση του ρεύματος, λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής και του κανόνα του Lenz. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή έχει πολικότητα τέτοια ώστε να αντιστέκεται στο ρεύμα και υπολογίζεται από την σχέση $E_{\alpha\upsilon\tau\epsilon\pi} = -L\frac{di}{dt}$. Σε κάθε χρονική στιγμή η $V_L = E_{\alpha\upsilon\tau\epsilon\pi} = V_C = \frac{q}{c}$, όπου βέβαια V_C είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή.



Σχήμα 1.10: Οι φάσεις της ηλεκτρικής ταλάντωσης σε χρόνο μιας περιόδου

Η αύξηση της έντασης του ρεύματος (i) συνεχίζεται μέχρι την στιγμή της πλήρους εκφόρτισης του πυκνωτή ($q = 0$), οπότε και αποκτά την μέγιστη τιμή της (I) την χρονική στιγμή $T/4$.

Στην συνέχεια, η ένταση του ρεύματος μειώνεται πάλι σταδιακά, γιατί το πηνίο αντιστέκεται στον απότομο μηδενισμό της, λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής. Η μείωση της έντασης του ρεύματος συνεχίζεται και η κίνηση των φορτίων έχει ως αποτέλεσμα ο πυκνωτής να φορτίζεται με αντίθετη πολικότητα από την αρχική. **Όταν το ρεύμα μηδενιστεί ($i = 0$), ο πυκνωτής θα έχει αποκτήσει και πάλι φορτίο Q την χρονική στιγμή $T/2$.**

Στην συνέχεια ακολουθεί το ίδιο φαινόμενο, με το ρεύμα να έχει αντίθετη φορά από την προηγούμενη, μέχρις ότου το κύκλωμα να επανέλθει στην κατάσταση στην οποία βρισκόταν την χρονική στιγμή $t = 0$. Στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας το φαινόμενο επαναλαμβάνεται διαρκώς. Αυτό το περιοδικό φαινόμενο ονομάζεται **Ηλεκτρική Ταλάντωση**.

1.3.2 Οι εξισώσεις της Ηλεκτρικής Ταλάντωσης

Στο πρόβλημα των Ηλεκτρικών ταλαντώσεων τα κύρια μεγέθη είναι το φορτίο του πυκνωτή (q) και το ρεύμα (i) που διαρρέει το πηνίο. Και τα δύο μεγέθη περιγράφονται από κατάλληλες περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, με περίοδο που δίνεται από την σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (1.38)$$

Οι χρονικές εξισώσεις για το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο στην γενική τους μορφή γράφονται:

$$q = Q\eta\mu(\omega t + \phi_0) \text{ και } i = I\sigma\nu(\omega t + \phi_0)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς τις «ομοιότητες» των παραπάνω σχέσεων με τις αντίστοιχες χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης x και της ταχύτητας v των μηχανικών ταλαντώσεων. Είναι προφανές ότι το Q αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή του φορτίου του πυκνωτή (πλάτος φορτίου) και το I στην μέγιστη τιμή του ρεύματος (πλάτος ρεύματος). Επίσης η φάση $\phi = \omega t + \phi_0$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης με $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$.

Στην πλειονότητα των προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν η αρχική φάση θα περιοριστεί σε δύο τιμές, σε αντίθεση με τα προβλήματα των μηχανικών ταλαντώσεων.

Η περίπτωση του φορτισμένου πυκνωτή Όταν την χρονική στιγμή $t = 0$ το φορτίο στον θετικά φορτισμένο οπλισμό είναι $q = +Q$ και κατά συνέπεια η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι $i = 0$ τότε αποδεικνύεται ότι $\phi_0 = \pi/2$. Άρα προκύπτουν οι ακόλουθες χρονικές εξισώσεις:

$$q = Q\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow q = Q\sigma\nu(\omega t) \quad (1.39)$$

και

$$i = I\sigma\nu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow i = -I\eta\mu(\omega t) \quad (1.40)$$

όπου $I = \omega Q$, η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος. (κατ' αντιστοιχία με την μέγιστη ταχύτητα της μηχανικής ταλάντωσης). **Προσοχή η στιγμιαία τιμή του φορτίου (q) αντιστοιχεί στο φορτίο του αρχικά θετικά φορτισμένου οπλισμού.**

Η περίπτωση του αφόρτιστου πυκνωτή Όταν την χρονική στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος ($q = 0$) και το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , τότε αποδεικνύεται ότι $\phi_0 = 0$. Άρα προκύπτουν οι ακόλουθες χρονικές εξισώσεις:

$$q = Q\eta\mu(\omega t) \quad (1.41)$$

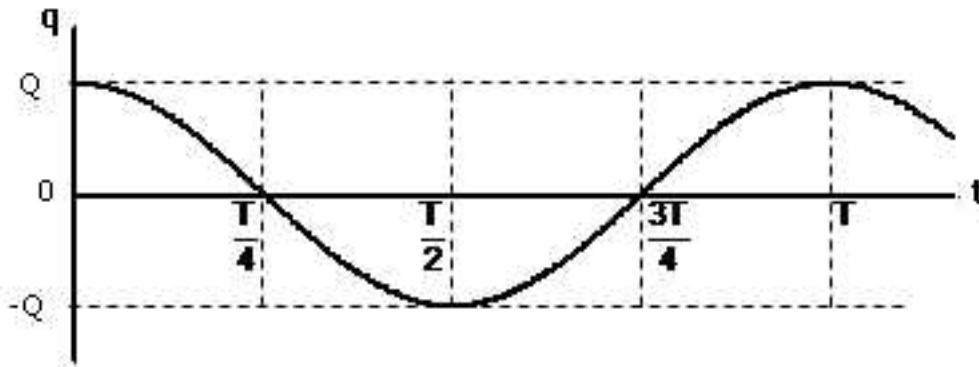
και

$$i = I\sigma\nu(\omega t) \quad (1.42)$$

Οι παραπάνω δύο περιπτώσεις δεν είναι βέβαια οι μοναδικές, καθώς όπως και στις μηχανικές ταλαντώσεις η αρχική φάση μπορεί να πάρει ένα εύρος τιμών ανάλογα με τις "αρχικές συνθήκες" του προβλήματος. Εδώ οι αρχικές συνθήκες είναι το φορτίο του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Αλλά στα πλαίσια του μαθήματος θα ασχοληθούμε κυρίως με τις παραπάνω.

1.3.3 Γραφικές παραστάσεις

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του φορτίου του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, για την περίπτωση του αρχικά φορτισμένου πυκνωτή ($\phi_0 = \pi/2$). Με σχετική ευκολία μπορούμε να σχεδιάσουμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα για την περίπτωση του αρχικά αφόρτιστου πυκνωτή.



Σχήμα 1.11: Διάγραμμα φορτίου-χρόνου

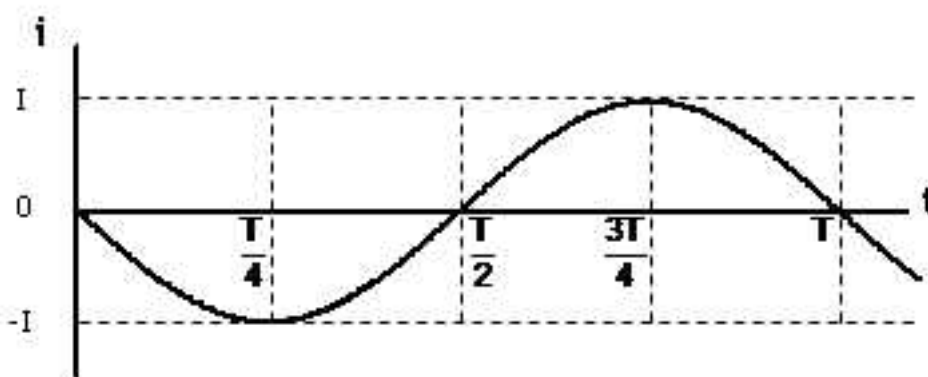
Παρατηρήσεις για το “πρόσημο” του ρευματος

Όταν κλείσει ο διακόπτης, ο πυκνωτής θα αρχίσει να εκφορτίζεται μέσα από το πηνίο και την χρονική στιγμή t θα υπάρχει ένα ρεύμα i στο κύκλωμα και ένα φορτίο q στον πυκνωτή. **Το ρεύμα i και το φορτίο q σχετίζονται, γιατί το ρεύμα δίνει το ρυθμό με τον οποίο το φορτίο μεταφέρεται από τον ένα οπλισμό του πυκνωτή στον άλλο.** Άλλωστε η ένταση του ρευματος εξ ορισμού είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.43)$$

Η σύμβαση μας για τα πρόσημα των q, i

- Έστω ότι δεχόμαστε ότι η φορά του ρεύματος είναι θετική, όταν αυτό κατευθύνεται προς τον αρχικά θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή (για $t = 0, q = +Q$). Με την επιλογή αυτή και σύμφωνα με την σχέση (1.43), το q αυξάνεται, όταν $i > 0$. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (1.39), (1.61) δίνουν σε κάθε χρονική στιγμή το φορτίο και το ρεύμα, με τις γραφικές παραστάσεις του να δίνονται από τα σχήματα (1.11), (1.12)
- Σύμφωνα με την σύμβαση μας και με βάση τον ορισμό του ρευματος κατανοούμε ότι το πρόσημο της έντασης του ρευματος σχετίζεται με την φόρτιση ($\frac{dq}{dt} > 0$) ή



Σχήμα 1.12: Διάγραμμα έντασης -χρόνου

την εκφόρτιση ($\frac{dq}{dt} > 0$) του πυκνωτή. **Ρεύμα με φορά από το πηνίο προς τον αρχικά θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή θα θεωρείται θετικό ($i > 0$) και ρεύμα με φορά από τον αρχικά θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή θα θεωρείται αρνητικό ($i < 0$).**

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.1 - 5.11, 5.69, 5.70, 5.71, 5.72, 5.73

1.3.4 Η ενέργεια στην Ηλεκτρική Ταλάντωση

Η Ενέργεια στην Ηλεκτρική Ταλάντωση είναι ίση με την ενέργεια που προσφέρουμε στο κύκλωμα την χρονική στιγμή $t = 0$. Στην περίπτωση του αρχικά φορτισμένου πυκνωτή, η ενέργεια του κυκλώματος ισούται με την Ενέργεια του Ηλεκτρικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή, η οποία είναι ίση με :

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.44)$$

Μόλις κλείσουμε το διακόπτη, ο πυκνωτής θα αρχίσει να εκφορτίζεται μέσα απο το πηνίο και το κύκλωμα διαρρέεται απο ρεύμα. Όσο διαρκεί η εκφόρτιση, η **ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου** στον πυκνωτή ελαττώνεται και μετατρέπεται σε **ενέργεια του μαγνητικού πεδίου** στο πηνίο. Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί πλήρως, η ένταση του ρευματος που διαρρέει το πηνίο γίνεται μέγιστη, οπότε η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο αποκτά την μέγιστη τιμή της που είναι ίση με :

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1.45)$$

Στην συνέχεια η διαδικασία γίνεται αντίστροφα. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο ελαττώνεται, ενώ αυξάνεται η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στο πηνίο,

μέχρι την πλήρη φόρτιση του, οπότε το κύκλωμα επανέρχεται ενεργειακά στην αρχική του κατάσταση. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, η **Ολική Ενέργεια** του κυκλώματος θεωρείται σταθερή και είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1.46)$$

Οι ενέργεια του Ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή (U_E) και του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο (U_B) υπολογίζονται σε κάθε χρονική στιγμή από τις σχέσεις:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad \text{και} \quad U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.47)$$

U_E, U_B **ως συναρτήσεις του χρόνου** Αν υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής είναι φορτισμένος και αντικαθιστώντας τις σχέσεις για την στιγμιαία τιμή του φορτίου 1.39 και της έντασης 1.40 στις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν αντίστοιχα:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{(Q \cos(\omega t))^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cos^2(\omega t) \Rightarrow U_E = E \cos^2(\omega t) \quad (1.48)$$

$$U_B = \frac{1}{2} L (-I \sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2} LI^2 \sin^2(\omega t) \Rightarrow U_B = E \sin^2(\omega t) \quad (1.49)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις επιβεβαιώνεται ότι η ενέργεια του Ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και αντίστροφα, ενώ η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή. Παρακάτω ακολουθεί το αντίστοιχο διάγραμμα των δυο μεγεθών σε συνάρτηση με τον χρόνο.

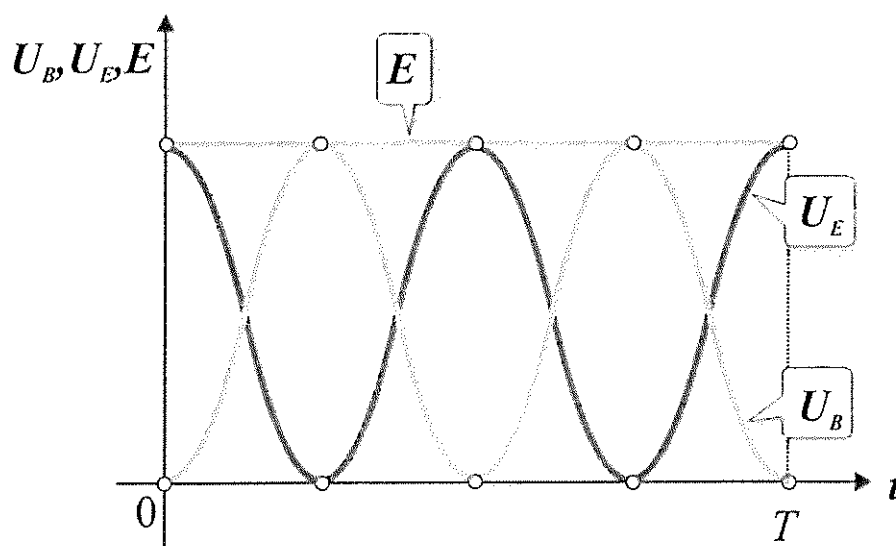
Η Διατήρηση της Ενέργειας Η ολική ενέργεια του κυκλώματος παραμένει σταθερή σε κάθε στιγμή και ίση με το άθροισμα της Ενέργειας του Ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο. Δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.50)$$

Περιγράψαμε παραπάνω ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$ χωρίς απώλειες ενέργειας. **Οι απώλειες ενέργειας σε ένα πραγματικό κύκλωμα $L - C$** οφείλονται σε δύο βασικούς λόγους:

- Στην θερμότητα που χάνεται λόγω του φαινομένου *Joule* από τις αντιστάσεις του κυκλώματος
- Στην ενέργεια που εκπέμπεται με την μορφή ακτινοβολίας κατά την λειτουργία του κυκλώματος.

Παρακάτω παρουσιάζω δύο αποδείξεις που κάτι πρέπει να μας θυμίζουν:



Σχήμα 1.13: E, U_E, U_B σε συνάρτηση με τον χρόνο

Απόδειξη της σχέσης $I = \omega Q$

$$U_{B(max)} = U_{E(max)} \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow I^2 = \frac{1}{LC}Q^2 \Rightarrow I = \omega Q \quad (1.51)$$

παραπάνω χρησιμοποίησα το γεγονός ότι $T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Απόδειξη της σχέσης $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$ Με την χρήση της σχέσης (1.50) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} &= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow Li^2 = \frac{Q^2}{C} - \frac{q^2}{C} \Rightarrow i^2 = \frac{1}{LC}(Q^2 - q^2) \\ &\Rightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Αντίστοιχα με τις μηχανικές ταλαντώσεις μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα των ενεργειών U_E και U_B σε συνάρτηση με τις στιγμιαίες τιμές του φορτίου q και της έντασης του ρεύματος i . Η μορφή τους θα είναι αντίστοιχη.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.75 -5.81, 5.83, 5.85, 5.86

Ρυθμοί Μεταβολής στην Ηλεκτρική Ταλάντωση Αντιστοιχα όπως και στην περίπτωση της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης, οι ρυθμοί μεταβολής παίζουν καθοριστικό ρόλο και στο κύκλωμα $L - C$ για την κατανόηση των μεγεθών και των μεταβολών τους. Παραθέτω βασικούς ρυθμούς μεταβολής που θα εμφανιστούν σε ασκήσεις:

- **Ρυθμός μεταβολής του φορτίου στον οπλισμό του πυκνωτή** $\frac{dq}{dt}$

Είδαμε και παραπάνω ότι:

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (1.53)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή** $\frac{dV_C}{dt}$

Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης υπολογίζεται ως εξής:

$$C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{1}{C}q \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C} \quad (1.54)$$

προσοχη το i μπαίνει με το πρόσημο του στην σχέση, εκτός και αν ενδιαφερόμαστε μόνο για την τάση και όχι για την πολικότητα της.

- **Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρευματος** $\frac{di}{dt}$

Από τον νόμο της αυτεπαγωγής (*Lentz*) προκύπτει ότι $E_{\alpha\epsilon\tau} = -L \frac{di}{dt}$, άρα:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E_{\alpha\epsilon\tau}}{L}$$

όμως $E_{\alpha\epsilon\tau} = V_L = V_C = \frac{q}{C} \Rightarrow$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega^2 q \quad (1.55)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της Ενέργειας σε πηνίο και πυκνωτή** $\frac{dU_E}{dt}, \frac{dU_B}{dt}$ Επειδή στην ιδανική περίπτωση η Ενέργεια του Κυκλώματος παραμένει σταθετή προκύπτει ότι:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow dE = 0 = dU_E + dU_B \Rightarrow \frac{dU_E}{dt} = -\frac{dU_B}{dt} \quad (1.56)$$

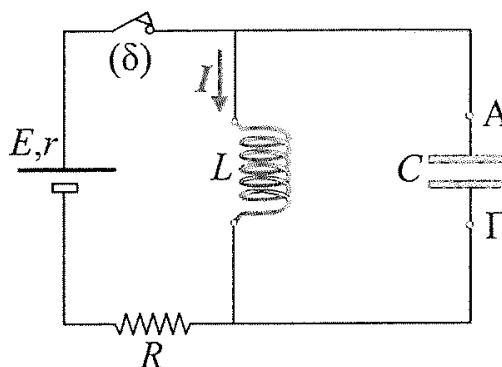
όπου βέβαια σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ο ρυθμός μεταβολής αντιστοιχεί στην Ηλεκτρική ισχύ P_C για τον πυκνωτή και P_L για το πηνίο. Άρα με βάση αυτό προκύπτει ότι:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_C \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{dU_B}{dt} = P_L \quad (1.57)$$

$$\frac{dU_E}{dt} = V_C i = \frac{q}{C} i \quad (1.58)$$

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.87, 5.88, 5.89, 5.91, 5.102, 5.103, 5.106, 5.107, 5.109, 5.110, 5.112, 5.113, 5.114, 5.115, 5.116, 5.118, 5.119, 5.121

Η περίπτωση του αρχικά αφόρτιστου πυκνωτή... Όπως διατυπώσαμε και παραπάνω την χρονική στιγμή $t = 0$ οι τιμές των q, i μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή, άρα υπάρχει μια σειρά από τιμές της αρχικής φάσης για να περιγράψουμε το πρόβλημα μας. Μια χαρακτηριστική περίπτωση εκτός από εκείνη του αρχικά φορτισμένου πυκνωτή που παραπάνω περιγράψαμε υπάρχει και εκείνη του αρχικά αφόρτιστου πυκνωτή. Μια διάταξη στην οποία θα μπορούσαμε να έχουμε την περίπτωση αυτή είναι η ακόλουθη:



Υστερα από πολύ ώρα με τον διακόπτη (δ) κλειστό το πηνίο διαρρέεται από αθερό ρεύμα I . Το ρεύμα υπολογίζεται από τον Νόμο του *Ohm* για κλειστό κύκλωμα:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (1.59)$$

όπου E είναι η ΗΕΔ της πηγής και r η εσωτερική της αντίσταση.

Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίξουμε τον διακόπτη στο πηνίο είναι αποθηκευμένη ενέργεια $U_B = \frac{1}{2}LI^2$ που θα είναι ίση με την ενέργεια της Ηλεκτρικής ταλάντωσης που θα ακολουθήσει.

Σε αυτή την περίπτωση που για $t = 0, q = 0$ και $i = +I$ και θεωρώντας ως θετικό τον οπλισμό Γ οι χρονικές εξισώσεις για το φορτίο και την ένταση του ρεύματος θα είναι:

$$q = Q\eta\mu(\omega t) \quad (1.60)$$

και

$$i = I\sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad (1.61)$$

με απόδειξη που εύκολα μπορεί να προκύψει ξεκινώντας από τις γενικές χρονικές εξισώσεις των q, i και επιλέγοντας ως αρχική φάση $\phi_0 = 0$.

Πρόταση Μελέτης: Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.93, 5.94, 5.95, 5.96, 5.97, 5.99, 5.100, 5.123, 5.124, 5.126, 5.127, 5.128, 5.131, 5.132

Οι αντιστοιχίες του ιδανικού $L - C$ με το μηχανικό ανάλογο του σύστημα $m - k$ Όπως ήδη θα έχετε παρατηρήσει οι μαθηματικές σχέσεις στο κύκλωμα $L - C$ έχουν πολλές ομοιότητες και αναλογίες με αντίστοιχες σχέσεις του συστήματος της μάζας με το ελατήριο των μηχανικών ταλαντώσεων. Χωρίς να σημαίνει ότι τα δύο αυτά συστήματα ταυτίζονται, μπορούμε να περιγράψουμε τις αντιστοιχίες των μεγεθών για λόγους μνημονικούς.

Σύστημα Μάζας - Ελατηρίου	Κύκλωμα $L - C$
Απομάκρυνση x	Φορτίο q
Ταχύτητα v	Ένταση Ρεύματος i
Πλάτος Ταλάντωσης A	Μέγιστο φορτίο Q
Μέγιστη Ταχύτητα $v_{max} = \omega A$	Μέγιστη Ένταση Ρεύματος $I = \omega Q$
Δυναμική Ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$	Ενέργεια Ηλεκτρικού Πεδίου του Πυκνωτή $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Κινητική Ενέργεια Ταλάντωσης $K = \frac{1}{2}mv^2$	Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου στο πηνίο $U_B = \frac{1}{2}Li^2$
Σταθερά k του ελατηρίου	Αντιστροφο της χωρητικότητας $\frac{1}{C}$
Μάζα m του σώματος	Συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου L
Περίοδος $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Περίοδος $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Γνωρίζοντας την περιγραφή του συστήματος «ελατηρίου- μάζας» μπορούμε εύκολα να περάσουμε στο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ και να χρησιμοποιήσουμε παρόμοιες μαθηματικές μεθόδους για τις ασκήσεις μας.

1.4 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

1.4.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο και τελικά μηδενίζεται λέγονται **Φθίνουσες ή Αποσβεννύμενες**. Όλες οι ταλαντώσεις στην φύση είναι φθίνουσες, γιατί καμμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις. Η απόσβεση (δηλαδή η ελάττωση) του πλάτους μιας ταλάντωσης οφείλεται στις δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση του. Επειδή αυτές οι δυνάμεις είναι αντίθετες με την ταχύτητα, παράγουν συνεχώς αρνητικό έργο με αποτέλεσμα να μεταφέρουν συνεχώς ενέργεια απο το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι η ολική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης, που εξαρτάται από την ολική ενέργεια μειώνεται.

Γενικά οι δυνάμεις που προκαλούν μείωση του πλάτους δεν είναι ευκολο να προσδιοριστούν. Μια περίπτωση με μεγάλο ενδιαφέρον είναι η περίπτωση της δύναμης που είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

$$F' = -bv \quad (1.62)$$

Μια τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα

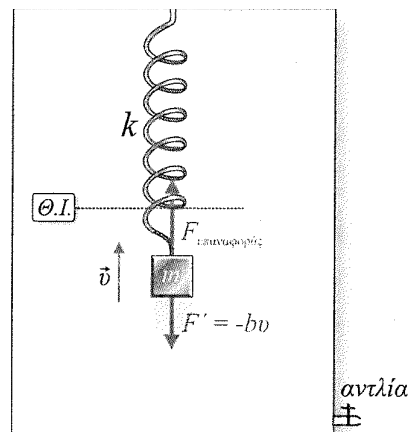
που κινούνται μέσα στο νερό ή στον αέρα.

Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική ποσότητα που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Η μονάδας μέτρησης στο $S.I.$ είναι το $1kg/s$. Από την μορφή της δύναμης είναι εμφανές ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης θα εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b . Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η μείωση του πλάτους σε κάθε περίοδο.

Χρησιμοποιώντας την διάταξη του διπλανού σχήματος και για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης, παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, στις οποίες αποδίδεται η απομάκρυνση x σε συνάρτηση με τον χρόνο για μηδενική, μικρή, μεσαία και μεγάλη απόσβεση.

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν είναι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου**. Το πόσο γρήγορα μειώνεται το πλάτος εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b . Όταν η σταθερά απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. **Στις ακραίες περιπτώσεις που η σταθερά b παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική**, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στην θέση ισορροπίας του και μένει εκεί.
- **Η περίοδος** για ορισμένη τιμή της σταθεράς b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει, η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που, στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου θα θεωρούμε αμελητέα.



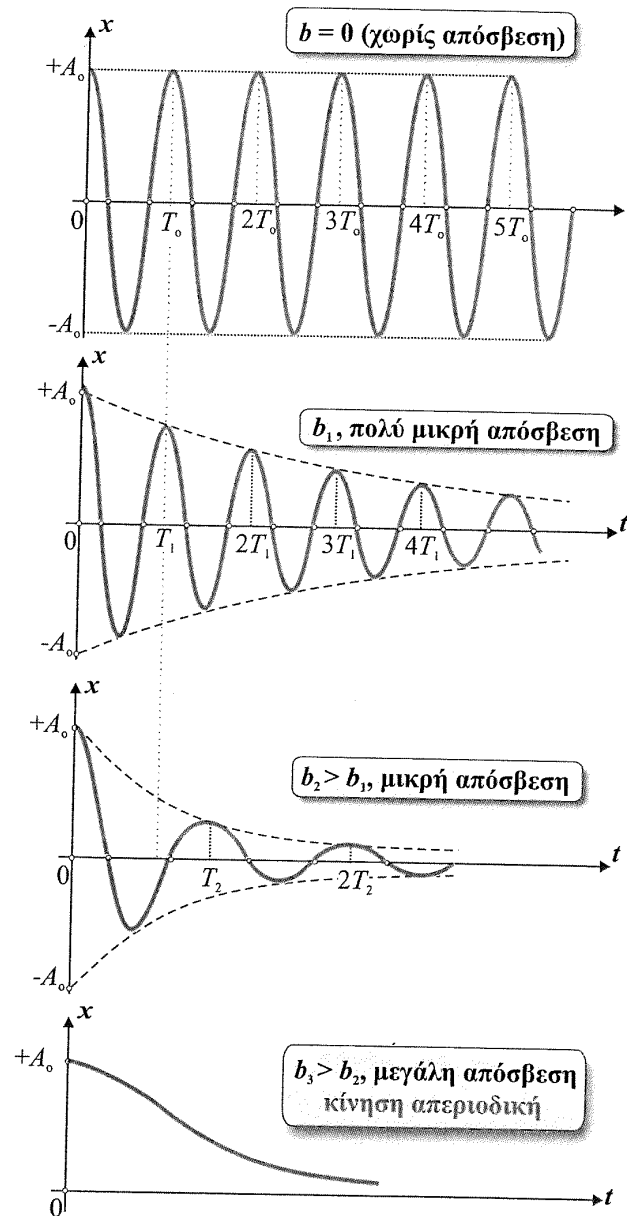
Σχήμα 1.14: Η αύξηση της πυκνότητας αέρα έχει σαν αποτέλεσμα μείωση του πλάτους

Η εκθετική μείωση του πλάτους Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1.63)$$

όπου A_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και $\Lambda = \frac{b}{2m}$ είναι μια θετική σταθερά. Η μονάδα μέτρησης της σταθεράς Λ στο $S.I.$ είναι το s^{-1} .

Χρόνος Υποδιπλασιασμού ή ημισείας ζωής του πλάτους Από την σχέση (1.63) προκύπτει ότι για την μείωση του πλάτους κατά 50% απαιτείτε πάντοτε το ίδιο χρονικό διάστημα $t_{1/2}$ που ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους.

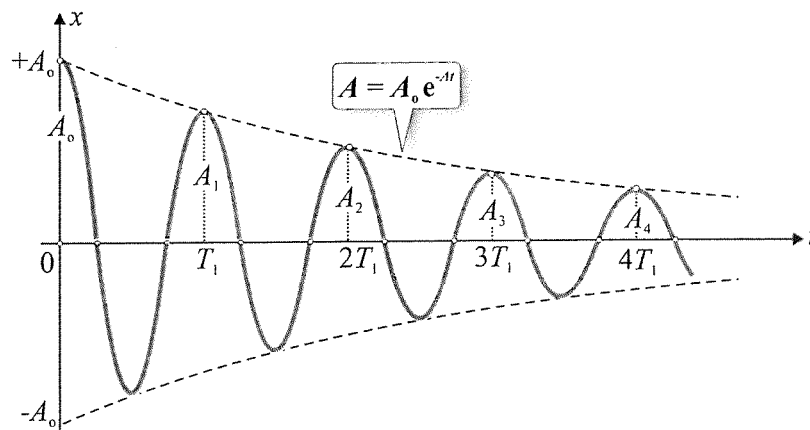


Σχήμα 1.15: Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Αν θέσουμε στην σχέση $A = \frac{A_0}{2}$ τότε βρίσκουμε τον χρόνο $t_{1/2}$:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} \quad (1.64)$$

Άρα ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ανεξάρτητος του αρχικού πλάτους της ταλάντωσης, εξαρτάται αποκλειστικά από την σταθερά Λ .



Σχήμα 1.16: Η εκθετική μείωση του πλάτους και της μέγιστης απομάκρυνσης

Η εκθετική μείωση της μέγιστης απομάκρυνσης Οι μέγιστες απομακρύνσεις προς την ίδια κατεύθυνση μειώνονται εκθετικά με τον χρόνο. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$A_{\kappa} = A_0 e^{-\Lambda t}, \quad t = \kappa T, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων, προς την ίδια κατεύθυνση, διατηρείται σταθερός. Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_{\kappa}}{A_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.65)$$

Απόδειξη: Επιλέγοντας τις χρονικές στιγμές $t_1 = \kappa T$ και $t_2 = (\kappa T + 1)T$ βρίσκουμε:

$$\frac{A_{\kappa}}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T)}}{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T + 1)T}} = e^{\Lambda T} = \sigma \tau \alpha \theta.$$

Η ενέργεια στην φθίνουσα μηχανική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο και θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t} \quad (1.66)$$

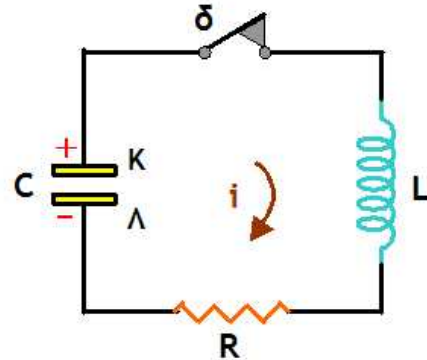
Αντίστοιχα με τον λόγο των διαδοχικών πλάτων, αποδικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \dots = \frac{E_{\kappa}}{E_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (1.67)$$

1.4.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Σε ένα κύκλωμα $L - C$ για να είναι η ηλεκτρική ταλάντωση αμείωτη, δεν πρέπει να υπάρχει απώλεια ενέργειας, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή διαρκώς μικραίνουν και τελικά το κύκλωμα πάυει να ταλαντώνεται.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων, ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση R , η οποία παίζει για το κύκλωμα τον ίδιο ακριβώς ρόλο που παίζει για τον αρμονικό ταλαντωτή η σταθερά απόσβεσης b . Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη, ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ωμική αντίσταση μετατρέπει βαθμιαία την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα *Joule*, με αποτέλεσμα η ολική ενέργεια και κατά συνέπεια το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή διαρκώς να μειώνεται και τελικά να μηδενίζεται. Μεταβάλλοντας την ωμική αντίσταση R , μπορούμε να λάβουμε τις γραφικές παραστάσεις του φορτίου q του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο t για μηδενική, μικρή, μεσαία και πολύ μεγάλη ωμική αντίσταση.



Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τις γραφικές είναι:

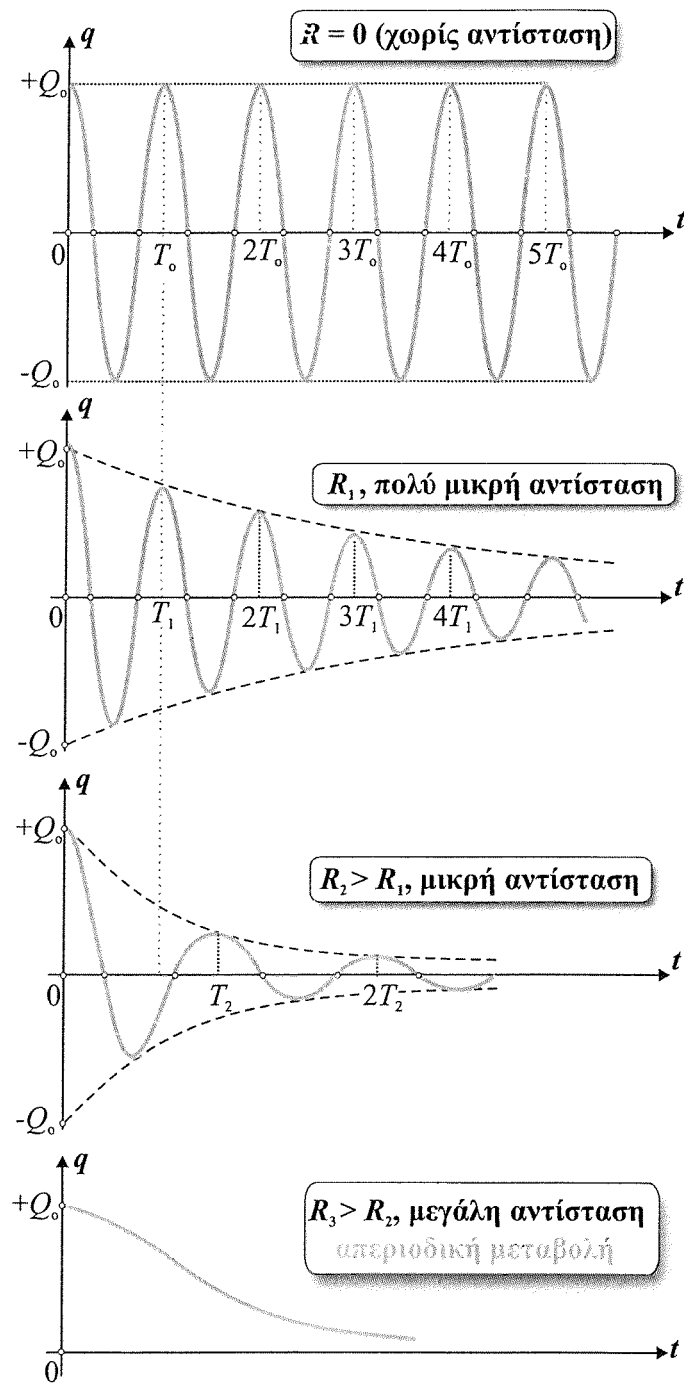
- Ο ρυθμός μείωσης του μέγιστου φορτίου εξαρτάται από την αντίσταση R και, όταν η αντίσταση μεγαλώνει, το μέγιστο φορτίο μειώνεται πιο γρήγορα.
- **Η περίοδος**, για ορισμένη ποσότητα της αντίστασης, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή. Η περίοδος της ταλάντωσης μεγαλώνει όταν μεγαλώνει η αντίσταση. Η αύξηση όμως αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.
- Αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.

Η εκθετική μείωση του μέγιστου φορτίου του πυκνωτή Αποδεικνύεται ότι η μεταβολή του μέγιστου φορτίου σε συνάρτηση με τον χρόνο θα δίνεται από την σχέση:

$$Q = Q_0 e^{-\Lambda t} \quad (1.68)$$

όπου Q_0 είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή την χρονική στιγμή $t = 0$ και η σταθερά $\Lambda = \frac{R}{2L}$ με R την ωμική αντίσταση του κυκλώματος και L τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Η παραπάνω σχέση είναι σε πλήρη αντιστοιχία με την σχέση για το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης.

Από την παραπάνω σχέση και σε πλήρη αντιστοιχία με τις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, αποδεικνύεται η σχέση:



Σχήμα 1.17: Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \dots = \frac{Q_\kappa}{Q_{\kappa+1}} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (1.69)$$

Η ενέργεια στην φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο ακριβώς όπως και στην περίπτωση των μηχανικών ταλαντώσεων. Επίσης το ποσό θερμότητας (Q_R) που εκλύεται στον αντιστάτη είναι ίσο με την μείωση της ενέργειας του κυκλώματος και δίνεται:

$$Q_R = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.70)$$

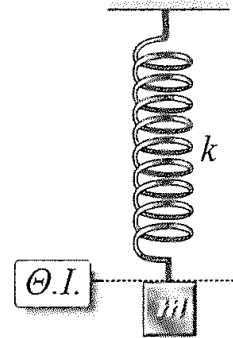
Πρόταση Μελέτης: Λύσε από τον **Α τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 6.1 - 6.38, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.55, 6.56, 6.58, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.70

1.5 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

1.5.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας. Αν η μάζα απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας της προς τα κάτω κατά A και αφεθεί ελεύθερη, το σύστημα να εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις, η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.71)$$



Όμως στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητα της θα είναι λίγο μικρότερη από την f_0 (στην πράξη μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίση με την f_0). Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **ελεύθερη ταλάντωση**.

Η συχνότητα f_0 με την οποία πραγματοποιείται μια ελεύθερη ταλάντωση, ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης**.

Μια χρήσιμη παρατήρηση (εκτός ύλης) θεωρητικά η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης f_ϕ είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 και αυτό επιβεβαιώνεται από την σχέση:

$$\omega_\phi = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

η οποία ισχύει όταν στο σύστημα ενεργεί μια δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση γενικά $\omega_\phi < \omega_0$ ή $f_\phi < f_0$. Στην περίπτωση όμως που η σταθερά b είναι πολύ μικρή (σχολικό βιβλίο) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f_\phi = f_0$.

Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης, πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική εξωτερική δύναμη. Αυτή την δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.

Θεωρούμε την διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ένα τροχό, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σώμα να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με συχνότητα η οποία συμπίπτει με την συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη**. Δηλαδή:

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση ενός συστήματος, όταν σε αυτό ασκείται **εξωτερική περιοδική δύναμη**, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Ο τροχός με την περιοδική δύναμη που ασκεί ονομάζεται διεγέρτης. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με την συχνότητα του διεγέρτη (f_δ) και όχι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος (f_0). Δηλαδή **στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση την συχνότητα του**.

Καμπύλες Συντονισμού

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης A εξαρτάται από την συχνότητα f_δ του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f_δ του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός και αν η συχνότητα του διεγέρτη πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_0 , οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα f_δ γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

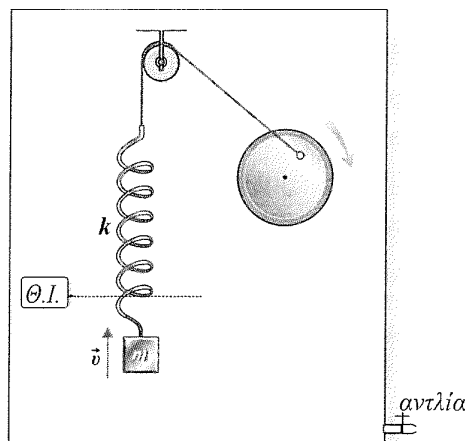
Συντονισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο για μια ορισμένη συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος γίνεται μέγιστο.

Στην περίπτωση που μια ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας ($b = 0$), όταν $f_\delta = f_0$, το πλάτος γίνεται θεωρητικά άπειρο. Στην πράξη όμως αυτό είναι αδύνατο γιατί πάντα υπάρχουν (έστω και μικρές) απώλειες ενέργειας.

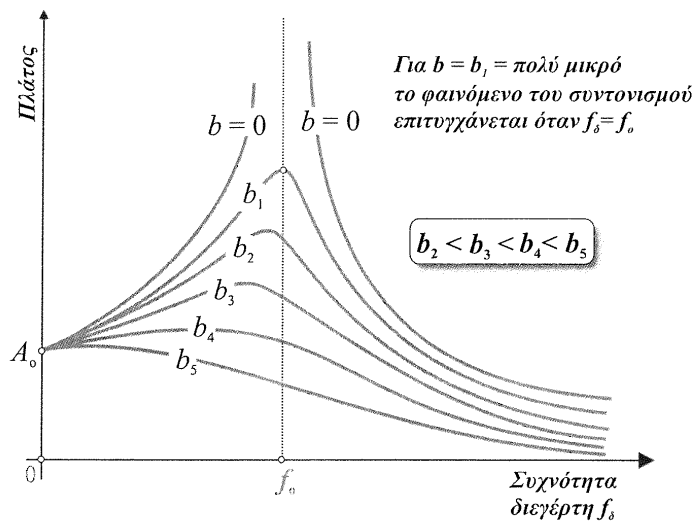
Για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης (b), το πλάτος παίρνει μια πεπερασμένη μέγιστη τιμή που εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης. Ταυτόχρονα ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα f_δ του διεγέρτη είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 . Οι **Καμπύλες συντονισμού** αποτυπώνουν με τον καλύτερο τρόπο τα παραπάνω.

Ενεργειακή προσέγγιση

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις, κατά την διέγερση του συστήματος δίνεται σ' αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή, αν η ταλάντωση είναι αμείωτη, ή μετατρέπεται σε θερμότητα αν η ενέργεια είναι φθίνουσα.



Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται περιοδικά ενέργεια με συχνότητα f_δ , μέσω της διεγείρουσας δύναμης. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια στο σύστημα αντισταθμίζει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών και αντιστάσεων και έτσι το πλάτος παραμένει σταθερό. Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα απορροφά την ενέργεια είναι "εκλεκτικός" και έχει να κάνει με την συχνότητα που του προσφέρεται. Κατά τον συντονισμό, η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος είναι μέγιστο. Λέγοντας βέλτιστο τρόπο, εννοούμε ότι κατά τον συντονισμό η κατεύθυνση της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης ($F_{εξ}$) ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ταχύτητας v του συστήματος.



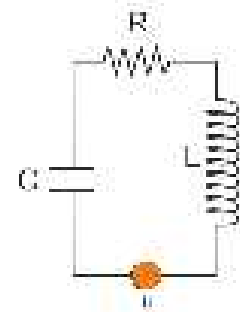
Σχήμα 1.18: Καμπύλες συντονισμού πλάτους

1.5.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Αν ένα κύκλωμα $L - C$ διεγερθεί (π.χ. με φόρτιση του πυκνωτή από πηγή συνεχούς τάσης) εκτελεί **ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση** με συχνότητα:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1.72)$$

Αν το κύκλωμα δεν παρουσιάζει αντίσταση (ιδανικό κύκλωμα $L - C$), τότε η ταλάντωση είναι αμείωτη. Αν, όμως αντίσταση στο κύκλωμα δεν είναι αμελητέα ($R \neq 0$), η ταλάντωση είναι φθίνουσα με συχνότητα ελαφρώς μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος (πρακτικά περίπου ίση για το σχολικό βιβλίο). Όπως και στις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, έτσι και εδώ το κύκλωμα μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ως διεγέρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια **πηγή εναλλασσόμενης τάσης**, όπως φαίνεται στο σχήμα.



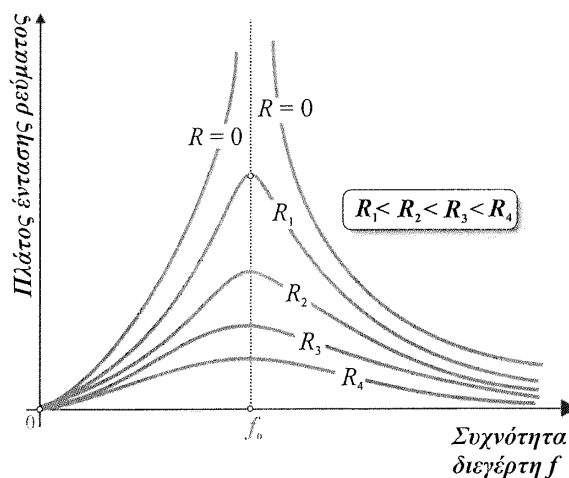
Τότε, το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα με συχνότητα f , ίδια με της εναλλασσόμενης τάσης. Αν μεταβάλουμε την συχνότητα της τάσης, το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, όταν η συχνότητα f γίνεται ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος

$L - C$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το κύκλωμα $L - C$ βρίσκεται σε συντονισμό**. Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνεται το πλάτος I της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την συχνότητα f , για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης R .

Παρατηρούμε ότι οι **καμπύλες συντονισμού** είναι αντίστοιχες με εκείνες των μηχανικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Αυτό όμως που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι καθώς η ωμική αντίσταση R αυξάνεται, το πλάτος της έντασης του ρεύματος I μειώνεται, αλλά η συχνότητα για την οποία συμβαίνει η μεγιστοποίηση του πλάτους της έντασης του ρεύματος δεν μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές, αλλά παραμένει πάντα ίδια με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος.

Βασική εφαρμογή του συντονισμού στις εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι το φαινόμενο "πίσω" από την επιλογή ραδιοφωνικού σταθμού στο ραδιόφωνο. Η επιλογή βασίζεται στον συντονισμό του κυκλώματος $L - C$ του ραδιοφώνου με τα ραδιοφωνικά κύματα. Μεταβάλλοντας την συχνότητα στο ραδιόφωνο μας μεταβάλλουμε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή στο εσωτερικό του, άρα και την ιδιοσυχνότητα f_0 μέχρι να "συντονιστούμε" με την συχνότητα f του σταθμού και να ακούσουμε καθαρά την ένταση του σήματος.

Πρόταση Μελέτης: Λύσε από τον **Άτομο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** 7.1 - 7.29, 7.33-7.37, 7.39, 7.40-7.43



Σχήμα 1.19: Καμπύλες συντονισμού πλάτους ρεύματος

1.6 Σύνθεση Ταλαντώσεων

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση. Το αποτέλεσμα είναι, γενικά, μια πολύπλοκη κίνηση, της οποίας η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων. Η κίνηση που κάνει το σώμα ονομάζεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **Σύνθεση ταλαντώσεων**. Στο παρον μάθημα θα μελήσουμε δύο περιπτώσεις σύνθετης ταλάντωσης.

Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια συχνότητα και γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο. Έστω ότι ένα σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις πού:

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,

- έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και
- έχουν πλάτη A_1 και A_2 και διαφορά φάσης ϕ .

Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων για τις δύο ταλαντώσεις θα είναι αντίστοιχα :

$$x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t) \quad x_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ κάθε χρονική στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \eta \mu(\omega t) + A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να πάρει την μορφή :

$$x = A \eta \mu(\omega t + \theta) \quad (1.73)$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sigma \upsilon \nu \phi} \quad (1.74)$$

και

$$\epsilon \phi \theta = \frac{A_2 \eta \mu \phi}{A_1 + A_2 \sigma \upsilon \nu \phi} \quad (1.75)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η κίνηση του Σώματος Σ είναι επίσης απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το ίδιο σημείο, της ίδιας διεύθυνσης και της ίδιας συχνότητας με πλάτος A και διαφορά φάσης θ από την ταλάντωση με εξίσωση $x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t)$.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν εύκολα να προκύψουν με την χρήση της Αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος για τις δύο ταλαντώσεις και την σύνθεση τους.

Ειδικές περιπτώσεις

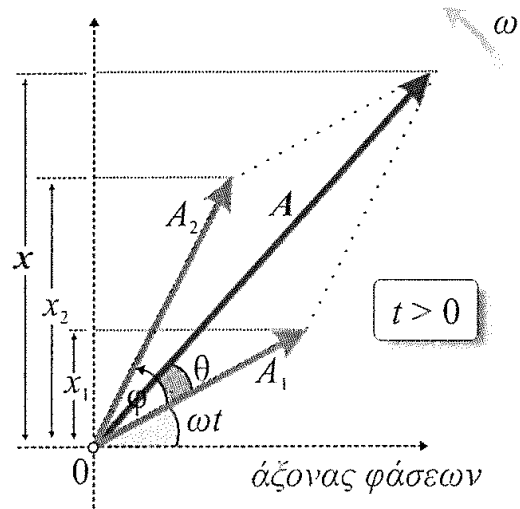
(α) Όταν είναι $\phi = 0$, τότε οι σχέσεις (1.74),(1.75) γράφονται :

$$A = \sqrt{A_1 + A_2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \Rightarrow A = A_1 + A_2$$

και

$$\epsilon \phi \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ rad}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών A_1, A_2 των επιμέρους ταλαντώσεων.



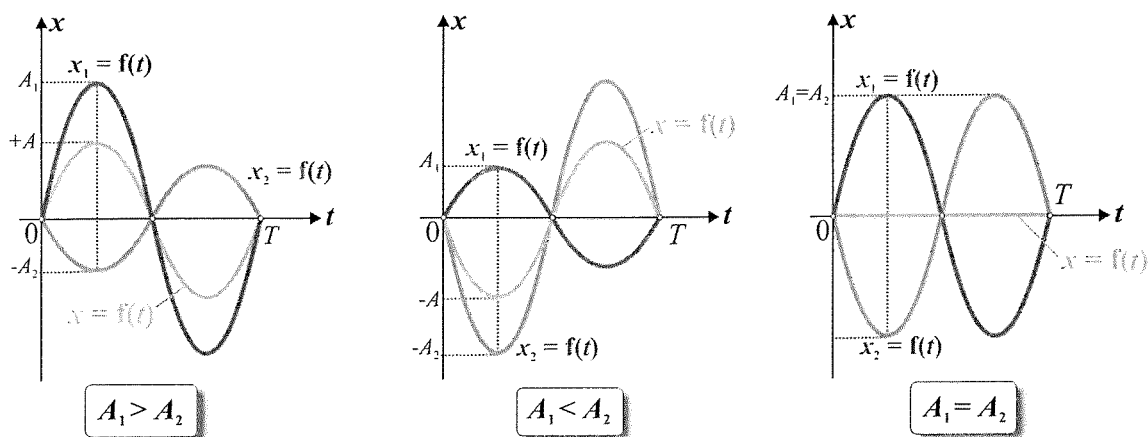
Σχήμα 1.20: Αναπαράσταση περιστρεφόμενου διανύσματος

(β) Όταν $\phi = \pi \text{ rad}$, τότε η σχέση (1.74) γράφεται:

$$A = \sqrt{A_1 + A_2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \Rightarrow A = |A_1 - A_2|$$

και η σχέση (1.75) δίνει $\theta = 0$ ή $\theta = \pi \text{ rad}$.

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των επιμέρους πλάτων και η φάση είναι ίση με την φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος (δηλαδή $\theta = 0$, αν $A_1 > A_2$, και $\theta = \pi$, όταν είναι $A_1 < A_2$).



Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με ίδιο πλάτος και διαφορετική συχνότητα. Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που:

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,
- έχουν το ίδιο πλάτος A και τους,
- οι γωνιακές συχνότητες τους ω_1 και ω_2 διαφέρουν λίγο μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν δύο τέτοιες ταλαντώσεις είναι αντίστοιχα:

$$x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t) \quad x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ κάθε χρονική στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = A\eta\mu(\omega_1 t) + A\eta\mu(\omega_2 t) = A(\eta\mu(\omega_1 t) + \eta\mu(\omega_2 t))$$

και με την χρήση της αντίστοιχης τριγωνομετρικής ταυτότητας προκύπτει ότι:

$$x = 2A \sigma \nu \nu \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (1.76)$$

Επειδή όμως οι συχνότητες ω_1, ω_2 διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, από την τελευταία σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Ο παράγοντας

$$A' = 2A \sigma \nu \nu \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (1.77)$$

μεταβάλλεται με τον χρόνο πολύ αργά σε σχέση με τον δεύτερο παράγοντα $\eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον παράγοντα αυτό ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης, το οποίο μεταβάλλεται με αργό ρυθμό από $|A'| = 0$ μέχρι $|A'| = 2A$.

- Ο παράγοντας $\eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$ μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο με γωνιακή συχνότητα $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2 \quad (1.78)$$

Επομένως η εξίσωση (1.76) γράφεται:

$$x = A' \eta \mu(\bar{\omega} t) \quad (1.79)$$

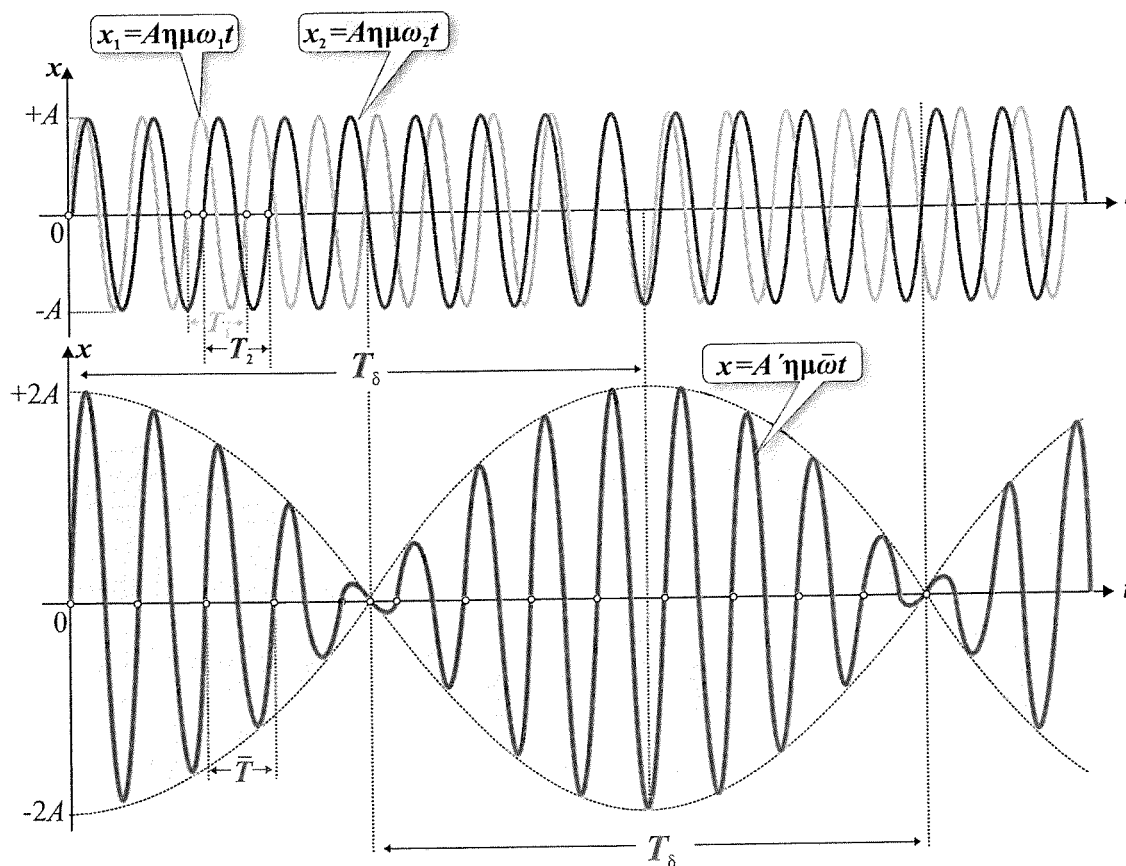
η παραπάνω σχέση περιγράφει μια **ιδιόμορφη ταλάντωση** που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επιμέρους ταλαντώσεις και πλάτος $|A'|$ που μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι $2A$. Λέμε ότι η κίνηση του σώματος Σ παρουσιάζει **διακροτήματα**. Δηλαδή:

Διακρότημα ονομάζεται η ιδιόμορφη ταλάντωση που προκύπτει από την σύνθεση δυο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο πλάτος και οι συχνότητες τους διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.

Ο χρόνος T_δ ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους, ονομάζεται **Περίοδος του Διακροτήματος**.

Υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος Από την σχέση (1.77) προκύπτει ότι το πλάτος A' μηδενίζεται όταν:

$$2A \sigma \nu \nu \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) = 0$$



Σχήμα 1.21: Η σύνθεση δύο ταλαντώσεων με κοντινές συχνότητες

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t = (2\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$$

όπου $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Θέτοντας $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ στην τελευταία σχέση, μπορούμε να έχουμε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικούς χρόνους μηδενισμού του πλάτους A' . Άρα από τον ορισμό της περιόδου διακροτήματος έχουμε:

$$T_\delta = t_2 - t_1 = \frac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi|f_1 - f_2|}$$

Άρα η περίοδος διακροτήματος δίνεται από την σχέση:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad (1.80)$$

και η συχνότητα του διακροτήματος που εκφράζει τον αριθμό των διακροτημάτων αναδευτερόλεπτο θα δίνεται από την σχέση:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = |f_1 - f_2| \quad (1.81)$$

Πρόταση Μελέτης: Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιω-
τακόπουλου** 8.1 - 8.44, 8.50 - 8.53, 8.55-8.59, 8.62 - 8.65, 8.67, 8.68, 8.70, 8.71,
8.73-8.76, 8.78, 8.83-8.88, 8.90, 8.92, 8.94-8.98

Κεφάλαιο 2

Κύματα

2.1 Ορισμός του κύματος

Κύμα ονομάζεται η διάδοση μιας διαταραχής που μεταφέρει ενέργεια και ορμή με σταθερή ταχύτητα.

Ελαστικό μέσο ονομάζεται κάθε υλικό μέσο που, για λόγους απλότητας, δεχόμαστε ότι έχει τις εξής ιδιότητες:

- Αποτελείται από σωματίδια, τα οποία πληρούν το μέσο χωρίς διάκενα.
- Τα σωματίδια αυτά συνδέονται μεταξύ τους με ελαστικές δυνάμεις.

Αν για κάποιο λόγο ένα σωματίδιο Σ απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, τότε εμφανίζεται μια δύναμη που τείνει να επαναφέρει το σωματίδιο στη θέση ισορροπίας του. Ταυτόχρονα, λόγω αντιδράσεων, δέχονται δυνάμεις και τα γειτονικά σωματίδια, οπότε απομακρύνονται και αυτά από τις θέσεις ισορροπίας τους. Με τον τρόπο αυτό η διαταραχή που προκλήθηκε στο σωματίδιο Σ διαδίδεται σταδιακά από το ένα σημείο του ελαστικού μέσου στο άλλο και προς όλες τις διευθύνσεις με ορισμένη ταχύτητα. όταν το μέσο είναι ομογενές και ισότροπο (δηλ. έχει τις ίδιες φυσικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις), η ταχύτητα είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις.

Κατά την διάδοση ενός κύματος μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο, όχι όμως και ύλη

Αν ένα σωματίδιο Σ (η πηγή των κυμάτων) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση μιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης, τότε η ενέργεια που προσφέρεται συνεχώς στο σωματίδιο ευτό θα μεταβιβάζεται προς όλες τις διευθύνσεις με ορισμένη ταχύτητα. Όταν το κύμα φθάνει σε ένα οποιοδήποτε σωματίδιο του μέσου, αυτό αρχίζει επίσης να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση και αποκτά ενέργεια (κινητική και δυναμική), η οποία μεταβιβάζεται στα γειτονικά του σωματίδια κ.ο.κ. Έτσι με την διαδικασία αυτή, γίνεται μεταφορά της ενέργειας που παρέχεται στη πηγή Σ των κυμάτων από το εξωτερικό αίτιο, χωρίς να γίνεται μεταφορά ύλης, αφού τα σωματίδια του μέσου εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους.

Όταν η ταλάντωση της πηγής Σ είναι απλή αρμονική ταλάντωση, τότε το παραγόμενο κύμα ονομάζεται **Αρμονικό Κύμα**.

2.2 Τα είδη των κυμάτων

Τα κύματα, ανάλογα με τον μηχανισμό παραγωγής και διάδοσης τους, διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

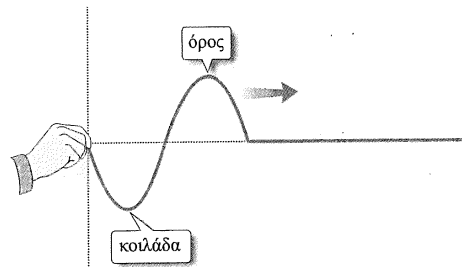
- Στα **Μηχανικά Κύματα**, που είναι η διάδοση μιας διαταραχής σε ένα ελαστικό μέσο. Τα μηχανικά κύματα (σεισμικά, υδάτινα, ηχητικά κλπ) διαδίδονται μόνο σε υλικά σώματα που έχουν την ικανότητα να δέχονται και να μεταβιβάζουν προσωρινές παραμορφώσεις.
- Στα **Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα**, που είναι η διάδοση μιας ηλεκτρομαγνητικής διαταραχής. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φωτεινά κύματα, ραδιοκύματα, ακτίνες X, ακτίνες γ) διαδίδονται και στο κενό με ταχύτητα $c = 3 \cdot 10^8 m/s$.

Με κριτήριο τις διαστάσεις του ελαστικού μέσου, τα κύματα διακρίνονται σε:

- **Γραμμικά Κύματα**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται μόνο σε μια διεύθυνση. Γραμμικά κύματα διαδίδονται κατά μήκος μιας τεντωμένης ελαστικής χορδής.
- **Επιφανειακά Κύματα**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια ενός υλικού μέσου. Επιφανειακά κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού.
- **Κύματα χώρου**, δηλαδή κύματα που διαδίδονται προς όλες τις διευθύνσεις ενός υλικού μέσου. Κύματα χώρου είναι τα ηχητικά κύματα που διαδίδονται στον αέρα.

Με κριτήριο το μηχανισμό διάδοσης, τα κύματα διακρίνονται σε:

- **Εγκάρσια Κύματα**, όπου τα σωματίδια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται σε διεύθυνση κάθετη προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά σώματα και στην ελεύθερη επιφάνεια των υγρών. Κατά τη διάδοση των εγκάρσιων κυμάτων σχηματίζονται "όρη" και "κοιλιάδες", όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

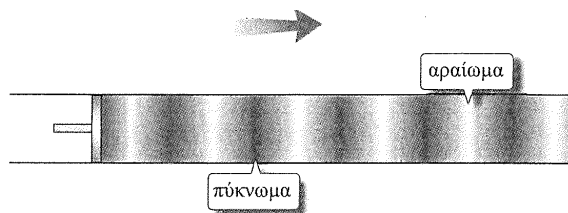


Σχήμα 2.1: Εγκάρσιο Κύμα

- **Διαμήκη Κύματα**, όπου τα σωματίδια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται σε διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται στα στερεά, τα υγρά και τα αέρια. Κατά την διάδοση των διαμήκων κυμάτων εμφανίζονται "πυκνώματα" και "αραιώματα". Στα στερεά τα διαμήκη κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από ό,τι στα εγκάρσια.

Με κριτήριο τη μετακίνηση ή όχι της φάσης, τα κύματα διακρίνονται σε:

- **Τρέχοντα Κύματα**, όπου συμβαίνει μετακίνηση της φάσης του κύματος από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο με πεπερασμένη ταχύτητα.
- **Στάσιμα Κύματα**, όπου η φάση του κύματος δεν μετακινείται.



Σχήμα 2.2: Διαμήκες Κύμα

2.3 Τα στοιχεία του τρέχοντος αρμονικού κύματος

Τα στοιχεία ενός τρέχοντος αρμονικού κύματος είναι τα εξής:

α. Η περίοδος, η συχνότητα και το πλάτος του αρμονικού κύματος

Όταν η πηγή ενός κύματος, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T , συχνότητα f και πλάτος A , τότε τα σωματίδια του ελαστικού μέσου όπου διαδίδεται το κύμα εκτελούν επίσης απλή αρμονική ταλάντωση που έχει την ίδια περίοδο, την ίδια συχνότητα και το ίδιο πλάτος με την ταλάντωση της πηγής. Τα μεγέθη αυτά, όταν αναφερόμαστε στο κύμα, αποτελούν τα αντίστοιχα μεγέθη του κύματος. Άρα:

Περίοδος (T) ενός αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση. Αν φωτογραφίζαμε το μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα την χρονική στιγμή $t_1 = T$ και $t_2 = 2T$, θα βλέπαμε ότι η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την περίοδο ενός αρμονικού κύματος και ως εξής:

Περίοδος ενός αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται.

Συχνότητα (f) ενός αρμονικού κύματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου.

Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης των σωματιδίων ενός ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα, αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της πηγής του κύματος και δεν εξαρτάται από το ελαστικό μέσο.

Πλάτος (A) ενός αρμονικού κύματος είναι το πλάτος με το οποίο ταλαντώνονται τα σωματίδια του μέσου.

β. Η ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος

Ταχύτητα διάδοσης (v) ενός αρμονικού κύματος ονομάζεται η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το κύμα σε ένα ορισμένο ελαστικό μέσο. Όταν το ελαστικό μέσο είναι ομογενές και ισότροπο, η ταχύτητα διάδοσης ενός μηχανικού κύματος είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση:

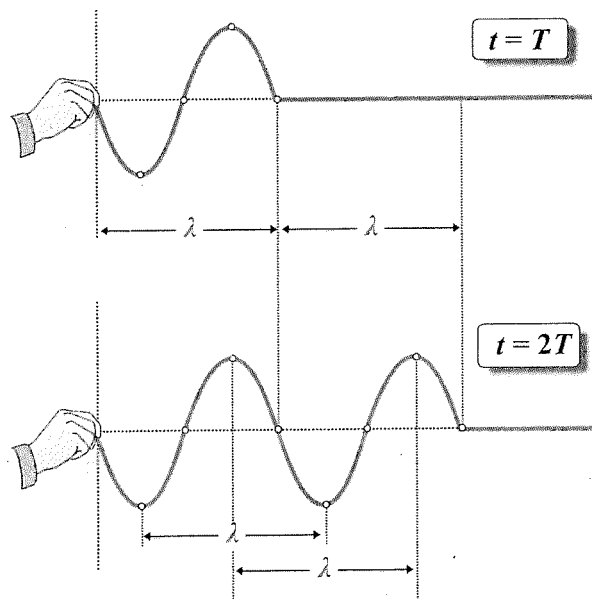
$$v = \frac{x}{t} \quad (2.1)$$

όπου x είναι η απόσταση την οποία διατρέχει το κύμα κατά μήκος μιας ευθείας διάδοσης του και t ο χρόνος που χρειάζεται για αυτό.

Η σταθερή ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σε ένα ελαστικό μέσο δεν πρέπει να συγχέεται με τη χρονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα της ταλάντωσης των σωματιδίων του μέσου.

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από το αν το κύμα είναι εγκάρσιο ή διαμήκες και καθορίζεται από την ελαστικότητα και την αδράνεια του ελαστικού μέσου.

γ. Το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος



Σχήμα 2.3: Σε χρόνο T μια κορυφή του κύματος μετακινείται κατά λ

Μήκος Κύματος (λ) ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο ονομάζεται η απόσταση την οποία διατρέχει το κύμα στο μέσο αυτό σε χρόνο ίσο με μια περίοδο του κύματος. Αν στην σχέση (2.1) θέσουμε $t = T$ και $x = \lambda$, θα έχουμε:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda \cdot f \quad (2.2)$$

όπου f είναι η συχνότητα του κύματος. Η τελευταία σχέση ισχύει για οποιοδήποτε αρμονικό κύμα και ονομάζεται **Θεμελιώδης εξίσωση της Κυματικής**.

Στην θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής η συχνότητα f καθορίζεται από την πηγή του κύματος και η ταχύτητα v από το μέσο διάδοσης του κύματος. Κατα συνέπεια, όταν ένα κύμα μεταβαίνει από ένα μέσο Α σε ένα άλλο μέσο Β, αλλάζει η ταχύτητα και κατα συνέπεια το μήκος κύματος.

2.3.1 Η εξίσωση του Αρμονικού Κύματος

Εξίσωση ενός αρμονικού κύματος ονομάζουμε την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση ενός σωματιδίου του μέσου διάδοσης του κύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο και με την απόσταση του σωματιδίου από την αρχή μέτρησης των αποστάσεων.

Υποθέτουμε ότι στο σημείο Ο ενός ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κυμάτων, η οποία εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας f και ότι το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα Ox (προς τα δεξιά της πηγής των κυμάτων) με ταχύτητα v .

Εκλέγουμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) το σημείο Ο και ως αρχή των χρόνων ($t=0$) τη χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση στο σημείο Ο είναι ίση με μηδέν, δηλαδή η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι $y = 0$ και η ταχύτητα έχει θετική φορά ($v > 0$). Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης στο σημείο Ο θα είναι της μορφής!

$$y = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.3)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα και T η περίοδος της ταλάντωσης της πηγής των κυμάτων.

Ένα σημείο Μ του μέσου που απέχει απόσταση $(OM)=x$ από την πηγή θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{x}{v} \quad (2.4)$$

Επομένως σε μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Μ θα έχει ταλαντωθεί για χρόνο:

$$t - t_1 = t - \frac{x}{v} \quad (2.5)$$

Άρα, με την προϋπόθεση ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ είναι ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Ο, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ θα δίνεται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.6)$$

Η σχέση (2.6) αποτελεί την **Εξίσωση του Αρμονικού Κύματος**

Διάδοση του Κύματος κατα την αρνητική φορά Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα Ox , δηλαδή από το σημείο M προς το O , τότε φτάνει πρώτα στο σημείο M και μετά στο σημείο O . Αυτό σημαίνει ότι η φάση της ταλάντωσης στο σημείο O προηγείται της φάσης της ταλάντωσης στο σημείο M κατά γωνία $\phi = 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Άρα αν κατά την χρονική στιγμή t η απομάκρυνση στο σημείο O δίνεται από την εξίσωση (2.3), την ίδια χρονική στιγμή η απομάκρυνση στο σημείο M δίνεται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.7)$$

Για κάθε σημείο που βρίσκεται στο αρνητικό ημιάξονα το x θα μπαίνει στις εξισώσεις με το πρόσημο του.

Η ταλάντωση των σωματιδίων του ελαστικού μέσου Όταν στο ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, κάθε σημείο του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αφού το κύμα περάσει από αυτό και το διεγείρει. Αν υποθέσουμε ένα κύμα που οδεύει προς τον ημιάξονα με φορά προς τα δεξιά, οι χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου M που απέχει απόσταση x_M από το O θα είναι:

Εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θέση Ισορροπίας

$$y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (2.8)$$

Εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης

$$V_M = \omega A \sigma \nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (2.9)$$

Εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης

$$\alpha_M = -\omega^2 \cdot y_M \Rightarrow \alpha_M = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (2.10)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι οι γνωστές μας εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης για ένα σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται στο ελαστικό μέσο. **Οι παραπάνω σχέσεις όμως έχουν νόημα όταν το κύμα έχει φτάσει στο σημείο M , δηλαδή όταν:**

$$\phi \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{x_M}{v} \quad (2.11)$$

Προφανώς, για κάθε σωματίδιο μάζας m του ελαστικού μέσου που ταλαντώνεται με πλάτος A και σταθερά επαναφοράς $D = m\omega^2$ ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA^2 \quad (2.12)$$

όπου y η απομάκρυνση του σωματιδίου από την θέση ισορροπίας και v η ταχύτητα ταλάντωσης του σε μια τυχαία χρονική στιγμή.

2.3.2 Γραφική παράσταση του αρμονικού κύματος

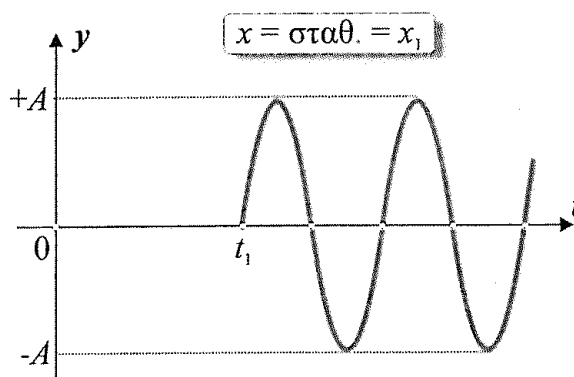
Από τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού κύματος προκύπτει ότι η απομάκρυνση y από την θέση ισορροπίας είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Εξαρτάται από τον χρόνο t και από την θέση x του σωματιδίου. Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση αυτής της εξίσωσης να μπορεί να πραγματοποιηθεί αν θεωρήσουμε τη μια από τις δύο μεταβλητές σταθερή. Έτσι διακρίνουμε 2 περιπτώσεις γραφικών παραστάσεων.

α) Ταλάντωση σωματιδίου του μέσου

Για ένα δεδομένο σωματιδίο του μέσου που βρίσκεται σε ένα σημείο του άξονα Ox , δηλαδή για $x = x_1$ η εξίσωση του αρμονικού κύματος παριστάνει την εξίσωση ταλάντωσης του σωματιδίου και γράφεται:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = f(t), \quad t \geq \frac{x_1}{v}$$

και δείχνει ότι η απομάκρυνση y στο θεωρούμενο σημείο είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Επίσης είναι σαφές ότι η ταλάντωση του σωματιδίου



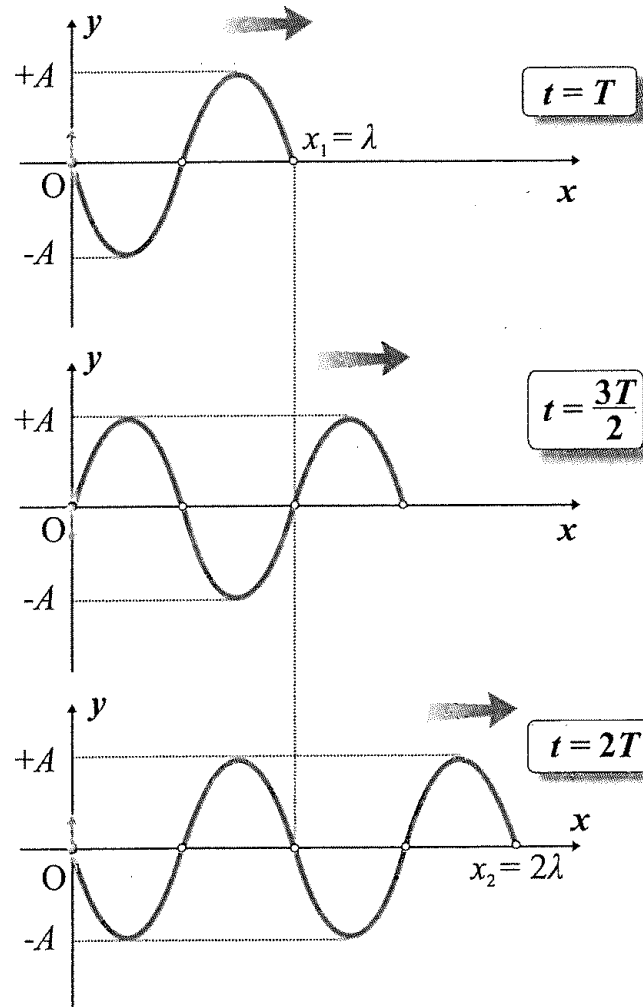
Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σωματιδίου που βρίσκεται στην θέση x_1 σε συνάρτηση με τον χρόνο.

ξεκινά μετά την χρονική στιγμή που το κύμα έχει φτάσει στο σημείο αυτό. Αντίστοιχες είναι και οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας, της επιτάχυνσης, της Δύναμης επαναφοράς.

β) Στιγμιότυπο του κύματος

Για μια δεδομένη χρονική στιγμή, δηλαδή για $t = t_1$, η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = f(x)$$



Σχήμα 2.5: Στιγμιότυπα του κύματος σε διάφορες χρονικές στιγμές. Στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος, αυτό διατρέχει απόσταση ίση με το μήκος κύματος λ και κάθε σωματίδιο του μέσου εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση.

και δείχνει ότι η απομάκρυνση y στα διάφορα σημεία του άξονα Ox είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της απόστασης x .

Η Μεθοδολογία για την σχεδίαση ενός στιγμιότυπου

- 1ο Βήμα: Θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $t = t_1$ για να βρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ της οποίας την γραφική παράσταση θα σχεδιάσουμε.
- 2ο Βήμα: Βρίσκουμε πόσο μακριά έχει φτάσει από την αρχή O το κύμα ($x = vt$) και συγκρίνουμε αυτή την απόσταση με το μήκος κύματος λ (ή το $\lambda/4$).
- 3ο Βήμα: Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου O ($x = 0$) την χρονική στιγμή t_1 ,

θέτοντας στην εξίσωση που βρήκαμε στο 1ο βήμα $x = 0$.

4ο Βήμα: Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο από την αρχή O , όπου έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή t_1 . Το σημείο αυτό την στιγμή t_1 βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.1 -9.27, 9.70, 9.73, 9.74, 9.76, 9.78, 9.79, 9.81, 9.82, 9.85, 9.87, 9.89, 9.90, 9.91 - 9.94, 9.96 - 9.98, 9.100 - 9.105, 9.107, 9.109

2.3.3 Φάση του Αρμονικού Κύματος

Στην εξίσωση του αρμονικού κύματος η παράσταση :

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.13)$$

έχει διαστάσεις γωνίας (rad) και ονομάζεται **φάση του κύματος**. Από τη σχέση (2.13) προκύπτει ότι η φάση ϕ ενός κύματος εξαρτάται από την απόσταση x από το σημείο O και από τον χρόνο t . Αυτό σημαίνει ότι για ένα δεδομένο σημείο του άξονα Ox ($x = x_1$) η φάση θα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t και σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ η φάση θα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή του κύματος.

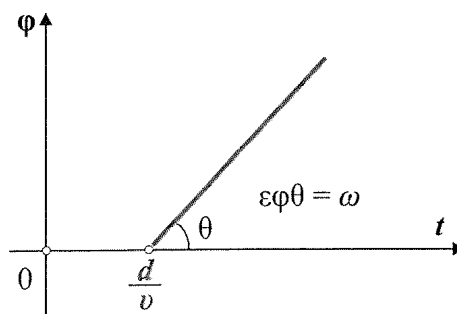
Κάθε σημείο του μέσου που ταλαντώνεται έχει φάση $\phi \geq 0$. Την ίδια χρονική στιγμή t κάθε τέτοιο σημείο έχει διαφορετική φάση από τα υπόλοιπα. Μεταξύ δύο σημείων, μεγαλύτερη φάση έχει το σημείο στο οποίο φτάνει πρώτα το κύμα.

Φάση ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Για ένα δεδομένο σημείο M που βρίσκεται στην θέση $x = x_1$ η φάση γράφεται :

$$\phi_M = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad t \geq \frac{x_1}{v}$$

βέβαια παραπάνω υποθέσαμε ότι το κύμα διαδίδεται προς την θετική φορά του άξονα διάδοσης.

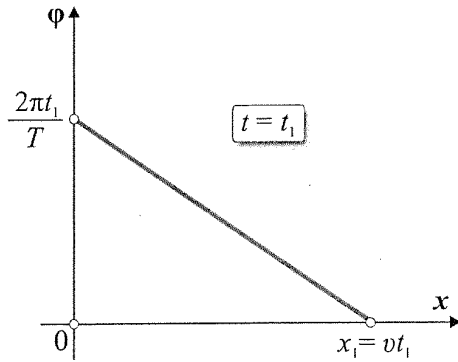
Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τον χρόνο t για το σωματίδιο στη θέση M θα είναι μια ευθεία γραμμή. Η χρονική στιγμή $\frac{d}{v}$ είναι η στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο M .



Σχήμα 2.6: Φάση για ένα σωματίδιο σε συνάρτηση με τον χρόνο

Διαφορά φάσης του ίδιου υλικού σημείου σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για το υλικό σημείο Μ σε δύο τυχαίες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 η διαφορά φάσης υπολογίζεται:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$



Φάση ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου για μια δεδομένη χρονική στιγμή Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ η φάση του αρμονικού κύματος γράφεται:

$$\phi_M = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Παρατηρούμε ότι τα υλικά σημεία του μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα θα έχουν διαφορετική φάση σε μια χρονική στιγμή t_1 .

Σχήμα 2.7: Φάση σωματιδίων του μέσου σε δεδομένη χρονική στιγμή

Οι φάσεις των ταλαντώσεων τους κατά την ίδια χρονική στιγμή t θα είναι αντίστοιχα:

Διαφορά φάσης δύο υλικών σημείων του μέσου σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Θεωρούμε δυο σημεία το Α και το Β του άξονα Ox που απέχουν αποστάσεις x_A και x_B από το σημείο Ο.

$$\phi_A = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$$

και

$$\phi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_B > x_A$ τότε θα είναι και $\phi_A > \phi_B$. Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ τους θα είναι:

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε τα εξής:

α) Αν είναι $\Delta x = \kappa\lambda$, τότε θα είναι:

$$\Delta\phi = 2\kappa\pi$$

και κατά συνέπεια:

$$y_A = A\eta\mu(\phi_A) \Rightarrow y_A = A\eta\mu(\phi_B + 2\kappa\pi) = A\eta\mu(\phi_B) \Rightarrow y_A = y_B$$

Άρα: όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων από την πηγή του κύματος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε τα σημεία αυτά έχουν σε κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Δηλαδή:

$$\Delta x = \kappa\lambda, \kappa = 1, 2, \dots \Rightarrow \text{Συμφωνία Φάσης}$$

Από το παραπάνω προκύπτει και ένας άλλος ορισμός του μήκους κύματος: **Μήκος Κύματος λ ονομάζεται η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων της ευθείας διάδοσης του κύματος, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης**

β) Αν είναι $\Delta x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$, τότε θα είναι:

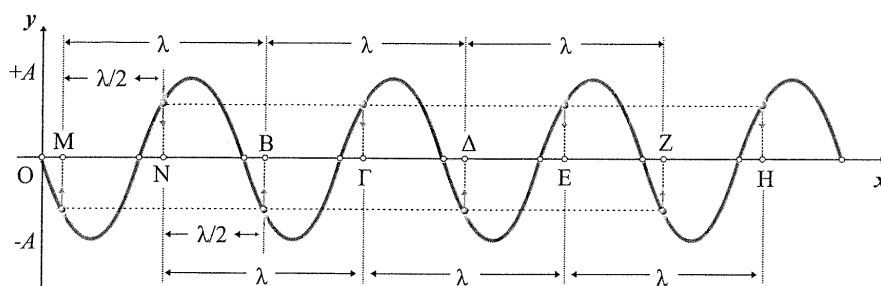
$$\Delta\phi = (2\kappa + 1)\pi$$

και κατά συνέπεια,

$$y_A = A\eta\mu(\phi_A) \Rightarrow y_A = A\eta\mu(\phi_B + (2\kappa + 1)\pi) = -A\eta\mu(\phi_B) \Rightarrow y_A = -y_B$$

Άρα: όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων από την πηγή του κύματος είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, τότε τα σημεία αυτά έχουν σε κάθε χρονική στιγμή αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα ταλάντωσης και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Δηλαδή:

$$\Delta x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}, \kappa = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \text{Αντίθεση Φάσης}$$



Σχήμα 2.8: Σημεία σε συμφωνία φάσης απέχουν αποστάσεις $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$, ενώ σημεία σε αντίθεση φάσης απέχουν αποστάσεις $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.28 - 9.58, 9.122, 9.123, 9.126, 9.127, 9.128, 9.130 - 9.136, 9.139, 9.140, 9.143 - 9.150, 9.153

2.3.4 Αρμονικό Κύμα με αρχική φάση

Αν η ταλάντωση του σημείου Ο ($x = 0$), που το θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων, έχει αρχική φάση ϕ_0 ,

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

τότε η εξίσωση του αρμονικού κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) \quad (2.14)$$

η παραπάνω μορφή προκύπτει εύκολα αν θυμηθούμε την απόδειξη της εξίσωσης του αρμονικού κύματος (2.6).

Πρακτικά Αρχική φάση ϕ_0 για ένα κύμα μπορεί να σημαίνει ότι:

- είτε ότι το σημείο Ο έχει αρχίσει να εκτελεί ταλάντωση πριν τη χρονική στιγμή που θεωρούμε εμείς ως $t = 0$, οπότε αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα να έχει διαδοθεί σε κάποια απόσταση πέρα από το Ο. Για αν βρούμε που έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή $t = 0$ αρκεί να θέσουμε $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2\pi}\right) = 0$,
- είτε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Ο,
- είτε το σημείο Ο ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με φορά προς τα κάτω και με ταχύτητα $v = -v_{max}$. Στην περίπτωση αυτή το κύμα δεν έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t = 0$, αλλά όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου στα οποία φτάνει το κύμα ξεκινούν να ταλαντώνονται με φορά προς τα κάτω (όπως το σημείο Ο).

Με βάση τα παραπάνω πρέπει να μας είναι σαφές ότι ένα κύμα **δεν έχει αρχική φάση** όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Ο ($x = 0$) ξεκινά να ταλαντώνεται με ταχύτητα $v = +v_{max}$.

Επίσης αν και η αρχική φάση στις ταλαντώσεις παίρνει τιμές $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi rad$, στα κύματα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.156, 9.158, 9.160, 9.162, 9.163

2.4 Συμβολή Κυμάτων

Όταν δύο ή περισσότερα κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο ελαστικό μέσο λέμε ότι **συμβάλλουν**. Έχει διαπιστωθεί ότι για την κίνηση των σωματιδίων του μέσου τα κύματα ακολουθούν την **αρχή της επαλληλίας**, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση ενός σωματιδίου του μέσου από την θέση ισορροπίας του, είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλεται στα επιμέρους κύματα.

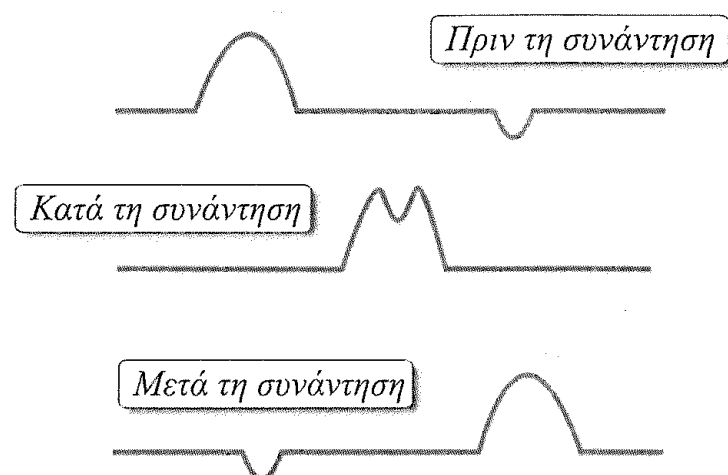
$$y = y_1 + y_2 + \dots$$

Ουσιαστικά η αρχή της επαλληλίας μας λέει ότι:

- κάθε κύμα διαδίδεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, διατηρώντας αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά του, δηλαδή κάθε κύμα διαδίδεται σαν να μην υπάρχουν τα άλλα κύματα,
- τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται εξαιτίας του κάθε κύματος με χαρακτηριστικά ανεξάρτητα της ταυτόχρονης διάδοσης των άλλων κυμάτων

Προσοχή όμως: Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά, ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο παλμών κατά μήκος ενός σχοινιού, στο ίδιο επίπεδο με αντίθετες κατευθύνσεις. όταν οι δύο παλμοί συναντώνται, τα μόρια του σχοινιού έχουν απομάκρυνση ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχαν αν οι δύο παλμοί διαδιδόταν ξεχωριστά.



Το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή.

2.4.1 Σύγχρονες και Σύμφωνες πηγές κυμάτων

Δύο πηγές κυμάτων ονομάζονται **σύμφωνες πηγές**, όταν οι ταλαντώσεις τους έχουν σταθερή διαφορά φάσης. Δηλαδή:

$$\Delta\phi = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Για να είναι η διαφορά φάσης δύο ταλαντώσεων σταθερή, πρέπει αυτές να έχουν την ίδια συχνότητα. Πράγματι ας θεωρήσουμε δύο πηγές κυμάτων με εξισώσεις:

$$y_1 = A\eta\mu(\omega_1 t), \quad y_2 = A\eta\mu(\omega_2 t + \theta)$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο πηγών θα είναι:

$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \theta) - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t + \theta$$

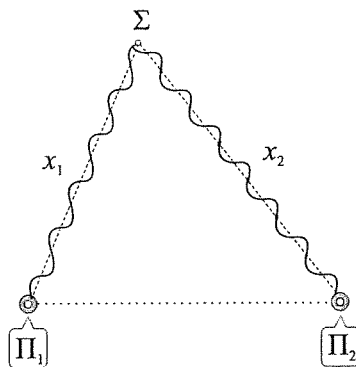
Για να είναι οι δύο πηγές σύμφωνες, πρέπει η διαφορά φάσης να είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου, αυτό συμβαίνει μόνο όταν είναι: $\omega_2 - \omega_1 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \Rightarrow f_2 = f_1$

Όταν η σταθερή διαφορά φάσης των δύο σύμφωνων πηγών είναι ίση με μηδέν ($\Delta\phi = 0$), τότε οι δύο πηγές ονομάζονται **σύγχρονες πηγές**. Οι σύγχρονες πηγές δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα.

Μόνον τα αρμονικά κύματα που προέρχονται από δυο σύμφωνες ή σύγχρονες πηγές κυμάτων παρέχουν φαινόμενα συμβολής.

Συμβολή δύο κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

Στην ήρεμη επιφάνεια ενός υγρού πηγές Π_1 και Π_2 εκπέμπουν αρμονικά κύματα πλάτους A , περιόδου T και μήκους κύματος λ . Θεωρούμε ένα σημείο Σ που απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.



Η απομάκρυνση του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας του, που οφείλεται σε κάθε κύμα ξεχωριστά υπολογίζεται αντίστοιχα για κάθε κύμα από τις εξισώσεις:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας που αναπτύξαμε παραπάνω, το σημείο Σ σε κάθε χρονική στιγμή μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα έχει απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους απομακρύνσεων $y = y_1 + y_2$. Δηλαδή:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

με την βοήθεια της τριγωνομετρίας προκύπτει:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \quad (2.15)$$

Από την μορφή της εξίσωσης (2.15) προκύπτει ότι η κίνηση του σημείου Σ είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος:

$$|A'| = 2A|\sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right)| \quad (2.16)$$

και φάση

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \quad (2.17)$$

Από την σχέση (2.16) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι ίδιο για όλα τα υλικά σημεία της επιφάνειας του νερού αλλά εξαρτάται από τη θέση του σημείου σε σχέση με τις δύο πηγές των κυμάτων.

Κάθε υλικό σημείο του μέσου στο οποίο συμβάλουν τα δυο κύματα θα εκτελεί ταλάντωση με περίοδο ίδια με των κυματικών πηγών και με πλάτος Α' που θα παίρνει τιμές από 0 έως και 2Α. **Διερεύνηση της σχέσης του πλάτους**

α. **Το πλάτος Α' γίνεται μέγιστο**, δηλαδή $A'=2A$, όταν είναι:

$$|\sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right)| = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{|r_1 - r_2|}{2\lambda} = N\pi$$

Άρα προκύπτει ότι για όλα τα σημεία της επιφάνειας του υγρού που η διαφορά των αποστράσεων τους από τις πηγές των κυμάτων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ , εκτελείουν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος 2Α. **Συνθήκη ενίσχυσης**

$$|r_1 - r_2| = N\lambda, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

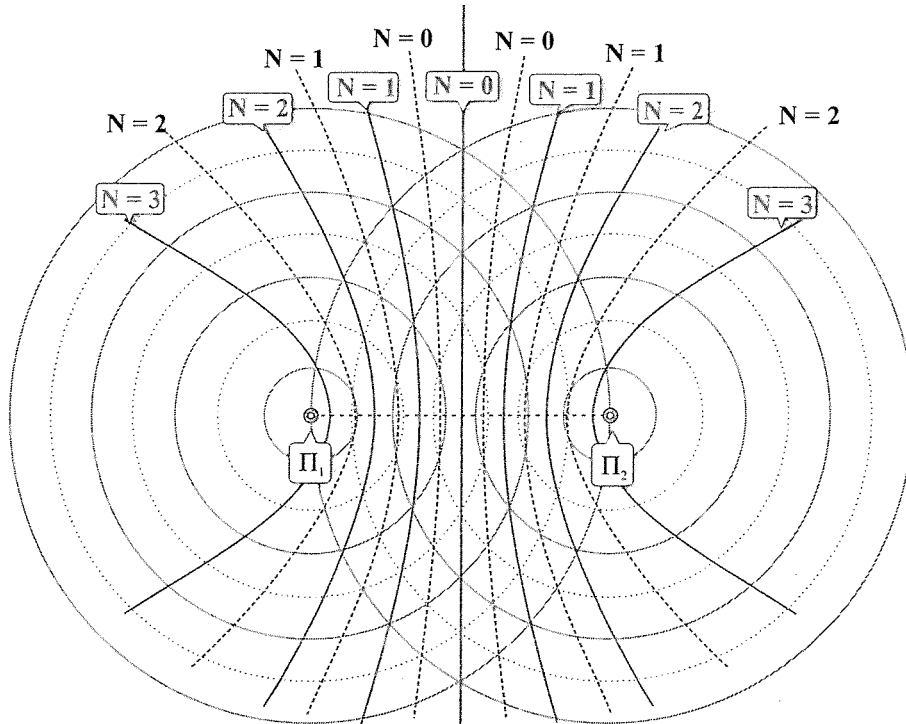
β. **Το πλάτος Α' γίνεται μηδενικό**, δηλαδή $A'=0$ όταν είναι:

$$\sigma\upsilon\nu \left(2\pi \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) = 0 \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{|r_1 - r_2|}{2\lambda} = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$$

Άρα προκύπτει ότι για όλα τα σημεία της επιφάνειας του υγρού που η διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές των κυμάτων είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος $\frac{\lambda}{2}$ παραμένουν συνεχώς ακίνητα. **Συνθήκη απόσβεσης**

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του υγρού για τα οποία ισχύει $r_1 - r_2 = \text{σταθ.}$ είναι μια υπερβολή. Επομένως **τα σημεία στα οποία έχουμε ενίσχυση και τα σημεία στα οποία έχουμε απόσβεση βρίσκονται πάνω σε υπερβολές**. Το σύνολο των υπερβολών αυτών χαρακτηρίζεται με το όνομα **κροσσοί συμβολής**.



Κάθε υπερβολή ενισχυτικής συμβολής (συνεχείς γραμμές) χαρακτηρίζεται από μια μοναδική τιμή N στην συνθήκη ενίσχυσης (2.18). Τα σωματίδια που βρίσκονται πάνω σε αυτές τις υπερβολές ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος ($A' = 2A$).

Κάθε υπερβολή αποσβεστικής συμβολής (διακεκομμένες γραμμές) χαρακτηρίζεται επίσης από μια τιμή του N . Τα υλικά σημεία που βρίσκονται πάνω σε αυτές τις υπερβολές παραμένουν συνεχώς ακίνητα ($A' = 0$).

Τα υλικά σημεία της επιφάνειας του υγρού που δεν βρίσκονται πάνω σε κάποια υπερβολή, έχουν πλάτος ταλάντωσης που παίρνει τιμές $0 < A' < 2A$.

1η Παρατήρηση: Αν οι δύο πηγές Π_1 και Π_2 , έχουν διαφορετικά πλάτη ταλάντωσης A_1 και A_2 , τότε το πλάτος A' της συνισταμένης ταλάντωσης στο σημείο Σ δεν μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (1.63), αλλά από τη σχέση:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi} \quad (2.20)$$

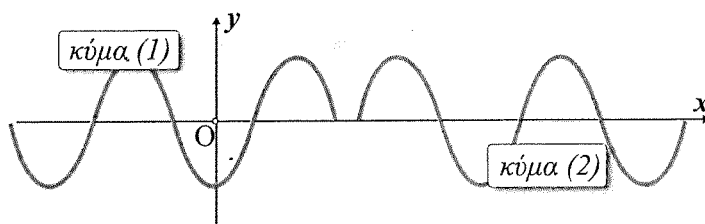
όπου $\Delta\phi = 2\pi \frac{|r_1 - r_2|}{\lambda}$ η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων που προκαλούνται στο σημείο Μ από τα δύο κύματα.

2η Παρατήρηση: Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω μελέτη της συμβολής αφορούσε δύο κύματα οι πηγές των οποίων έχουν κάθε στιγμή ίδια φάση. Συμβολή όμως συμβαίνει σε κάθε περίπτωση όπου δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο, ανεξάρτητα αν προέρχονται από συμφασικές πηγές ή όχι.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 10.1 - 10.35, 10.46, 10.48, 10.49, 10.51, 10.55, 10.57, 10.58, 10.60, 10.61, 10.62, 10.65, 10.68 - 10.75, 10.77, 10.78, 10.80, 10.82, 10.83, 10.84

2.5 Στάσιμα Κύματα

Θεωρούμε δυο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους, τα οποία διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα προς αντίθετες κατευθύνσεις μέσα στο ίδιο ελαστικό μέσο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.9: Δημιουργία στάσιμου κύματος σε χορδή.

Από την συμβολή των δύο κυμάτων προκύπτει μια ταλάντωση των σωματιδίων του ελαστικού μέσου η οποία ονομάζεται **Στάσιμο κύμα**.

Στάσιμο Κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους, που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με την ίδια ταχύτητα και προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Ένα στάσιμο κύμα μπορεί να δημιουργηθεί από τη συμβολή ενός κύματος και του κύματος που προκύπτει από την ανάκλαση του πάνω σε ακίνητο εμπόδιο. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι κρατάμε στο χέρι μας το άκρο ενός σχοινιού, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Αν κινήσουμε το άκρο του σχοινιού απότομα προς τα πάνω και το επαναφέρουμε στην αρχική θέση, τότε δημιουργείται ένας κυματικός παλμός που διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού. όταν ο παλμός φθάνει στο κλόνητο άκρο του σχοινιού, ασκεί στο σημείο στήριξης μιας δύναμη, η οποία έχει φορά προς τα πάνω. Λόγω του 3ου Νόμου του Νεύτωνα, το σημείο στήριξης θα ασκήσει στο σχοινί μια ίση και αντίθετη δύναμη. Αποτέλεσμα αυτής της δύναμης θα είναι και η δημιουργία ενός κυματικού παλμού αντίστροφου του πρώτου, που θα διαδίδεται από το σημείο στήριξης προς το χέρι μας. Τα δυο

κύματα που θα διαδίδονται ταυτόχρονα στο σχοινί θα συμβάλλουν δημιουργώντας ένα στάσιμο κύμα.

Παρατηρώντας το σχοινί δε διάφορες χρονικές στιγμές προκύπτει ότι:

- Υπάρχουν σημεία του σχοινιού που παραμένουν διαρκώς ακίνητα. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **δεσμοί του στάσιμου κύματος**
- Υπάρχουν σημεία του σχοινιού που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Τα σημεία αυτά βρίσκονται στο μέσο της απόστασης μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών και ονομάζονται **Κοιλίες του στάσιμου κύματος**.
- όλα τα σημεία του σχοινιού εκτός από τους δεσμούς εκτελούν ταλάντωση με την ίδια συχνότητα και διαφορετικό πλάτος.

2.5.1 Η εξίσωση του Στάσιμου Κύματος

Θεωρούμε δυο αρμονικά κύματα του ίδιου πλάτους και της ίδιας συχνότητας, τα οποία διαδίδονται στο ίδιο μέσο και έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά. Αν x' είναι ο κοινός άξονας διάδοσης τους, ζητάμε το αποτέλεσμα της συμβολής τους και είναι προφανές ότι θα χρησιμοποιήσουμε την **“Αρχή της Επαλληλίας”**.

Επιλέγουμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων το σημείο Ο ($x = 0$) του άξονα, στο οποίο θεωρούμε ότι οι απομακρύνσεις που προκαλούνται από τα δύο κύματα έχουν τις ίδες εξισώσεις απομάκρυνσης, $y_1 = y_2 = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$, οπότε η συνολική απομάκρυνση στο σημείο Ο θα δίνεται από την εξίσωση:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = 2A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

Επιλέγουμε επίσης ως χρονική στιγμή $t = 0$ την στιγμή κατά την οποία το σημείο Ο διέρχεται από την θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα (δηλ $\phi = 0$).

Οι εξισώσεις των δυο επιμέρους κυμάτων που έχουν αντίθετη φορά θα είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \text{ και } y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Επαλληλίας η απομάκρυνση ενός τυχαίου σημείου Μ που απέχει απόσταση x από το Ο την χρονική στιγμή t θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

ή

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T}t \right) \quad (2.21)$$

Η εξίσωση (2.21) ονομάζεται **Εξίσωση Στάσιμου Κύματος**.

Παρατηρούμε ότι ο όρος:

$$A' = 2A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.22)$$

εξαρτάται μόνο από την θέση x του σημείου και είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Από τις σχέσεις (2.21), (2.22) παίρνουμε την εξίσωση:

$$y = A' \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad (2.23)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

- Κάθε σημείο του μέσου εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση που έχει την ίδια συχνότητα με αυτή των δύο κυμάτων
- Το πλάτος της ταλάντωσης $|A'|$ δεν είναι το ίδιο για όλα τα σημεία του μέσου, αλλά εξαρτάται από τη θέση του κάθε σημείου.
- Η ταχύτητα και η επιτάχυνση της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, κατά μήκος του οποίου δημιουργείται στάσιμο κύμα σε συνάρτηση με τον χρόνο, θα δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v = \omega A' \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad \alpha = -\omega^2 A' \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$$

Διερεύνηση της σχέσης του πλάτους:

α. Ο όρος A' γίνεται μέγιστος, δηλαδή $A' = \pm 2A$, όταν είναι:

$$2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm A \Rightarrow \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = k \cdot \pi$$

$$x_k = k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Άρα τα σημεία του θετικού ημιάξονα που απέχουν από το σημείο - κοιλία Ο, που λαμβάνεται ως η αρχή μέτρησης των αποστάσεων, αποστάσεις $0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, \dots, k\frac{\lambda}{2}$

εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος $A'=2A$. Τα σημεία αυτά είναι οι **κοιλίες του στάσιμου κύματος**. Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών του στάσιμου κύματος στη διεύθυνση του άξονα x είναι $\frac{\lambda}{2}$.

β. Το πλάτος $|A'|$ γίνεται μηδενικό, δηλαδή $A'=0$, όταν είναι:

$$2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

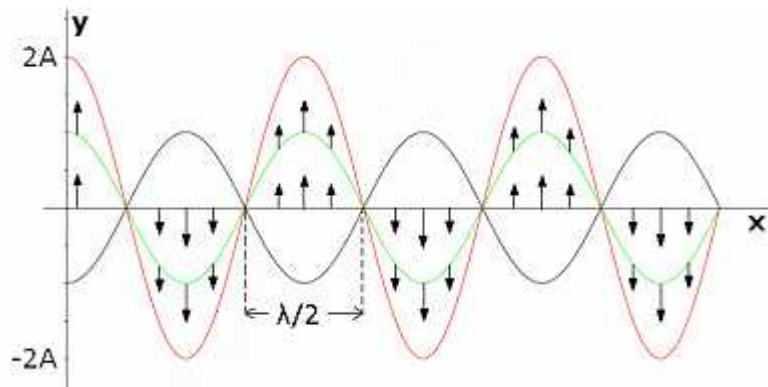
$$x_{\Delta} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Άρα τα σημεία του θετικού ημιάξονα που απέχουν από το σημείο - κοιλία Ο, που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων, αποστάσεις $\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Τα σημεία αυτά είναι οι **δεσμοί του στάσιμου κύματος**. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών του στάσιμου κύματος είναι $\frac{\lambda}{2}$.

Η **απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης κοιλίας** μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την διαφορά των θέσεων

$$d = |x_{\Delta} - x_{\kappa}| = \left| k \cdot \frac{\lambda}{2} - (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4} \right| = \frac{\lambda}{4}$$

Φάση και Διαφορά φάσης



Μεταξύ του σημείου Ο και του πρώτου Δεσμού του στάσιμου κύματος, όλα τα υλικά σημεία διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους και φτάνουν ταυτόχρονα στις θέσεις της μέγιστης απομάκρυνσης τους. Δηλαδή έχουν την **ίδια φάση** $\phi = \omega t$ και εκτελούν ταλάντωση με εξίσωση $y = A'\eta\mu(\omega t)$.

Τα υλικά σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν σε κάθε χρονική στιγμή την ίδια φάση.

Τα υλικά σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και σε απόσταση μικρότερη του $\frac{\lambda}{2}$, κάθε χρονική στιγμή κινούνται με αντίθετες φορές, δηλαδή, ενώ περνούν ταυτόχρονα από την θέση ισορροπίας τους, κινούνται με αντίθετης κατεύθυνσης ταχύτητες. Άρα βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης** και έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Έτσι τα σημεία που βρίσκονται δεξιά του πρώτου δεσμού έχουν φάση $\phi = \omega t + \pi$ και εκτελούν ταλάντωση με εξίσωση $y = A'\eta\mu(\omega t + \pi)$.

Τα υλικά σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού βρίσκονται σε κάθε χρονική στιγμή σε αντίθεση φάσης.

Στάσιμα Κύματα σε χορδή

Στάσιμα κύματα μπορούν να δημιουργηθούν και σε ένα μέσο, του οποίου τα δύο άκρα είναι ακίνητα, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην χορδή μιας κιθάρας. Επειδή τα ακίνητα άκρα της χορδής είναι δεσμοί του στάσιμου κύματος, πρέπει το μήκος L της χορδής και το μήκος κύματος λ να συνδέονται με τη σχέση:

$$L = \kappa \frac{\lambda}{2}, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Προσοχή γιατί σε αυτή την περίπτωση δεν ισχύει η εξίσωση του στάσιμου κύματος που περιγράψαμε παραπάνω, με την υπόθεση ότι το Ο είναι κοιλία

Όταν η χορδή είναι δεμένη στο ένα άκρο της, τότε το ελεύθερο άκρο της θα είναι συνεχώς κοιλία και το δεμένο δεσμός και αντίστοιχα για το μήκος της θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \kappa \frac{\lambda}{2}, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Παρατήρηση

Η διαταραχή που περιγράψαμε δεν αποτελεί κύμα, αφού η ενέργεια δεν διαδίδεται αλλήλα παραμένει εντοπισμένη μεταξύ των δεσμών. Για το λόγο αυτό έχει δοθεί στη διαταραχή αυτή το όνομα "στάσιμο κύμα". Επίσης, τα υλικά σημεία του μέσου δεν εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση όπως σε ένα οδεύον κύμα, αλλήλα ταλαντώνονται (με εξαίρεση τους δεσμούς) με την ίδια συχνότητα και διαφορετικό πλάτος. Επίσης από τα παραπάνω είναι προφανές ότι όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου διέρχονται από την θέση ισορροπίας τους κάθε $\Delta t = \frac{T}{2}$.

Τρέχον κύμα	Στάσιμο Κύμα
Όλα τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος	Το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου κυμαίνεται από μηδέν μέχρι και $2A$ και εξαρτάται από τη θέση τους
Έχουμε μεταφορά ενέργειας	Δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας
Έχει ορισμένη διεύθυνση διάδοσης	Δεν έχει διεύθυνση διάδοσης
Όλα τα υλικά σημεία του μέσου κάνουν ταλάντωση	Υπάρχουν σημεία του μέσου που παραμένουν συνέχεια ακίνητα
Τα υλικά σημεία του μέσου έχουν διαφορετικές φάσεις την ίδια χρονική στιγμή	Τα υλικά σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση. Τα υλικά σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού σε απόσταση μικρότερη από $\frac{\lambda}{2}$ από τον δεσμό έχουν διαφορά φάσης π
Τα υλικά σημεία του μέσου περνούν από τη θέση ισορροπίας τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	Τα υλικά σημεία του μέσου περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους.

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 11.1 - 11.36, 11.46 - 11.50, 11.52 - 11.59, 11.61, 11.63, 11.64, 1.66 - 11.69, 11.71, 11.72, 11.75 - 11.79, 11.81

2.6 Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Σε όλα τα άλλα υλικά διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα.

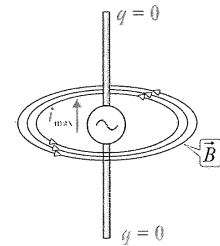
Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος εξαρτάται από την φύση του μέσου διάδοσης. Για το κενό η ταχύτητα του είναι $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Μηχανισμός παραγωγής

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ή ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτό σημαίνει ότι ούτε τα ακίνητα φορτία, ούτε τα φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα (σταθερά ρεύματα) μπορούν να δημιουργήσουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όταν, όμως, έχουμε ηλεκτρικά φορτία που επιταχύνονται, τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που δημιουργούν έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Επομένως:

Η αιτία δημιουργίας ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Μια απλή συσκευή παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι το **ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο**. Το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο είναι μια συσκευή που αποτελείται από δύο μεταλλικές ράβδους, οι οποίες συνδέονται με πηγή εναλυσσόμενης τάσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στην περίπτωση αυτή οι ράβδοι φορτίζονται εναλλάξ με θετικά και αρνητικά φορτία που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Η κίνηση αυτή των φορτίων αποτελεί εναλλασσόμενο ρεύμα. Τα ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα αποτελούν κοινή μέθοδο παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στους ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς.



Από τις εξισώσεις του *Maxwell* για το Ηλεκτρικό και το Μαγνητικό πεδίο προκύπτει ότι:

- Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο, με τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου να είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- Κάθε στιγμή ο λόγος των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι ίσος με την ταχύτητα διάδοσης v (για το κενό c)

$$\frac{E}{B} = v \quad (2.26)$$

- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως και τα μηχανικά, υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.

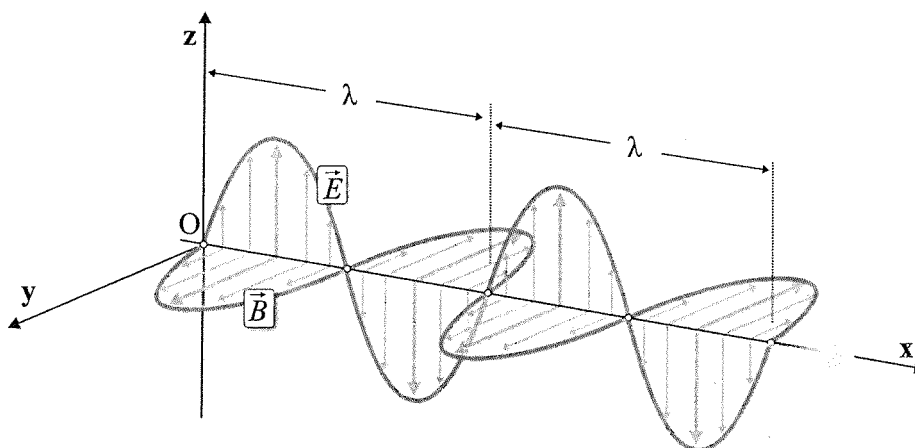
Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση x είναι:

$$E = E_{max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.27)$$

$$B = B_{max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.28)$$

όπου βέβαια E_{max}, B_{max} είναι οι μέγιστες τιμές της έντασης του Ηλεκτρικού και Μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα.

Το στιγμιότυπο ενός τέτοιου αρμονικού κύματος φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 2.10: Στιγμιότυπο επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, διαδιδόμενου κατά την διεύθυνση του άξονα x . Οι γραμμές του $\vec{B}$ είναι παράλληλες προς τον άξονα y και οι γραμμές του $\vec{E}$ είναι παράλληλες προς τον άξονα z

2.6.1 Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν παράγονται μόνο από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα. Σήμερα γνωρίζουμε ότι συνδέονται με ένα πλήθος φυσικών φαινομένων, όπως αποδιεγέρσεις ατόμων, πυρηνικές διασπάσεις κλπ. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα εύρος μηκών κύματος και συχνοτήτων που ανάλογα με τον μηχανισμό παραγωγής τους. Παρά τις τεράστιες διαφορές στην παραγωγή τους, όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν τα γενικά χαρακτηριστικά που περιγράψαμε.

Εφόσον όλα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα c η συχνότητα τους και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση:

$$c = \lambda \cdot f$$

που είναι η γνωστή μας **“Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής”** γραμμένη για την διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό.

Παρακάτω ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των διαφόρων περιοχών του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, κατά σειρά ελαττούμενου μήκους κύματος. Βέβαια δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός του κάθε τμήματος του φάσματος από τα υπόλοιπα.

- **Ραδιοκύματα.** Είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από $10^5 m$ έως μερικά εκατοστά. Δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως τα κυκλώματα $L - C$ και χρησιμοποιούνται στην ραδιοφωνία και την τηλεόραση.
- **Μικροκύματα.** Το μήκος κύματος τους εκτείνεται από $30 cm$ έως $1 mm$ περίπου. Παράγονται από ηλεκτρονικά κυκλώματα. Μικροκύματα χρησιμοποιούν όχι μόνο οι φούρνοι, αλλά και τα ραντάρ.
- **Υπέρυθρα κύματα.** Καλύπτουν την περιοχή από $1 mm$ έως $7 \cdot 10^{-5} m$ περίπου. Τα κύματα αυτά εκπέμπονται από τα θερμά σώματα και απορροφώνται εύκολα από τα περισσότερα υλικά. Η υπέρυθρη ακτινοβολία που απορροφάται από ένα σώμα, αυξάνει το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται, αυξάνοντας έτσι την θερμοκρασία του.
- **Το ορατό φως.** Είναι το μέρος εκείνο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανιχνεύει ο ανθρώπινος οφθαλμός. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από $400 nm$ - $700 nm$ ($1 nm = 10^{-9} m$). Το ορατό φως παράγεται από την ανακατανομή των ηλεκτρονίων στα άτομα και στα μόρια. Κάθε υποπεριοχή του ορατού φάσματος προκαλεί στον άνθρωπο την αίσθηση κάποιου συγκεκριμένου χρώματος. Τα μήκη κύματος των διάφορων χρωμάτων είναι:

700 έως 630 nm	Ερυθρό
630 έως 590 nm	Πορτοκαλί
590 έως 560 nm	Κίτρινο
560 έως 480 nm	Πράσινο
480 έως 440 nm	Κυανό
440 έως 400 nm	Ιώδες
- **Υπεριώδης ακτινοβολία.** Η ακτινοβολία αυτή καλύπτει τα μήκη κύματος από $3,8 \cdot 10^{-7} m$ έως $6 \cdot 10^{-8} m$ περίπου. Ο ήλιος είναι ισχυρή πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας. Οι υπεριώδεις ακτίνες είναι υπεύθυνες για το "μάυρισμα", όταν κάνουμε ηλιοθεραπεία το καλοκαίρι. Μεγάλες δόσεις βλάπτουν το ανθρώπινο οργανισμό. Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ακτινοβολίας απορροφάται από τα άτομα και τα μόρια της στρατόσφαιρας.
- **Οι ακτίνες X** είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από $10^{-8} m$ έως $10^{-13} m$ περίπου. Η πιο κοινή αιτία παραγωγής ακτίνων X είναι η επιβράδυνση ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων καθώς αυτά προσκρούουν σε μεταλλικό στόχο. Οι ακτίνες X χρησιμοποιούνται στην ιατρική, αλλά και στην μελέτη κρυσταλλικών δομών.

- **Οι ακτίνες γ.** Είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από ορισμένους ραδιενεργούς πυρήνες καθώς και σε αντιδράσεις πυρηνών και στοιχειωδών σωματιδίων ή ακόμα και κατά τη διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Τα μήκη κύματος τους αρχίζουν από $10^{-10}m$ έως τα $10^{-14}m$. Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν τους οργανισμούς που τις απορροφούν.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 12.1 - 12.16, 12.19 - 12.26

2.7 Ανάκλαση - Διάθλαση - Ολική Ανάκλαση

2.7.1 Ανάκλαση του φωτός

Όταν φως που διαδίδεται σε ένα μέσο συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια

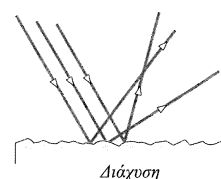
ανάμεσα στο μέσο αυτό και σε ένα άλλο, τότε ένα μέρος του επιστρέφει στο αρχικό μέσο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ανάκλαση**. Το φαινόμενο της ανάκλασης διακρίνεται α) σε Διάχυση και β) σε κατοπτρική ανάκλαση.

Στη περίπτωση που οι ακτίνες της φωτεινής παράλληλης δέσμης συναντήσουν μια τραχειά επιφάνεια, τότε ανακλώνται προς διάφορες κατευθύνσεις και διασκορπίζονται στον γύρω χώρο. Η ανάκλαση αυτή, στην οποία οι ανακλώμενες ακτίνες δεν είναι παράλληλες, ονομάζεται **διάχυση**. Εξαιτίας της διάχυσης γίνονται ορατά όλα τα σώματα που βρίσκονται γύρω μας.

Αν η επιφάνεια πάνω στην οποία προσπίπτει η δέσμη είναι λεία και στιλπνή (γυαλιστερή), τότε οι ανακλώμενες ακτίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους. Η ανάκλαση αυτή ονομάζεται **κατοπτρική ανάκλαση**. Στο εξής με τον όρο ανάκλαση θα εννοούμε την κατοπτρική ανάκλαση.



Έστω ότι μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει υπό γωνία πάνω σε μια λεία επιφάνεια και ανακλάται, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται **προσπίπτουσα ακτίνα** και η ακτίνα που ανακλάται ονομάζεται **ανακλώμενη ακτίνα**.



Η γωνία ανάμεσα στην προσπίπτουσα ακτίνα και την κάθετη στην επιφάνεια πρόσπτωσης ονομάζεται **γωνία πρόσπτωσης** (θ_{π}) και η γωνία ανάμεσα στην κάθετη στην επιφάνεια και την ανακλώμενη ακτίνα ονομάζεται **γωνία ανάκλασης** (θ_{α}). Πειραματικά προκύπτουν οι ακόλουθοι **νόμοι της ανάκλασης**:

- **Η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο της πρόσπτωσης βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (επίπεδο πρόσπτωσης)**
- **Η γωνία ανάκλασης θ_{α} είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης θ_{π}**

$$\theta_{\pi} = \theta_{\alpha} \quad (2.29)$$

2.7.2 Διάθλαση του φωτός

Όταν μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός που διαδίδεται σε ένα διαφανές μέσο συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο μέσο αυτό και σε ένα άλλο διαφανές μέσο, στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα, τότε ένα μέρος του αρχικού φωτός ανακλάται και το υπόλοιπο μέτος περνάει στο δεύτερο μέσο, αλλάζοντας διεύθυνση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διάθλαση. Επομένως:

Διάθλαση του φωτός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο, όταν μια μονοχρωματική ακτίνα συναντά τη διαχωριστική επιφάνεια δύο σοδαρών μέσων, περνάει από το πρώτο στο δεύτερο μέσο και αλλιάζει διεύθυνση διάδοσης.

Αιτία της διάθλασης είναι η διαφορετική ταχύτητα του φωτός στα δύο διαφανή μέσα.

Η ακτίνα φωτός που περνάει στο δεύτερο μέσο διάδοσης ονομάζεται **διαθλώμενη ακτίνα**. Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της διαθλώμενης ακτίνας με την κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης ονομάζεται **γωνία διάθλασης** (θ_δ).

Όπως είναι γνωστό, η ταχύτητα του φωτός σε όλα τα διαφανή μέσα είναι μικρότερη από την ταχύτητα του στο κενό. **Ο λόγος της ταχύτητας c του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα του v σε ένα διαφανές υλικό ονομάζεται δείκτης διάθλασης n του διαφανούς υλικού.** Δηλαδή:

$$n = \frac{c}{v}$$

Ο δείκτης διάθλασης είναι καθαρός αριθμός και για το κενό είναι ίσος εξ ορισμού με την μονάδα ($n = 1$) αφού για το κενό $v = c$. Για όλα τα διαφανή υλικά μέσα ο δείκτης διάθλασης είναι μεγαλύτερος της μονάδας ($n > 1$) αφού $c > v$ πάντα. Πειραματικά προκύπτουν οι ακόλουθοι **νόμοι της διάθλασης**:

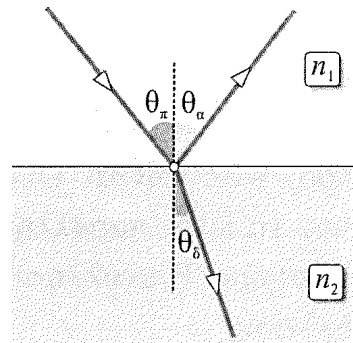
- **Η προσπίπτουσα ακτίνα, η διαθλώμενη ακτίνα και η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο διαφανών μέσων, στο σημείο πρόσπτωσης της ακτίνας, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.**
- **Όταν το φως είναι μονοχρωματικό, ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των δεικτών διάθλασης των δύο μεσων.** Δηλαδή:

$$\frac{\eta\mu\theta_\pi}{\eta\mu\theta_\delta} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1\eta\mu\theta_\pi = n_2\eta\mu\theta_\delta \quad (2.30)$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Νόμος του Snell (Σνέλ)**

Συμπεράσματα από το νόμο του Snell

- Όταν μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός διέρχεται από ένα αραιό διαφανές μέσο 1 (n_1) σε ένα πυκνό διαφανές μέσο 2 ($n_2 > n_1$), στο οποίο η ταχύτητα του



φωτός είναι μικρότερη, τότε η γωνία διάθλασης είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης ($\theta_\delta < \theta_\pi$).

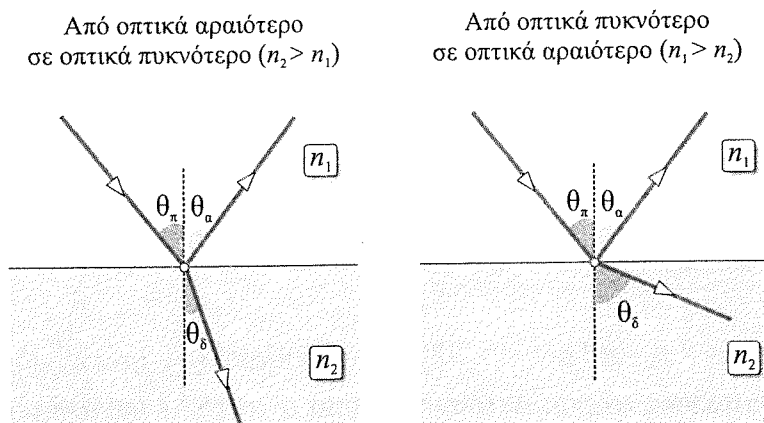
Απόδειξη :

$$\frac{\eta\mu\theta_\pi}{\eta\mu\theta_\delta} = \frac{n_2}{n_1} > 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_\pi > \eta\mu\theta_\delta \Rightarrow \theta_\pi > \theta_\delta$$

(β) Όταν μια μονοχρωματική δέσμη φωτός διέρχεται από ένα πυκνό μέσο 2 (n_2) σε ένα αραιό μέσο 1 ($n_1 < n_2$), τότε η γωνία διάθλασης είναι μεγαλύτερη από την γωνία πρόσπτωσης ($\theta_\delta > \theta_\pi$).

Απόδειξη :

$$\frac{\eta\mu\theta_\pi}{\eta\mu\theta_\delta} = \frac{n_2}{n_1} < 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_\pi < \eta\mu\theta_\delta \Rightarrow \theta_\pi < \theta_\delta$$



(γ) Όταν μια μονοχρωματική ακτίνα προσπίπτει κάθετα στην διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών μέσων, τότε η ακτίνα δεν αλλάζει διεύθυνση. **Απόδειξη :**

$$\frac{\eta\mu\theta_\pi}{\eta\mu\theta_\delta} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1\eta\mu\theta_\pi = n_2\eta\mu\theta_\delta \Rightarrow n_1\eta\mu 0 = n_2\eta\mu\theta_\delta \Rightarrow \eta\mu\theta_\delta = 0 \Rightarrow \theta_\delta = 0$$

Πώς μεταβάλλονται τα μεγέθη της Θεμελιώδους εξίσωσης της Κυματικής, όταν μονοχρωματικό φως διέρχεται από ένα οπτικό μέσο σε ένα άλλο .

Όταν μονοχρωματικό φως διέρχεται από ένα διαφανές μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο με δείκτη διάθλασης n_2 τότε :

- Η συχνότητα του φωτός f δεν αλλάζει, γιατί το φως είναι κύμα και ο αριθμός των κυμάτων που φτάνουν στην διαχωριστική επιφάνεια στην μονάδα του χρόνου πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που στον ίδιο χρόνο διέρχονται από αυτή. Η πηγή καθορίζει τον αριθμό των κυμάτων που παράγονται ανα μονάδα χρόνου.

- Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων v είναι διαφορετική στα δύο μέσα διάδοσης και εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης $v = \frac{c}{n}$. Όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης διάθλασης, τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητα διάδοσης.
- Αφού η συχνότητα f του φωτός μένει σταθερή και η ταχύτητα διάδοσης είναι διαφορετική στα δύο μέσα, από την σχέση $v = \lambda f$ προκύπτει ότι το μήκος κύματος θα είναι επίσης διαφορετικό στα δύο μέσα.

Όταν μια μονοχρωματική ακτινοβολία μεταβαίνει από το κενό (ή τον αέρα) σε κάποιο άηλο διαφανές μέσο, το μήκος κύματος της ακτινοβολίας μειώνεται.

Για το κενό $c = \lambda_0 f$, με το λ_0 να είναι το μήκος κύματος στο κενό.

Για ένα διαφανές μέσο $v = \lambda f$, με το λ να είναι το μήκος κύματος στο μέσο αυτό.

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατα μέλη προκύπτει.

$$\frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2.31)$$

Και αφού πάντα $n > 1$ τότε $\lambda_0 > \lambda$.

2.7.3 Ολική Εσωτερική Ανάκλαση

Το παρακάτω σχήμα δείχνει μερικές ακτίνες μονοχρωματικού φωτός που εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή, η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα διαφανές μέσο a με δείκτη διάθλασης n_a . Οι ακτίνες προσπίπτουν στην διαχωριστική επιφάνεια που χωρίζει το μέσο a με ένα δεύτερο μέσο b με δείκτη διάθλασης $n_b < n_a$.

Από τον Νόμο του *Snell* προκύπτει ότι:

$$\frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

Επειδή όμως $n_b < n_a$ προκύπτει ότι $\theta_b > \theta_a$.

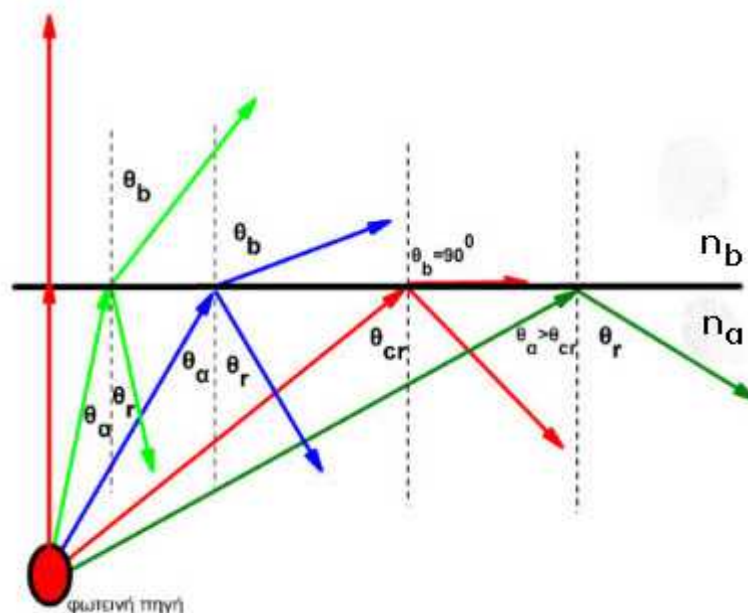
Σε αυτή την περίπτωση η γωνία διάθλασης θ_b είναι πάντα μεγαλύτερη από την γωνία πρόσπτωσης θ_a .

Η γωνία θ_a για την οποία η διαθλώμενη ακτίνα είναι παράλληλη προς την διαχωριστική επιφάνεια των δυο μέσων ονομάζεται **Κρίσιμη (ή οριακή) γωνία και συμβολίζεται με θ_{crit} .**

Για να υπολογίσουμε την Κρίσιμη γωνία χρησιμοποιούμε τον Νόμο του *Snell* για $\theta_b = 90^\circ$

$$\frac{\eta\mu\theta_{crit}}{\eta\mu 90^\circ} = \frac{n_b}{n_a} \Rightarrow \eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$$

Όταν η γωνία πρόσπτωσης γίνει μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία, δεν υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα και ολόκληρη η προσπίπτουσα ακτίνα ανακλάται πάνω στην



διαχωριστική επιφάνεια και "παγιδεύεται" στο μέσο a . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **Ολική εσωτερική ανάκλαση**.

Ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο, όταν μια φωτεινή ακτίνα, προερχόμενη από το μέσο με το μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, πέφτει πάνω σε μια διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών μέσων με γωνία μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνίας, ολόκληρη η ακτίνα ανακλάται πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια.

Προσοχή! Το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης συμβαίνει μόνο όταν φως μεταβαίνει από ένα πυκνό διαφανές μέσο σε ένα αραιό διαφανές μέσο και μόνο όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνίας.

Όταν το φως μεταβαίνει από ένα διαφανές μέσο a με δείκτη διάθλασης $n_a = n$ στο κενό (ή στον αέρα) $n_b = 1$ τότε η κρίσιμη γωνία για το διαφανές μέσο a θα είναι:

$$n \sin \theta_{crit} = 1 \quad (2.32)$$

Άρα προκύπτει ότι για οπτικό μέσο με μεγάλο δείκτη διάθλασης η κρίσιμη γωνία είναι γενικά μικρή. π.χ. για το γυαλί $\theta_{crit} = 41,1^\circ$, για το διαμάντι $\theta_{crit} = 24^\circ$. Η μικρή κρίσιμη γωνία είναι ο λόγος που το διαμάντι με πολλές έδρες (ακριβό κόσμημα) λαμποκοπά στο φως! Το μεγαλύτερο μέρος του φωτός που εισέρχεται στο διαμάντι εγκλωβίζεται λόγω της εσωτερικής ανάκλασης εκεί.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 13.1 - 13.50, 13.55 - 13.58, 13.60, 13.61, 13.62, 13.64, 13.65, 13.67, 13.68, 13.70 - 13.77, 13.79, 13.80, 13.81, 13.83, 13.84, 13.87, 13.88, 13.89

Κεφάλαιο 3

Μηχανική Στερεού Σώματος

3.1 Η κινηματική της κυκλικής κίνησης

Κυκλική Κίνηση

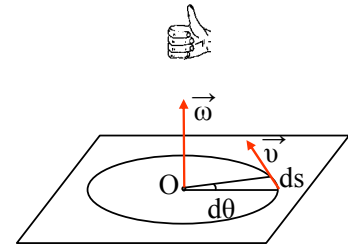
Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt διαγράφει μήκος τόξου ds που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $d\theta$.

Γραμμική Ταχύτητα

Ονομάζουμε γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t , ένα διάνυσμα, το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο του τόξου ds προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.1)$$

Η γραμμική ταχύτητα εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς στη θέση που βρίσκεται κάθε φορά το υλικό σημείο και έχει τη φορά της κίνησης του. Η μονάδα μέτρησης είναι το $1m/s$.



Γωνιακή Ταχύτητα

Ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του και μέτρο ίσο με το πηλίκο της γωνιάς $d\theta$ προς τον αντίστοιχο χρόνο dt .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2)$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το $1rad/s$.

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η επίκεντρη γωνία ορίζεται από την σχέση $\theta = \frac{s}{R}$. Από τον ορισμό της γωνιάς έχουμε:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = \omega \cdot R$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Στην κυκλική κίνηση λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του, το υλικό σημείο έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, της οποίας το μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (3.3)$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Η διεύθυνση της είναι πάντα κάθετη στην γραμμική ταχύτητα.

Ομαλή κυκλική κίνηση

Όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, οπότε προκύπτει:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t - 0} \Rightarrow \theta = \omega \cdot t$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το υλικό σημείο σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα.

Μεταβαλλόμενη κυκλική Κίνηση

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R . Αν υποθέσουμε ότι σε χρονικό διάστημα dt μεταβάλλεται η γραμμική ταχύτητα κατά $d\vec{v}$ και η γωνιακή ταχύτητα κατά $d\vec{\omega}$ τότε η κίνηση του είναι μια μεταβαλλόμενη κίνηση.

Γραμμική (ή επιτρόχια) επιτάχυνση

Λόγω της μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, το υλικό σημείο έχει γραμμική επιτάχυνση.

Ονομάζουμε γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\epsilon}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας.

$$\alpha_{\epsilon} = \frac{dv}{dt} \quad (3.4)$$

Η γραμμική επιτάχυνση εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς και έχει τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται και φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης, όταν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ελαττώνεται. Η μονάδα μέτρησης της γραμμικής επιτάχυνσης είναι το $1m/s^2$.

Το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\epsilon$ και της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ δίνει την συνισταμένη επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa$ του υλικού σημείου σε κάθε θέση της τροχιάς του. Το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης είναι ίσο με $\alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$

Γωνιακή Επιτάχυνση

Ονομάζουμε γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t ένα διάνυσμα, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \quad (3.5)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$. Μονάδα μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης είναι το 1rad/s^2 . Γωνιακή επιτάχυνση 1rad/s^2 σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι 1rad/s σε κάθε 1s .

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Η σχέση $v = \omega \cdot R$ μπορεί να γραφτεί:

$$dv = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση

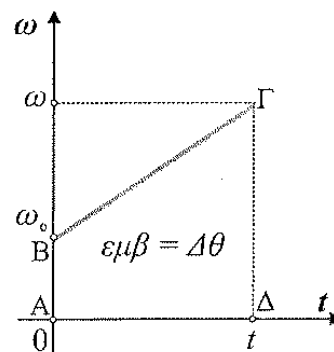
Όταν το μέτρο της επιτροχίας επιτάχυνσης παραμένει σταθερό, τότε η κίνηση του υλικού σημείου χαρακτηρίζεται ως **Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση**.

Στην κίνηση αυτή παραμένει επίσης σταθερό και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - 0}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (3.6)$$



Από το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας (ω) - χρόνου (t) μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την γωνιακή επιτάχυνση που είναι ίση με την κλίση της ευθείας $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

- την γωνία θ που διαγράφει το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι την στιγμή t με τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλύεται κάτω από την ευθεία. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (3.7)$$

Στην περίπτωση της ομαλά επιβραδυνόμενης στροφικής κίνησης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$) οι παραπάνω σχέσεις γράφονται: $\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}|t$ και $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t^2$.

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας αντιστοιχιών μεταξύ γραμμικών και στροφικών μεγεθών της κυκλικής κίνησης.

Γραμμικά μεγέθη	Γωνιακά μεγέθη
Μήκος τόξου s	γωνία στροφής θ
γραμμική ταχύτητα v	γωνιακή ταχύτητα ω
γραμμική επιτάχυνση $\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt}$	γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$
Ομαλή Κυκλική Κίνηση	
$s = vt$	$\theta = \omega t$
Ομαλά Επιταχυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 + \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$
Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κυκλική Κίνηση	
$v = v_0 - \alpha_\epsilon t$	$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t$
$s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$	$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$

3.2 Κινήσεις Στερών Σωμάτων

3.2.1 Υλικό σημείο και μηχανικό στερεό

Υλικά σημεία λέγονται τα σώματα που θεωρούμε ότι έχουν όλες τις άλητες ιδιότητες της ύλης, εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, αφού δεν έχει διαστάσεις, μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις. Τέτοιες κινήσεις έχουμε περιγράψει στην Φυσική της Α Λυκείου.

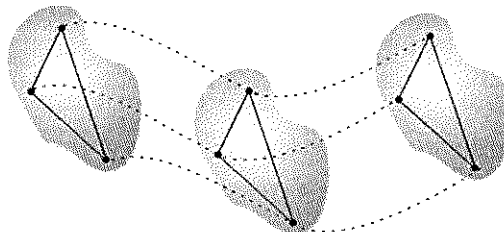
Μηχανικά Στερεά λέγονται τα σώματα που έχουν διαστάσεις, τις οποίες δεν μπορούμε να αγνοήσουμε και που δεν παραμορφώνονται όταν σε αυτά ασκούνται δυνάμεις. Ένα στερεό σώμα, αφού έχει διαστάσεις, εκτός από την μεταφορική κίνηση, μπορεί ακόμα να εκτελέσει περιστροφική (στροφική) κίνηση ή ακόμα και σύνθετη κίνηση (μεταφορική και περιστροφική).

Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων

Ένα στερεό μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική ή σύνθετη κίνηση.

Μεταφορική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει μεταφορική κίνηση, όταν κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν τη ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση.



Σχήμα 3.1: Μεταφορική κίνηση στερεού

Η μεταφορική κίνηση δεν είναι κατ'ανάγκη και ευθύγραμμη κίνηση, μπορεί να είναι και καμπυλόγραμμη αρκεί βέβαια να ισχύουν τα παρακάτω:

- οι τροχιές όλων των σημείων του σώματος να είναι παράλληλες
- το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του σώματος να μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Στροφική Κίνηση

Λέμε ότι ένα σώμα κάνει στροφική κίνηση, όταν αλληλάζει προσανατολισμό.

Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία (ο άξονας περιστροφής) που όλα τα σημεία της παραμένουν ακίνητα, ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση, σε επίπεδα κάθετα στον άξονα με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα. Ο άξονας περιστροφής δεν είναι απαραίτητο να διέρχεται από το σώμα. Η στροφική κίνηση δεν είναι κατ'ανάγκη κυκλική κίνηση. **Αφού κάθε υλικό σημείο του στερεού εκτελεί μια κυκλική κίνηση, θα ισχύει για αυτό η κινηματική περιγραφή των παραπάνω παραγράφων.** Άρα για την στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ποσότητες με τις οποίες περιγράψαμε την κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου.

Η έννοια του κέντρου μάζας

Με στόχο την απλοποίηση της μελέτης του στερεού σώματος εισάγουμε την έννοια του κέντρου μάζας του σώματος.

Κέντρο μάζας (cm) ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με την μάζα του σώματος, αν σ' αυτό ασκούνται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Στην ουσία η μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός στερεού σώματος, ανάγεται στη μελέτη της κίνησης του κέντρου μάζας του.

Η κίνηση του κέντρου μάζας ενός σώματος καθορίζεται από την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Σύμφωνα με τον **2ο Νόμο του Νεύτωνα** ισχύει ότι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \quad (3.8)$$

Στα ομογενή στερεά σώματα, τα οποία έχουν κέντρο συμμετρίας, το κέντρο μάζας τους συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας. Για παράδειγμα το κέντρο μάζας μιας ομογενούς σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας. Βέβαια το κέντρο μάζας μπορεί να βρίσκεται και σε σημείο έξω από το σώμα. Για παράδειγμα σε ένα ομογενή δακτύλιο το κέντρο μάζας είναι στο κέντρο Κ του δακτυλίου.

Σύνθετη Κίνηση

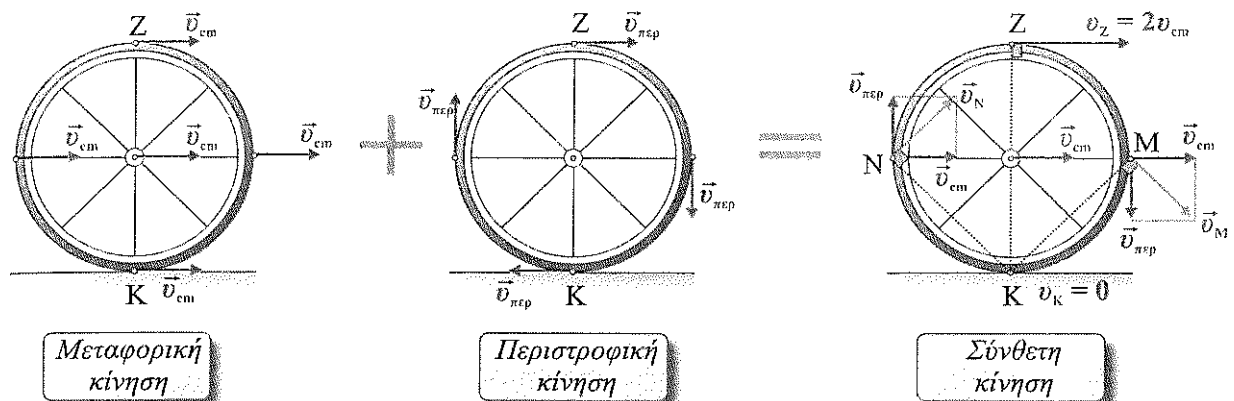
Λέμε ότι ένα σώμα κάνει σύνθετη κίνηση, όταν μετακινείται στον χώρο και ταυτόχρονα αλληλάζει ο προσανατολισμός του.

Για παράδειγμα σύνθετη κίνηση κάνει ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν αυτό είναι σε κίνηση. Ο τροχός στρέφεται γύρω από τον άξονα του και ταυτόχρονα συμμετέχει στην μεταφορική κίνηση του αυτοκινήτου.

Η σύνθετη κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της Επαλληλίας (συνθεσης) μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

Το παράδειγμα της κύλισης του τροχού

Παρακάτω βλέπουμε ένα τροχό που κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. **Ο τροχός μπορεί να κυλιέται χωρίς ολίσθηση, όταν δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο.**

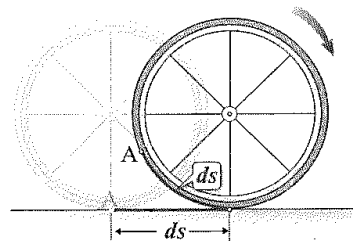


Η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας (συνθεσης):

- μιας μεταφορικής κίνησης, λόγω της οποίας τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$

- β. μιας στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα του, λόγω της οποίας όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες που είναι εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά και έχουν μέτρο v

Όταν ένας τροχός ακτίνας R κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει, τότε κάθε σημείο της περιφέρειας του έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι αν το κέντρο μάζας του τροχού έχει μετακινηθεί κατά διάστημα dx σε ένα χρονικό διάστημα dt , ένα σημείο της περιφέρειας θα έχει στραφεί κατά επίκεντρη γωνία $d\theta$, η οποία αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ds , στον ίδιο χρόνο. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, λόγω της μη ολίσθησης ($dx = ds$) και με βάση τον ορισμό της επίκεντρης γωνίας έχουμε:



$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta \Rightarrow dx = R \cdot d\theta$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η **1η Συνθήκη Κύλισης**, η οποία είναι αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

$$x = R \cdot \theta \quad (3.9)$$

Με βάση τον ορισμό της ταχύτητας του κέντρου μάζας ($v_{cm} = \frac{dx}{dt}$) και της γωνιακής ταχύτητας ($\omega = \frac{d\theta}{dt}$) προκύπτει ότι:

$$\frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \quad (3.10)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη για την κύλιση χωρίς ολίσθηση και είναι η **2η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $v = \omega \cdot R$ είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού προκύπτει ότι $v_{cm} = v$. Συμπεραίνουμε ότι:

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του.

Με βάση την 2η Συνθήκη Κύλισης μπορούμε να προχωρήσουμε στον **προσδιορισμό της ταχύτητας διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού**. Η ταχύτητα κάθε σημείου Σ της περιφέρειας προκύπτει από την "επαλληλία" των επιμέρους κινήσεων ($\vec{v}_{\Sigma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$). Από το παραπάνω σχήμα σύνθεσης των κινήσεων προκύπτουν:

- Η ταχύτητα του κέντρου Ο του τροχού είναι:

$$v_o = v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου Κ του τροχού είναι:

$$v_k = v_{cm} - v = 0$$

- Η ταχύτητα του σημείου Z του τροχού είναι:

$$v_z = v_{cm} + v = 2v_{cm}$$

- Η ταχύτητα του σημείου M του τροχού είναι:

$$v_M = \sqrt{v_{cm}^2 + v^2} = \sqrt{2}v_{cm}$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο τροχός κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει, είναι προφανές ότι τόσο η ταχύτητα του κέντρου μάζας, όσο και η γωνιακή ταχύτητα θα αυξάνονται. Έστω ότι σε χρόνο dt η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται κατά dv_{cm} και η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται κατά $d\omega$. Με βάση τον ορισμό της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας ($\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$) και της γωνιακής επιτάχυνσης ($\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$) έχουμε:

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow dv_{cm} = R \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3.11)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί επίσης αναγκαία συνθήκη, ώστε ο τροχός να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει και είναι η **3η Συνθήκη Κύλισης**. Επειδή $\alpha_{\epsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ είναι η επιτρίχιος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του τροχού, προκύπτει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\epsilon}$.

Κατά την κύλιση ενός τροχού, χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση, το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του είναι ίσο με το μέτρο της επιτρίχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του.

Η επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού είναι η συνισταμένη της επιτάχυνσης λόγω της μεταφορικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{cm}$), της γραμμικής επιτάχυνσης λόγω της στροφικής κίνησης ($\vec{\alpha}_{\epsilon}$) και της κεντρομόλου επιτάχυνσης ($\vec{\alpha}_{\kappa}$).

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.1 - 1.50, 1.55, 1.57, 1.58, 1.60, 1.61, 1.62, 1.65, 1.66, 1.69, 1.72, 1.75, 1.77, 1.86 - 1.92, 1.94, 1.97, 1.98, 1.100, 1.101, 1.102, 1.105

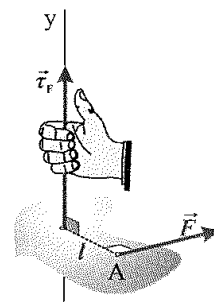
3.3 Ροπή Δύναμης - Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ροπή Δύναμης

Η ροπή δύναμης ($\vec{\tau}$) είναι το φυσικό μέγεθος που περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα.

α) Ροπή Δύναμης ως προς άξονα

Θεωρούμε ένα σώμα, το οποίο έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα zz' . Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$, η οποία



βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής και ο φορέας της απέχει από τον άξονα απόσταση l (μοχλοβραχίονας).

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής zz' , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- **διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής**
- **φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και**
- **μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή:**

$$\tau = F \cdot l \quad (3.12)$$

Στο διεθνές σύστημα μονάδων η **μονάδα μέτρησης** της ροπής δύναμης είναι το $1N \cdot m$.

Αν η δύναμη δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, αλλά σχηματίζει γωνία ϕ με αυτό, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα (F_x) πάνω σε επίπεδο κάθετο στον άξονα και μια συνιστώσα (F_y) παράλληλη προς τον άξονα. Η ροπή της δύναμης έχει μέτρο:

$$\tau = F_x \cdot l = Fl \sin \phi \quad (3.13)$$

Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα
- όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος προς τον άξονα.

Κατα σύμβαση θεωρούμε θετική την ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Η **συνολική ροπή** ($\Sigma\tau$) που δέχεται ένα σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, **είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών** των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος.

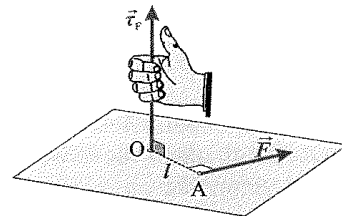
β)Ροπή Δύναμης ως προς σημείο

Αν σ' ένα σώμα ελεύθερο να κινηθεί ασκείται δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν, όμως, ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση: μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα

που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της δύναμης και το κέντρο μάζας. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Ονομάζουμε ροπή δύναμης ως προς σημείο O , το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το σημείο O
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την απόσταση l του σημείου O από το φορέα της δύναμης. Δηλαδή:



$$\tau = F \cdot l$$

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι **ίση με μηδέν**:

- όταν η δύναμη ασκείται στο σημείο αυτό ή
- όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο αυτό.

γ) Ροπή ζεύγους δυνάμεων

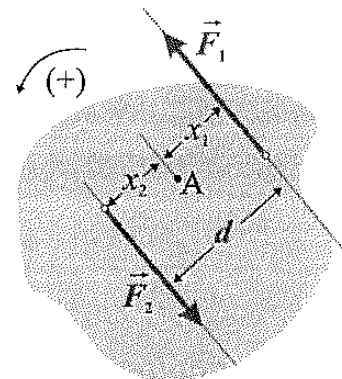
Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε ένα σύστημα δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος, είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα.

Στο διπλανό σχήμα, η αλγεβρική τιμή της ροπής τους ζεύγους, ως προς κάποιο σημείο A θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους ροπών των δύο δυνάμεων ($F_1 = F_2$):

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1 (x_1 + x_2) \Rightarrow \tau = F_1 d$$

Ονομάζουμε ροπή ζεύγους δυνάμεων το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δύο δυνάμεων,
- φορά την φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F_1 της μιας από τις δύο δυνάμεις επί τον βραχίονα d του ζεύγους. Δηλαδή:



$$\tau = F_1 \cdot d \quad (3.14)$$

Από τα παραπάνω είναι εύκολα κατανοητό ότι **η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους και ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.**

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.1 - 2.21, 2.58, 2.59, 2.60, 2.62, 2.63, 2.65, 2.67

Ισορροπία Στερεού Σώματος

Θεωρούμε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις. **Για να ισορροπεί θα πρέπει:**

- α) Η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (3.15)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην μεταφορική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($v = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την μεταφορική κίνηση (Φυσική Α Λυκείου).

- β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0 \quad (3.16)$$

Όταν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, η επιτάχυνση του σώματος στην στροφική κίνηση είναι μηδέν. Επομένως για αρχικά ακίνητο σώμα ($\omega = 0$), η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας για την στροφική κίνηση.

Στις ασκήσεις ισορροπίας στερεού ακολουθούμε γενικά τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο: Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο υπο μελέτη σώμα.

Η κατεύθυνση κάθε δύναμης καθορίζεται από το είδος της (π.χ. βάρος, κάθετη αντίδραση, τάση νήματος). Για τις δυνάμεις που δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση τους είναι χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση:

Όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών μη παράλληλων ομοεπίπεδων δυνάμεων, τότε οι φορείς των δυνάμεων αυτών πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Βήμα 2ο: Επιλέγουμε τους κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x και y και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτούς.

Βήμα 3ο: Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας ομοεπίπεδων δυνάμεων:

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma \tau = 0$$

Κατάλληλο σημείο για να εφαρμόσουμε την τρίτη συνθήκη είναι συνήθως, εκείνο από το οποίο διέρχεται ο φορέας μιας άγνωστης δύναμης. Στην περίπτωση αυτή επειδή η ροπή της είναι μηδέν, εξαφανίζεται από την εξίσωση που προκύπτει.

Βήμα 4ο: Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων που προκύπτει. Με την λύση του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε μέχρι τρία άγνωστα μεγέθη.

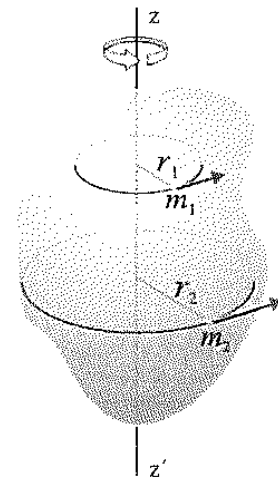
Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.22 - 2.55, 2.81, 2.82, 2.85, 2.87, 2.90 - 2.99, 2.102, 2.104, 2.105, 2.107, 2.108, 2.111, 2.113, 2.116, 2.118, 2.123.

3.4 Ροπή Αδράνειας

Έστω ένα στερεό σώμα, το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα $z'z$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους με ακτίνες $r_1, r_2, \dots, r_\nu$, αντίστοιχα.

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας I ενός στερεού ως προς τον άξονα $z'z$ το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής. Δηλαδή:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2 \quad (3.17)$$



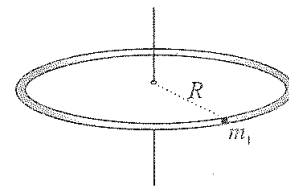
Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και στο σύστημα $S.I.$ έχει μονάδες μέτρησης το $1 kg \cdot m^2$.

Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας για ένα στερεό προκύπτει ότι η ροπή αδράνειας ενός υλικού σημείου με μάζα m , το οποίο κινείται κυκλικά σε κύκλο ακτίνας r , ως προς άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχίας και είναι κάθετος στο επίπεδο της δίνεται από τη σχέση:

$$I = mr^2 \quad (3.18)$$

Παράδειγμα: Ροπή Αδράνειας Ομογενούς δακτυλίου, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.

Χωρίζουμε το δακτύλιο σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$. Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = M$. Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R , όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε:



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2 = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots + m_\nu R^2$$

$$\Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \dots + m_\nu) R^2 \Rightarrow I = M R^2$$

Θεώρημα Στάινερ (Steiner)

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p του σώματος ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p , παράλληλο με τον πρώτο και σε απόσταση d από αυτόν υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα Παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Steiner**:

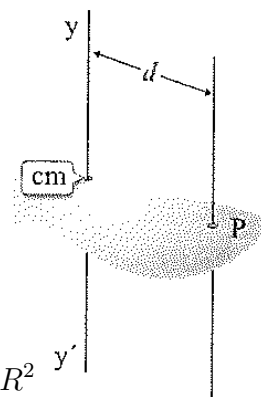
Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς έναν άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d . Δηλαδή:

$$I_p = I_{cm} + M d^2 \quad (3.19)$$

Παράδειγμα: Ροπή Αδράνειας Ομογενούς δακτυλίου, ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από σημείο της περιφέρειας του.

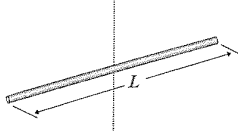
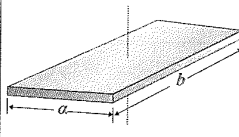
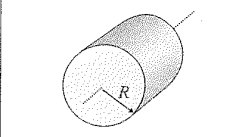
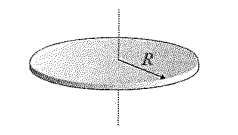
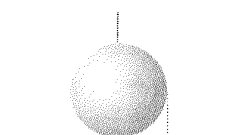
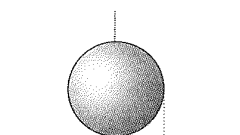
Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner έχουμε ότι:

$$I_p = I_{cm} + M d^2 \Rightarrow I_p = I_{cm} + M R^2 = M R^2 + M R^2 \Rightarrow I_p = 2 M R^2$$



Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι **η ροπή αδράνειας ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα εξαρτάται:**

- από την ολική μάζα του σώματος.
- από την κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, η οποία έχει να κάνει με το μέγεθος και το σχήμα του σώματος.
- από τη θέση του άξονα περιστροφής.

 Λεπτή ράβδος $I = \frac{1}{12} ML^2$	 Ορθογώνια πλάκα $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$	 Συμπαγής κύλινδρος $I = \frac{1}{2} MR^2$
 Δίσκος $I = \frac{1}{2} MR^2$	 Σφαιρικός φλοιός $I = \frac{2}{3} MR^2$	 Συμπαγής σφαίρα $I = \frac{2}{5} MR^2$

Σχήμα 3.2: οι ροπές αδράνειας μερικών σωμάτων ως προς ένα συγκεκριμένο άξονα για κάθε σώμα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

3.5 Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης

Όπως είναι γνωστό από την Φυσική της Α Λυκείου, στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, για να μεταβληθεί η ταχύτητα του, πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Η σχέση ανάμεσα στην **αιτία** (δύναμη) και το **αποτέλεσμα** (επιτάχυνση) είναι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.20)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **θεμελιώδης νόμος της μηχανικής**.

Ένας αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην **αιτία** (ροπή) και το **αποτέλεσμα** (γωνιακή επιτάχυνση) είναι:

$$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3.21)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.

Είναι προφανές ότι στην σχέση 3.21 το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών και η ροπή αδράνειας αναφέρονται στον ίδιο άξονα περιστροφής.

Φυσική Σημασία της Ροπής Αδράνειας

Είναι προφανές ότι από τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης και την εξίσωση 3.21 προκύπτει ότι η ροπή αδράνειας “παίζει” σημαντικό ρόλο στην μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας, καθώς η γωνιακή επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας.

Η ροπή αδράνειας εκφράζει στην περιστροφική κίνηση, ό,τι εκφράζει η μάζα στην μεταφορική κίνηση. Ποιό συγκεκριμένα:

- Η μάζα m εκφράζει στην μεταφορική κίνηση την αντίσταση που προβάλλει ένα σώμα σε κάθε μεταβολή της ταχύτητας του. Είναι δηλαδή το **μέτρο της αδράνειας στην μεταφορική κίνηση**.
- Η ροπή αδράνειας I εκφράζει στην περιστροφική κίνηση την αντίδραση που προβάλλει ένα στερεό σώμα σε κάθε μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας. Είναι δηλαδή το **μέτρο της αδράνειας στην στροφική κίνηση**.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αντίθετα με την μάζα ενός σώματος που είναι ένα σταθερό μέγεθος, η ροπή αδράνειας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη για ένα σώμα και εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής. **Ένα στερεό σώμα έχει μια μάζα, αλλά άπειρες ροπές αδράνειας.**

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 3.1 - 3.25, 3.27, 3.28, 3.29, 3.32, 3.33, 3.36, 3.38

Διερεύνηση της σχέσης $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$

- Θέτοντας στη σχέση αυτή $\Sigma \tau = 0$ παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$. Δηλαδή αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, τότε η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν και κατά συνέπεια η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι, αν το σώμα δεν στρέφεται ($\omega = 0$), θα εξακολουθήσει να μην στρέφεται, ενώ αν στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, θα εξακολουθήσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. (**Αρχή της Αδράνειας στην στροφική κίνηση**).
- Θέτοντας στη σχέση αυτή $\Sigma \tau = \text{σταθ.}$, παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \text{στάθ.}$ Αυτό σημαίνει ότι, αν σε ένα σώμα που έχει την δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκείται σταθερή συνισταμένη ροπή, το σώμα στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, δηλαδή εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση.

3.5.1 Εφαρμογή των Θεμελιωδών Νόμων στην κίνηση στερεού σώματος

Τα είδη των κινήσεων που μπορεί να εκτελέσει ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα που είναι ελεύθερο να κινηθεί, ανάλογα με τις συνθήκες που ισχύουν, δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau = 0$	Το σώμα ισορροπεί
$\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau = 0$	Το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας να είναι $\vec{a}_{cm}$
$\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau \neq 0$	Το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$
$\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau \neq 0$	Το σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση (επιταχυνόμενη μεταφορική με επιτάχυνση $\vec{a}_{cm}$ και επιταχυνόμενη στροφική γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$)

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.1 - 4.14, 4.52, 4.53, 4.55, 4.56, 4.57, 4.60, 4.63, 4.64, 4.66, 4.68, 4.69, 4.70

Ασκήσεις, όπου ένα στερεό (τροχαλία, κύλινδρος κλπ) εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερο άξονα:

- (α) με την επίδραση σταθερής εφαπτομενικής δύναμης.
- (β) με την ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση ενός άλλου σώματος μέσω σχοινιού.
- (γ) με την ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση δύο άλλων σωμάτων, μέσω σχοινιών.

Στις ασκήσεις αυτές, θεωρώντας ότι το περιστρεφόμενο στερεό είναι μια τροχαλία εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε προσεκτικά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα ή στα σώματα που εκτελούν μεταφορική κίνηση.
- Σχεδιάζουμε προσεκτικά τις δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία.
- Για κάθε σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση γράφουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma \vec{F} = m\alpha$$

- Αν χρειάζεται, για κάθε σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση γράφουμε τις εξισώσεις της κίνησης του:

$$v = v_0 + \alpha t, \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

- Για την τροχαλία γράφουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής της:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

- Αν χρειάζεται για την τροχαλία γράφουμε τις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\tau} t, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

- Επειδή δεχόμαστε πάντα ότι το σχοινί που περιβάλλει την τροχαλία δεν ολισθαίνει πάνω σε αυτήν, γράφουμε την **συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού**. Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή υποθέτουμε ότι αν το σώμα που αναρτάται στο σχοινί διανύει διάστημα x τότε η τροχαλία στρέφεται κατά τόξο μήκους $s = R\theta = x$. Άρα με την λογική που παρουσιάσαμε στην περίπτωση της κύλισης χωρίς ολίσθηση προκύπτει ότι η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας στα οποία εφάπτεται το σχοινί ταυτίζεται με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος που είναι δεμένο στο άκρο του σχοινιού:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$$

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει και βρίσκουμε τα ζητούμενα άγνωστα μεγέθη.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.74, 4.76 - 4.82, 4.84, 4.86 - 4.89, 4.91, 4.92, 4.93

Ασκήσεις όπου ένα στερεό εκτελεί ταυτόχρονα και μεταφορική και περιστροφική κίνηση - Κύλιση.

Στις ασκήσεις αυτές εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
- Αγνοώντας το γεγονός ότι το σώμα περιστρέφεται, εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{cm}$$

- Αγνοώντας το γεγονός ότι το σώμα μεταφέρεται, εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

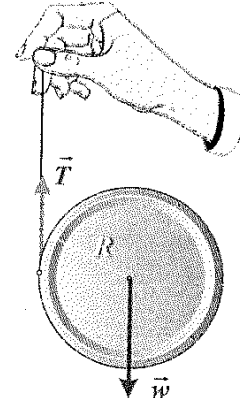
θεωρώντας ότι το σώμα απλά στρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

- Όταν οι δύο κινήσεις σχετίζονται μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στα σώματα που κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν ή στο «γινό-γινό», τότε οι επιταχύνσεις α_{cm} και $\alpha_{γων}$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$$

Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της περίπτωσης είναι:

Α. Το «γινό -γινό»: Αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, μάζας m και ακτίνας R που στο κυρτό μέρος του έχει τυλιχθεί πολλές φορές ένα σχοινί. Κρατώντας σταθερό το ελεύθερο άκρο του σχοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σχοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα. Θεωρούμε ότι το σχοινί παραμένει κατακόρυφο σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Η κατακόρυφη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εξασφαλίζεται από τις κατακόρυφες δυνάμεις του βάρους ($\vec{w}$) και της Τάσης ($\vec{T}$) του νήματος, ενώ η περιστροφική από την ροπή της Τάσης του νήματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:



Μεταφορική Κίνηση:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg - T = m\alpha_{cm}$$

Στροφική Κίνηση:

$$\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{γων} \Rightarrow TR = I_{cm}\alpha_{γων}$$

Συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R$$

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.109, 4.111, 4.113, 4.120, 4.124, 4.134, 4.138, 4.144, 4.146

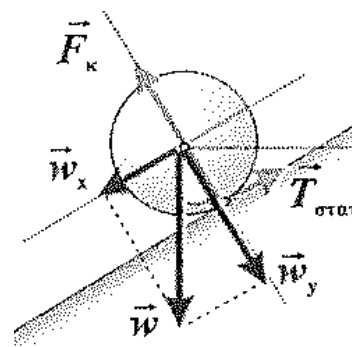
Β. Κύλιση κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο: Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο εξασφαλίζεται από την συνιστώσα του βάρους ($w_{\eta\mu\theta}$) και από την στατική τριβή ($T_{στ}$), ενώ η περιστροφική από την ροπή της στατικής τριβής ως προς τον άξονα περιστροφής που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Έχουμε:

Μεταφορική Κίνηση:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\theta - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm}$$

Στροφική Κίνηση:

$$\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$$



Συνθήκη μη ολίσθησης του σχοινιού

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$$

Ο ρόλλος της στατικής τριβής στην κύλιση

Ο ρόλος της στατικής τριβής είναι κατά κάποιο τρόπο ρυθμιστικός γιατί:

- από την μια ελαττώνει το μέτρο της επιτάχυνσης (α_{cm}) του κέντρου μάζας του κυλίνδρου που θα προκαλούσε μόνη της η συνιστώσα του βάρους, αφού είναι:

$$\alpha_{cm} = \frac{mg\eta\mu\theta - T_{\sigma\tau}}{m}$$

- από την άλλη προκαλεί, μέσω της ροπής της $T_{\sigma\tau}R$, γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, την οποία δεν μπορεί να δημιουργήσει η συνιστώσα του βάρους, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η εξισορρόπηση των μεγεθών α_{cm} και $\alpha_{\gamma\omega\nu}R$, που είναι η αναγκαία συνθήκη $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ για την κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Προφανώς, αν δεν υπήρχε η τριβή, τότε δεν θα υπήρχε και ροπή ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται.

Η φορά της στατικής τριβής

Η φορά της στατικής τριβής, η οποία είναι υπεύθυνη για την κύλιση, μπορεί να προσδιοριστεί, αρκεί να την σχετίσουμε με το αποτέλεσμα της, δηλαδή την αύξηση ή μείωση της γωνιακής ταχύτητας.

Όταν ο κύλινδρος κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα κάτω, το μέτρο της v_{cm} αυξάνεται και αυξάνεται και η γωνιακή ταχύτητα. Άρα η ροπή της στατικής τριβής θα πρέπει να αυξάνει την γωνιακή ταχύτητα, άρα να τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο κατά την φορά περιστροφής του.

Όταν ο κύλινδρος κυλίνεται σε πλάγιο επίπεδο προς τα πάνω, το μέτρο της v_{cm} μειώνεται και μειώνεται και η γωνιακή ταχύτητα. Άρα η ροπή της στατικής τριβής θα πρέπει να μειώνει την γωνιακή ταχύτητα, άρα να τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο αντίθετα από την φορά περιστροφής του.

Πότε ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς ταυτόχρονη ολίσθηση.

Στον κύλινδρο ασκούνται η δύναμη του βάρους ($\vec{w}$), η στατική τριβή ($\vec{T}_{\sigma\tau}$) και η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο ($\vec{N}$). Το μέτρο της στατικής τριβής καθορίζεται από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και μπορεί να πάρει τιμές στο παρακάτω διάστημα:

$$0 \leq T_{\sigma\tau} \leq \mu_s N$$

Όταν η στατική τριβή πάρει την μέγιστη τιμή της τότε αρχίζει η ολίσθηση του σώματος, άρα για να μην ολισθαίνει πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$T_{\sigma\tau} < \mu_s N$$

Όταν $T_{\sigma\tau} = \mu_s N$, τότε ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ολισθήσει. Στην περίπτωση της κύλισης με ταυτόχρονη ολίσθηση δεν ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης άρα $\alpha_{cm} \neq \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

Υπολογισμός του χρόνου κίνησης και του μέτρου της τελικής ταχύτητας κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο χωρίς ολίσθηση.

Όταν ένα στερεό μάζας M , ακτίνας R και ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του I_{cm} κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, υπολογίζονται εύκολα με τα ακόλουθα βήματα:

- Υπολογίζουμε την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας του σώματος από τις εξισώσεις: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm}$ $\Sigma \tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$ $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
- Υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης του στερεού από την εξίσωση κίνησης για την ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση: $x = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\alpha_{cm}}}$
- Υπολογίζουμε την τελική ταχύτητα του κυλίνδρου από την εξίσωση της ταχύτητας: $v_{cm} = \alpha_{cm}t \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2\alpha_{cm}x}$

Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.13 - 4.16, 4.19 - 4.44, 4.114, 4.116, 4.117, 4.119, 4.4.121, 4.122, 4.127, 4.129, 4.130, 4.131, 4.132, 4.136, 4.137, 4.141, 4.143

Γ. Σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση με μεταβλητή επιτάχυνση

Στην περίπτωση μιας ομογενούς ράβδου μάζας M , μήκους L και ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ που περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από το άκρο της O με την επίδραση του βάρους, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί.

Η γωνιακή επιτάχυνση **δεν είναι σταθερή** γιατί η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής δεν είναι σταθερή, κατά την διάρκεια της περιστροφής!

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης σε μια τυχαία θέση που η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο προκύπτει ότι:

$$\Sigma \tau_{(o)} = I_{(o)} \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

βέβαια δεν ξεχνάμε την εφαρμογή του **Θεωρήματος Steiner** για τον σωστό υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$I_{(o)} = I_{cm} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Η ροπή του βάρους μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\tau_{(o)} = Mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

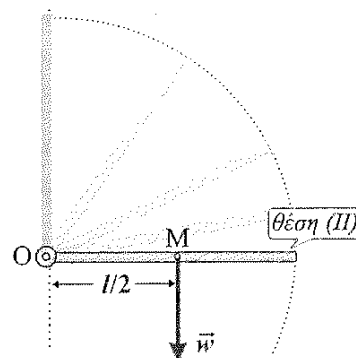
είναι προφανές ότι στην οριζόντια θέση της ράβδου ($\theta = 0$) η ροπή του βάρους είναι απλά $Mg \frac{L}{2}$

Άρα με βάση τα παραπάνω **η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί μόνο σε συγκεκριμένες θέσεις και χρονικές στιγμές και όχι για όλη την διάρκεια της κίνησης** και είναι ίση με:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3}{2L} \sin \theta$$

Προσοχή! σε αυτού του είδους την κίνηση δεν ισχύουν οι εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης στροφικής κίνησης. Ο υπολογισμός της γωνίας στροφής και της γωνιακής ταχύτητας μπορούν να γίνουν με την Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας που θα δούμε παρακάτω.

Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 4.150, 4.152, 4.153, 4.155, 4.156, 4.157, 4.158, 4.159, 4.161, 4.163



3.6 Στροφορμή-Διατήρηση Στροφορμής

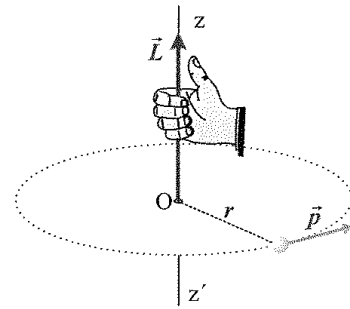
Στην Φυσική της Α Λυκείου, μελετώντας την μεταφορική κίνηση ενός υλικού σημείου γνωρίσαμε την έννοια της ορμής ($\vec{P}$). **Το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής για την στροφική κίνηση ενός στερεού, είναι η στροφορμή που την συμβολίζουμε με το σύμβολο $\vec{L}$.**

α) Στροφορμή Υλικού σημείου.

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r , έχοντας στιγμιαία ορμή $\vec{P}$, όπως στο σχημα.

Ονομάζουμε Στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς έναν άξονα zz' που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$ που έχει:

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου p της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς. Δηλαδή:



$$L = pr \Rightarrow L = mvr \quad (3.22)$$

Μονάδα μέτρησης της στροφορμής υλικού σημείου στο $S.I.$ είναι το $1kgm^2/s$.

Αν ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου, τότε η σχέση (3.22) γράφεται:

$$L = m(\omega r)r \Rightarrow L = mr^2\omega \quad (3.23)$$

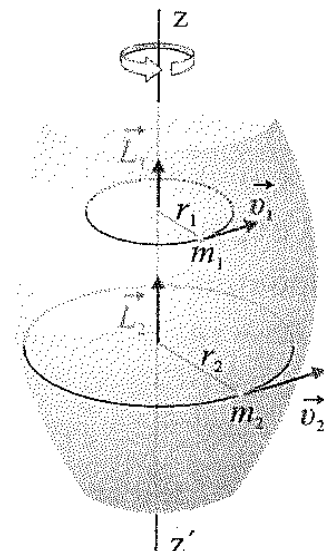
Ο τρόπος ορισμού της στροφορμής έχει "πολλά κοινά" με τον ορισμό της ροπής ($\tau = Fr$). Τα διανύσματα της στροφορμής και της ροπής έχουν την ίδια διεύθυνση και η φορά τους προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Άρα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι η κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{v}$), ακριβώς όπως και ο μοχλοβραχίονας μιας δύναμης στην περίπτωση της ροπής.

β) Στροφορμή Στερεού σώματος.

Ονομάζουμε στροφορμή ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα περιστροφής zz' , το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν, ως προς τον ίδιο άξονα.

Θεωρούμε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz' με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, τόσο μικρά που το καθένα μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Κατά την περιστροφή του σώματος, οι στοιχειώσεις αυτές μάζες διαγράφουν κυκλικές τροχές γύρω από τον άξονα zz' με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμικές ταχύτητες $v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, \dots, v_\nu = \omega r_\nu$.

Οι στροφορμές των στοιχειωδών μαζών του σώματος έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:



$$L_1 = m_1\omega r_1^2, \quad L_2 = m_2\omega r_2^2, \quad \dots \quad L_\nu = m_\nu\omega r_\nu^2$$

Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots + L_\nu \Rightarrow \\ L &= m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots + m_\nu \omega r_\nu^2 \Rightarrow \\ L &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2) \omega \Rightarrow \\ L &= I \omega \end{aligned}$$

όπου βέβαια $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2$ η ροπή αδράνειας του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής zz' . Επομένως:

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα είναι ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$, το οποίο έχει:

- διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα,
- φορά τη φορά που ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- μέτρο ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας I του στερεού, ως προς τον άξονα περιστροφής, επί το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας του στερεού. Δηλαδή:

$$L = I \omega \quad (3.24)$$

Η σύμβαση για την αλγεβρική τιμή της στροφορμής είναι η ίδια με εκείνη της ροπής. Έτσι θεωρούμε ως θετική την αλγεβρική τιμή της στροφορμής, ενός σώματος που στρέφεται αντίθετα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική όταν στρέφεται με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Το σπίν: Η περιστροφή που μπορεί να κάνει ένα σώμα γύρω άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του έχει στροφορμή που την ονομάζουμε "**σπίν**". Για παράδειγμα η γή έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονα της και τροχιακή στροφορμή λόγω της περιστροφής της γύρω από τον Ήλιο. Επίσης τα στοιχειώδη σωματίδια, όπως το ηλεκτρονιο έχουν σπιν συγκεκριμένου μέτρου που τα διακρίνει σε φερμιόνια και μποζονια (αλλά δεν μας αφορά σε αυτό το μάθημα).

γ) Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

Ονομάζουμε στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

Δηλαδή αν οι στροφορμές των σωμάτων που απαρτίζουν ένα σύστημα είναι $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_\nu$ τότε η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος είναι:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_\nu$$

Γενικότερη διατύπωση του Θεμελιώδη Νόμου της στροφικής κίνησης

Θεωρούμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι σταθερή και ότι σε απειροστό μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά $d\omega$, οπότε από την σχέση (3.24) προκύπτει:

$$L = I\omega \Rightarrow dL = Id\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$$

Άρα: Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Η παραπάνω διατύπωση είναι γενικότερη της $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$, γιατί ισχύει ακόμα και όταν η ροπή αδράνειας δεν είναι σταθερή.

Ο νόμος της στροφικής κίνησης σε σύστημα σωμάτων

Σε ένα σύστημα σωμάτων το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή εκείνων που οφείλονται σε εσωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται σε εσωτερικές δυνάμεις είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

όμως η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης - αντίδρασης, οπότε οι ροπές τους αλληλοαναιρούνται και έτσι σε ένα σύστημα σωμάτων ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης μπορεί να γραφτεί:

$$\Sigma\tau_{\epsilon\varsigma} = \frac{dL}{dt} \quad (3.25)$$

όπου βέβαια το $\Sigma\tau_{\epsilon\varsigma}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς κάποιο άξονα περιστροφής και L η στροφορμή του συστήματος, ως προς τον ίδιο άξονα.

Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.26 - 5.36, 5.60 - 5.63, 5.65, 5.67, 5.69, 5.70 - 5.72, 5.74, 5.76, 5.79, 5.83, 5.84, 5.86, 5.87

3.6.1 Διατήρηση της Στροφορμής

Αν στην γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης θέσουμε $\Sigma\tau = 0$ τότε:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Δηλαδή: **Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που δρουν σε ένα στερεό σώμα (ως προς κάποιο άξονα) είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος (ως προς τον ίδιο άξονα) παραμένει σταθερή.**

Για ένα σύστημα σωμάτων είναι προφανές ότι αν $\Sigma \tau_{\epsilon\zeta} = 0$ η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα παραμένει σταθερή.

Μεταβολή της ροπής αδράνειας και διατήρηση της στροφορμής

Θεωρούμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα περιστρεφόμενο σώμα είναι μηδέν. Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας μεταβληθεί η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του, τότε μεταβάλλεται και η γωνιακή του ταχύτητα, αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Δηλαδή:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \quad (3.26)$$

Αν το σώμα στρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο άξονα περιστροφής ή γύρω από ένα νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του τότε η παραπάνω σχέση είναι αλγεβρική.

Αν I_1 η αρχική ροπή αδράνειας και ω_1 η αρχική γωνιακή ταχύτητα του σώματος και I_2 η τελική ροπή αδράνειας και ω_2 η τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος τότε από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής προκύπτει:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι όταν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων, τότε μεταβάλλεται και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε γωνιακή επιτάχυνση ενός σώματος ακόμα και όταν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Το παράδειγμα του πατινάζ: Μια αθλήτρια του πατινάζ που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο, μπορεί συμπύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της να αυξήσει την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Λογικό γιατί αν θεωρήσουμε αμελητέες τις τριβές, τότε οι ροπή της μόνης εξωτερικής δύναμης που είναι το βάρος θα είναι μηδέν και η στροφορμή θα πρέπει να διατηρείται σταθερή, άρα αφού μειώνετε η ροπή αδράνειας θα αυξάνετε η γωνιακή ταχύτητα της.

Το παράδειγμα των "νεκρών" άστρων: Τα αστέρια στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 μέχρι 2,5 φορές την μάζα του ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τα αποθέματα ενέργειας τους, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας, με αποτέλεσμα η ακτίνα τους να είναι μόνο μερικές δεκάδες km . Επειδή η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων κατά την διαδικασία αυτή είναι μηδέν, η στροφορμή του αστεριού θα παραμένει σταθερή. Η δραματική μείωση της ροπής αδράνειας του αστεριού έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της γωνιακής του ταχύτητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας αστέρας νετρονίων έχει περίοδο περιστροφής $\frac{1}{3000}s$, με την περίοδο περιστροφής του ήλιου να είναι 25 μέρες.

Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 5.1 - 5.25, 5.37 - 5.49, 5.93, 5.95 - 5.99, 5.101, 5.102, 5.105, 5.107, 5.108, 5.109, 5.111, 5.112

3.7 Κινητική Ενέργεια και Έργο στην Στροφική Κίνηση

3.7.1 Κινητική Ενέργεια λόγω μεταφορικής Κίνησης

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας M που εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}$. Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ που λόγω της μεταφορικής κίνησης έχουν όλες την ίδια ταχύτητα $\vec{v}$. Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται. Δηλαδή:

$$K = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (3.27)$$

Η παραπάνω σχέση είναι προφανώς η γνωστή σχέση για την Κινητική Ενέργεια που μάθαμε στην Α Λυκείου, η οποία βέβαια αναφερόνταν στην μεταφορική κίνηση υλικού σημείου.

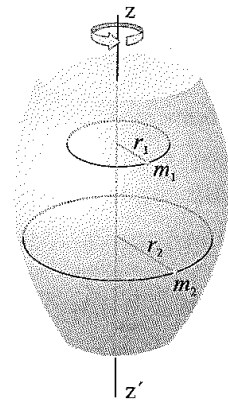
3.7.2 Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφής

Θεωρούμε ένα σώμα που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από άξονα zz' , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για να υπολογίσουμε την Κινητική Ενέργεια του σώματος, θα το χωρίσουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, οι οποίες απέχουν αποστάσεις $r_1, r_2, \dots, r_\nu$, αντίστοιχα από τον άξονα περιστροφής. Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και γραμμικές ταχύτητες με μέτρα $v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, \dots, v_\nu = \omega r_\nu$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu v^2 \Rightarrow \\ K &= \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_\nu\omega^2 r_\nu^2 \Rightarrow \\ K &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_\nu r_\nu^2)\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$



3.7.3 Κινητική Ενέργεια σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση

Αν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ και στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Η κινητική ενέργεια του σώματος αυτού θα είναι το άθροισμα των δύο κινητικών ενεργειών. Δηλαδή:

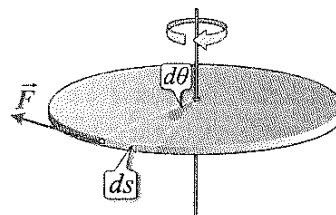
$$K = K_{μετ} + K_{περ} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (3.29)$$

όπου M η μάζα του σώματος και I_{cm} η ροπή αδράνειας του σώματος, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και έχει την ίδια διεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα.

3.7.4 Έργο κατά την στροφική κίνηση

Στην Φυσική Α Λυκείου μάθαμε ότι το έργο μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που μετακινεί το σημείο εφαρμογής κατά Δx υπολογίζεται από την σχέση $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το έργο μιας δύναμης που περιστρέφει ένα σώμα ως συνάρτηση της ροπής και της γωνίας στροφής.

Αν υποθέσουμε ότι σε ένα τροχό ακτίνας R , που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, ασκείτε μια εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου. Όταν ο τροχός στρέφεται κατά την απειροστά μικρή γωνία $d\theta$, τότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετατοπίζεται κατά το αντίστοιχο απειροστά μικρό μήκος $ds = R d\theta$. Επειδή η δύναμη και το απειροστό τόξο ds έχουν θεωρητικά την ίδια διεύθυνση μπορούμε να υπολογίσουμε το στοιχειώδες έργο από την σχέση:



$$W = F ds \Rightarrow dW = F R d\theta$$

Επειδή όμως $\tau = FR$ είναι το μέτρο της ροπής της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$dW = \tau d\theta \quad (3.30)$$

Όταν μια δύναμη περιστρέφει ένα σώμα κατά γωνία θ , τότε για να υπολογίσουμε το έργο W της δύναμης, χωρίζουμε την γωνία σε απειροστές γωνίες $d\theta$ και αθροίζουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα dW . Αν η ροπή της δύναμης έχει σταθερό μέγεθος ίσο με τ τότε το έργο της υπολογίζεται από την σχέση:

$$W = \tau \theta \quad (3.31)$$

Το έργο W μια ροπής μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Θετικό είναι όταν η ροπή έχει την ίδια φορά με την φορά περιστροφής του σώματος και αρνητικό όταν η ροπή έχει φορά αντίθετη από την φορά περιστροφής.

3.7.5 Ισχύς δύναμης στη στροφική κίνηση

Έστω ότι ένα σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση δέχεται την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$, της οποίας η ροπή ως προς άξονα περιστροφής του σώματος έχει μέτρο τ . Αν σε ένα απειροστά μικρό χρονικό διάστημα dt το σώμα περιστρέφεται κατά απειροστή γωνία $d\theta$, τότε η δύναμη παράγει έργο dW :

$$dW = \tau d\theta \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Είναι προφανές ότι ο ρυθμός μεταβολής του έργου $\frac{dW}{dt}$ είναι το μέγεθος της στιγμιαίας ισχύος (P) και βέβαια ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας στροφής είναι η γωνιακή ταχύτητα. Επομένως η ισχύς μιας δύναμης σε μια χρονική στιγμή t είναι:

$$P = \tau\omega \quad (3.32)$$

Στο *S.I.* η μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το $1Watt$. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην μεταφορική κίνηση η στιγμιαία ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$P = Fv.$$

Η μέση ισχύς $\bar{P}$ μιας δύναμης ή της ροπής μιας δύναμης ονομάζεται το πηλίκο του έργου ΔW , το οποίο παράγεται από την δύναμη ή τη ροπή της δύναμης σε χρόνο Δt , προς το χρόνο Δt .

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (3.33)$$

3.7.6 Θεώρημα Έργου- Ενέργειας στη στροφική κίνηση

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει ότι, όταν σε ένα σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκούνται εξωτερικές ροπές με $\Sigma\tau \neq 0$, τότε το σώμα αποκτά γωνιακή επιτάχυνση με αποτέλεσμα την μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας ω και κατά συνέπεια και της κινητικής ενέργειας περιστροφής της $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Η μεταβολή της Κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος είναι ίση με το έργο των δυνάμεων που οι ροπές τους προκαλούν την μεταβολή. Έτσι για την περίπτωση ενός στερεού σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το γνωστό μας από την Α Λυκείου **Θεώρημα Έργου - Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)** γράφεται:

$$K_2 - K_1 = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \Sigma W \quad (3.34)$$

Το έργο της στατικής τριβής κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση

Όπως έχουμε ξαναδει παραπάνω στο πρόβλημα της κύλισης χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο εμφανίζεται η δύναμη της στατικής τριβής στο σημείο επαφής του στερεού με το δάπεδο. **Το έργο της στατικής τριβής κατά την σύνθετη κίνηση του στερεού είναι ίσο με μηδέν.** Η στατική τριβή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο, έτσι έχει έργο μηδέν. Βέβαια η απάντηση δεν είναι τόσο προφανής όσο το σχολικό βιβλίο την εμφανίζει.

Αν θεωρήσουμε ότι σε χρόνο Δt το κέντρο μάζας του κυλίνδρου μετατοπίζεται κατά Δx πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ και ο κύλινδρος στρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κατά $\Delta\theta$, χωρίς ολίσθηση τότε ισχύει:

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

Το έργο της στατικής τριβής κατά την περιστροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής είναι ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφικής κίνησης σύμφωνα με το *Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στην στροφική κίνηση*. Άρα έχουμε:

$$\Delta K_{\pi\epsilon\rho} = \Sigma W = (T_{\sigma\tau} R) \Delta\theta$$

Το έργο της στατικής τριβής μαζί με το έργο του βάρους κατά την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της μεταφορικής κίνησης *Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στην μεταφορική κίνηση*. Άρα έχουμε:

$$\Delta K_{\mu\epsilon\tau} = \Sigma W = W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} \Delta x \Rightarrow \Delta K_{\mu\epsilon\tau} = \Sigma W = W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} R \Delta\theta$$

Η μεταβολή της Κινητικής ενέργειας λόγω της σύνθετης κίνησης προκύπτει από την σχέση:

$$\Delta K_{\pi\epsilon\rho} + \Delta K_{\mu\epsilon\tau} = T_{\sigma\tau} R \Delta\theta + W_x \Delta x - T_{\sigma\tau} R \Delta\theta \Rightarrow \Delta K = W_x \Delta x$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Το έργο της στατικής τριβής κατά τη στροφική κίνηση είναι αντίθετο με το έργο της ίδιας δύναμης κατά την μεταφορική κίνηση, στον ίδιο χρόνο Δt . Δηλαδή το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν.
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε την **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)**, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος που είναι μια συντηρητική δύναμη.

3.7.7 Η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Η Α.Δ.Μ.Ε. σε ένα σύστημα ή ένα σύστημα σωμάτων εφαρμόζεται όταν οι δυνάμεις που ασκούνται και παράγουν έργο είναι συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος, δύναμη ελατηρίου). Στην γενική περίπτωση που ένα στερεό εκτελεί σύνθετη κίνηση πρέπει:

$$E_{\mu\eta\chi} = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\pi\epsilon\rho} + U_{\beta\alpha\rho} = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\sigma \quad (3.35)$$

Βέβαια πριν την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης, πρέπει να επιλέξουμε ένα οριζόντιο επίπεδο ως επίπεδο αναφοράς ($U_{\beta\alpha\rho} = 0$). Συνήθως επιλέγουμε το χαμηλότερο σημείο από το οποίο διέρχεται το κέντρο μάζας κατά την κίνηση.

Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 6.1 - 6.62, 6.90, 6.92, 6.93, 6.114, 6.116, 6.117, 6.118, 6.120, 6.121, 6.122, 6.123, 6.124, 6.125, 6.127, 6.130, 6.131, 6.132, 6.133, 6.136, 6.137, 6.139, 6.141, 6.143, 6.144, 6.145, 6.148, 6.149, 6.152, 6.155, 6.161, 6.167, 6.171, 6.172, **6.146, 6.147, 6.153, 6.156, 6.159, 6.160, 6.163, 6.164, 6.165, 6.166, 6.170, 6.174**

Αντιστοίχιση μεγεθών και νόμων μεταξύ μεταφορικής και στροφικής κίνησης

Μεταφορική Κίνηση	Στροφική Κίνηση
Μετατόπιση: x	Γωνία στροφής: θ
Ταχύτητα: $v = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση: $a = \frac{dv}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha_{γων} = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη: $\vec{F}$	Ροπή Δύναμης: $\vec{\tau}$
Μάζα: m	Ροπή Αδράνειας: I
Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$	Θεμελιώδης Νόμος Στροφικής Κίνησης: $\Sigma \tau = I\alpha_{γων}$
Ορμή $\vec{P} = m\vec{v}$	Στροφορμή $L = I\omega$
$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της Ορμής: Αν $\Sigma \vec{F}_{εξ} = 0$, τότε: $\vec{P} = \text{σταθ.}$	Διατήρηση της Στροφορμής: Αν $\Sigma \tau_{εξ} = 0$, τότε: $L = \text{σταθ.}$
Έργο σταθερής δύναμης: $W = Fx$	Έργο σταθερής ροπής $W = \tau\theta$
Ισχύς δύναμης: $P = Fv$	Ισχύς ροπής: $P = \tau\omega$
Κινητική Ενέργεια μεταφοράς: $K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$	Κινητική Ενέργεια περιστροφής: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Θεώρημα Έργου - Ενέργειας στη μεταφορική κίνηση: $\Sigma W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	Θεώρημα Έργου Ενέργειας στη στροφική κίνηση: $\Sigma W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$

Είναι προφανές από τον παραπάνω πίνακα ότι με την μηχανική στερεού σώματος “ξαναγράψαμε” την μηχανική του υλικού σημείου που μελετήσαμε στην Α Λυκείου με μια νέα γλώσσα. Οι μαθηματικές σχέσεις δείχνουν μια απόλυτα “συμμετρική” εικόνα ανάμεσα στις δύο κινήσεις. Βέβαια αυτή την φορά έχουμε όλα τα “εργαλεία” για μια περισσότερο ρεαλιστική εικόνα της κίνησης σε σχέση με την μηχανική του υλικού σημείου.

Κεφάλαιο 4

Κρούσεις

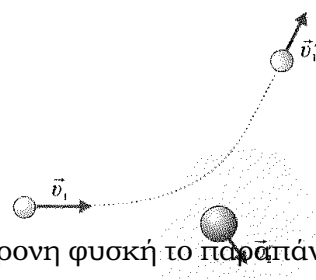
Στην μηχανική με τον όρο κρούση εννοούμε τη σύγκρουση δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σχετικά με το άλλο. Το φαινόμενο της κρούσης έχει δύο χαρακτηριστικά:

- Έχει πολύ μικρή χρονική διάρκεια.
- Κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων αναπτύσσονται πολύ ισχυρές δυνάμεις, ισχυρότερες από όλες τις άλλες που μπορεί να ασκούνται στα σώματα (π.χ. βαρύτητα). Οι δυνάμεις αυτές έχουν σχέση "δράσης - αντίδρασης" και το μέτρο τους μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της κρούσης.

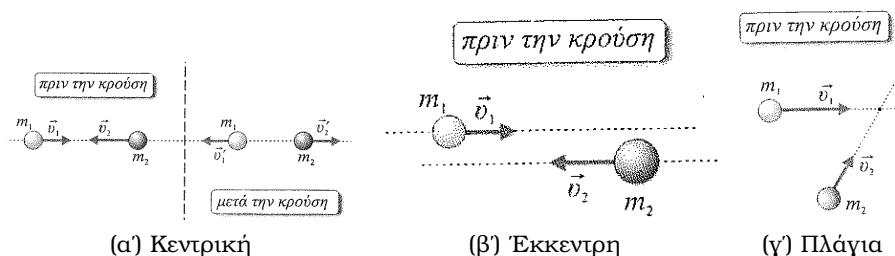
Στην ατομική και πυρηνική φυσική η έννοια της κρούσης επεκτείνεται, ώστε να περιλαμβάνει και την αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίων τα οποία δεν έρχονται σε επαφή.

Για παράδειγμα η εκτόξευση ενός ηλεκτρονίου προς ένα φορτισμένο σωματίδιο, έχει ως αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή της κινητικής κατάστασης των σωματιδίων, τα οποία αν και δεν έρχονται σε επαφή, εμφανίζουν τα χαρακτηριστικά της κρούσης.

Ονομάζουμε κρούση κάθε φαινόμενο και του μικρόκοσμου, στο οποίο δύο σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Στην σύγχρονη φυσική το παρόμοιο φαινόμενο ονομάζεται και **σκέδαση**.



4.1 Τα είδη της κρούσης, ανάλογα με την διεύθυνση κίνησης των σωμάτων πριν συγκρουστούν.



- **Κεντρική ή μετωπική κρούση** ονομάζεται η κρούση, στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.

- **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλα μεταξύ τους.
- **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή κατά την διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα σώματα ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν θεωρούμε το σύστημα των σωμάτων **μονωμένο**. Άρα:

$$\Sigma \vec{F}_{\epsilon\varsigma} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \vec{P}_{o\lambda(\pi\rho\nu)} = \vec{P}_{o\lambda(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά την διάρκεια της κρούσης διατηρείται.

4.2 Τα είδη της κρούσης ανάλογα με την διατήρηση της κινητικής ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων.

Σε αντίθεση με την Ορμή που παραμένει σταθερή σε όλες τις περιπτώσεις κρούσεων που θα μελετήσουμε, δεν συμβαίνει το ίδιο με την μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων. Σε κάθε κρούση υπάρχουν δύο βασικά στάδια:

Στο πρώτο στάδιο τα σώματα έρχονται σε επαφή μεταξύ τους και αρχίζουν να παραμορφώνονται, μέχρι να αποκτήσουν κοινή στιγμιαία ταχύτητα. Η απαιτούμενη ενέργεια για την παραμόρφωση τους προέρχεται από την αρχική τους μηχανική ενέργεια. Επειδή η κρούση γίνεται σε μικρό χρονικό διάστημα, θεωρούμε ότι τα σώματα δεν αλλάζουν θέση, άρα δεν μεταβάλλεται η Βαρυτική δυναμική τους ενέργεια, παρά μόνο η κινητική τους.

Στο δεύτερο στάδιο, ανάλογα με την φύση των σωμάτων που παραμορφώνονται η κρούση διακρίνεται σε ελαστική ή σε ανελαστική.

Ελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση εξαφανίζεται και το σύστημα αποκτά πάλι την κινητική ενέργεια που είχε πριν την κρούση. Η αιτία είναι οι φύση των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα κατά την διάρκεια της κρούσης, καθώς είναι ελαστικές δυνάμεις δεν προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή ονομάζεται ελαστική**

Η διατύπωση της Διατήρησης της Κινητικής ενέργειας κατά την ελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{o\lambda(\pi\rho\nu)} = K_{o\lambda(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ελαστική κρούση είναι ιδανική περίπτωση, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ελαστικές τις κρούσεις ανάμεσα σε σκληρά σώματα (π.χ. μπάλες μπιλιάρδου). Στην περίπτωση όμως του μικρόκοσμου οι κρούσεις (σκεδάσεις) είναι απόλυτα ελαστικές.

Ανελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση των σωμάτων δεν εξαφανίζεται τελείως και ένα μέρος της αρχικής Κινητικής ενέργειας που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση δεν γίνεται πάλι Κινητική ενέργεια, αλλά θερμότητα ή ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης. Η αιτία είναι πάλι η φύση των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα, καθώς είναι δυνάμεις που προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία μέρος της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα ονομάζεται ανελαστική κρούση**

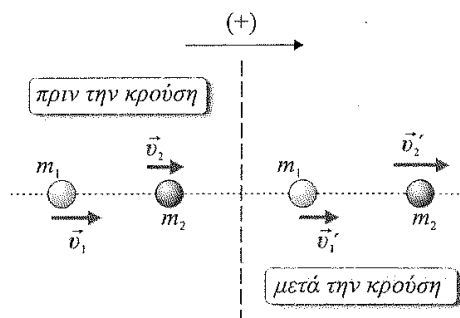
Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη κατά την οποία τα σώματα μετά την κρούση γίνονται συσσωμάτωμα και κινούνται με κοινή ταχύτητα. Η κρούση αυτή λέγεται **πλαστική** και έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου. Η διατύπωση της διατήρησης της ενέργειας κατά την ανελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{ολ(πριν)} - E_{απωλ} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετα)}$$

όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι ενεργειακές απώλειες σε θερμότητα και ανελαστικές παραμορφώσεις.

4.2.1 Η κεντρική Ελαστική κρούση

Θεωρούμε δύο υλικά Σώματα με μάζες m_1 και m_2 , που κινούνται σε οριζόντιο λείο επίπεδο με ταχύτητας $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση αποκτούν νέες ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$, τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε. Ο υπολογισμός είναι απλός αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις βασικές ιδέες - αρχές που αναπτύχθηκαν παραπάνω.



Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (4.1)$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (4.2)$$

Η εξίσωση (4.1) γράφεται:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Η εξίσωση (4.2) γράφεται:

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$$

Διαιρούμε κατα μέλη τις παραπάνω σχέσεις:

$$\frac{v_1 - v'_1}{v_1^2 - v'^2_1} = \frac{v'_2 - v_2}{v'^2_2 - v_2^2}$$

και προκύπτει εύκολα ότι $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$

Αντικαθιστώντας στην (4.1) και λύνοντας ως προς v'_1 βρίσκουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \quad (4.3)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \quad (4.4)$$

Βέβαια κατά τον υπολογισμό μας υποθέσαμε μια συγκεκριμένη φορά για τις ταχύτητες πριν και μετά την κρούση, είναι προφανές ότι σε περίπτωση αντίθετης φοράς από την παραπάνω οι σχέσεις μας οδηγούν σε αρνητικές τιμές για τις ταχύτητες. **Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τόσο εύκολο να απομνημονευτούν, αλλά είναι ευκολότερο να αποδειχθούν από τις βασικές αρχές!**

Ειδικές περιπτώσεις

α. **Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζας** $m_1 = m_2 = m$

Από τις παραπάνω σχέσεις (4.3),(4.4) με αντικατάσταση των μαζών προκύπτει:

$$v'_1 = v_2 \quad \text{και} \quad v'_2 = v_1$$

Δηλαδή, **κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που έχουν ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητες τους.**

Βέβαια στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε αν ξεκινήσουμε από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Διατήρηση της Ενέργειας, όπως κάναμε παραπάνω.

β. **Το ένα σώμα είναι ακίνητο πριν την κρούση** ($v_2 = 0$) Από τις σχέσεις (4.3),(4.4) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad (4.5)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4.6)$$

Βέβαια στην περίπτωση που έχουν και ίσες μάζες και το ένα σώμα είναι ακίνητο, τότε το αρχικά κινούμενο σταματάει μετά την κρούση ($v'_1 = 0$) και το αρχικά ακίνητο σώμα αποκτά ταχύτητα $v'_2 = v_1$

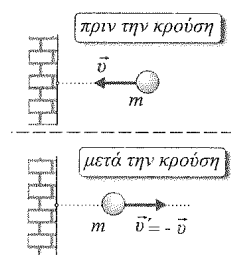
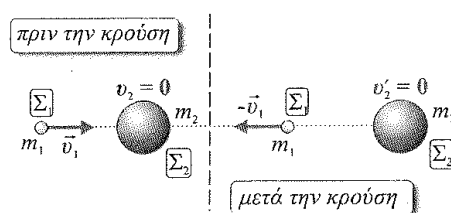
Ελαστική Κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας

Αν το ένα σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα σε σχέση με το άλλο ($m_1 \ll m_2$) και είναι ακίνητο πριν την κρούση ($v_2 = 0$) τότε:

$$m_1 \ll m_2 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \cong 0.$$

άρα οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν:

$$v'_1 \cong -v_1 \quad \text{και} \quad v'_2 \cong 0$$



Δηλαδή: **ένα σώμα μικρής μάζας που συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας αντανakλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας μένει πρακτικά ακίνητο.**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν ένα σώμα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή σε ένα δάπεδο, τότε ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς.

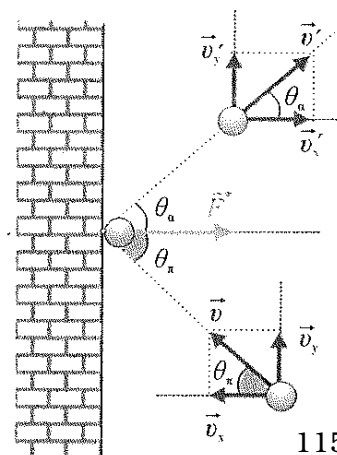
Αν το σώμα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε ένα τοίχο με ταχύτητα v , αναλύουμε την ταχύτητα του σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη στον τοίχο και μια παράλληλη σε αυτόν, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη συνιστώσα στον τοίχο θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($v'_x = -v_x$). Η παράλληλη στον τοίχο συνιστώσα δεν μεταβάλλεται ($v'_y = v_y$). Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση v' θα είναι $v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}$.

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό:

$$v' = v$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε βέβαια και με την Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας κατά την κρούση.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow v' = v$$



Αν θ_{pi} και θ_α οι γωνίες που σχηματίζουν με την κάθετη στον τοίχο οι ταχύτητες του σώματος πριν και μετά την κρούση τότε ισχύει:

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{v_y}{v} \quad \sigma\upsilon\nu\theta_\alpha = \frac{v'_y}{v'}$$

επειδή $v_y = v'_y$ και $v = v'$ προκύπτει ότι η γωνία πρόσπτωσης στον τοίχο είναι ίση με την γωνία ανάκλασης από αυτόν.

$$\theta_\pi = \theta_\alpha \quad (4.7)$$

Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με την νόμο της ανάκλασης για το φως που προσπίπτει πάνω σε ένα καθρέπτη. Απόλυτα συμβατό βέβαια με την σωματιδιακή φύση του φωτός, αρκεί να φανταστούμε ότι τα φωτόνια συμπεριφέρονται ως σωματίδια και ανακλώνται όπως το παραπάνω σωματίδιο.

4.2.2 Η Κεντρική Ανελαστική κρούση

Θεωρούμε τώρα δύο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$.

Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Ενέργειας

$$K_{ολ(πριν)} - E_{απωλ} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - E_{απωλ} = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι απώλειες λόγω των ανελαστικών φαινομένων. Αν μετά την κρούση τα δύο σώματα δημιουργήσουν ένα συσσωμάτωμα που έχει μια ταχύτητα $\vec{V}$, η ανελαστική κρούση ονομάζεται **Πλαστική**. Σε μια πλαστική κρούση είναι επίσης προφανές ότι έχουμε απώλειες της ενέργειας σε ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης και θερμότητα. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου.

4.2.3 Η Πλάγια ελαστική κρούση

Στην περίπτωση που τα σώματα δεν συγκρούονται κεντρικά, αλλά έκκεντρα ή πλάγια τότε θα αποκτήσουν νέες ταχύτητες με διευθύνσεις πάνω στο επίπεδο. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα δυο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 με το δεύτερο να είναι αρχικά ακίνητο. Μετά την κρούση τα σώματα θα κινηθούν με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$. Αναλύουμε τις ταχύτητες σε κατάλληλες συνιστώσες και προχωράμε στην εφαρμογή των βασικών αρχών.

Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $x'Ox$

$$P_{ολ(πρην)}(x) = P_{ολ(μετα)}(x) \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $y'Oy$

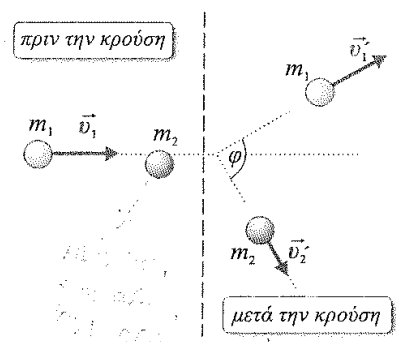
$$P_{ολ(πρην)}(y) = P_{ολ(μετα)}(y) \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1y} - m_2 v'_{2y}$$

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων, αλλά με 4 αγνώστους καθώς είναι άγνωστη η κατεύθυνση και το μέτρο των ταχυτήτων μετά την κρούση. Μπορούμε βέβαια να λύσουμε το πρόβλημα εφόσον μας είναι γνωστό ένα ακόμα μέγεθος (για παράδειγμα μια γωνία).

Το πρόβλημα της πλάγιας πλαστικής κρούσης λύνεται πάλι με την διατήρηση της ορμής σε κάθε άξονα. Δεν ξεχνάμε βέβαια ότι σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.



4.3 Δυναμική Ενέργεια μέγιστης ελαστικής παραμόρφωσης

Όταν τα δύο σημειακά σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, τότε κάποια στιγμή t , κατά την διάρκεια της επαφής τους, οι ταχύτητες των δύο σφαιρών γίνονται ίσες (κατά μέτρο και κατεύθυνση) και η παραμόρφωση των σωμάτων είναι η μέγιστη δυνατή.

Αν υποθέσουμε ότι η κοινή ταχύτητα τους είναι η $\vec{V}$ τότε ονομάζουμε U_{max} την μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης τους. Για να την υπολογίσουμε αρκεί να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για την χρονική στιγμή αυτή.

Από την διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{P}_{ολ(πρην)} = \vec{P}_{ολ(t)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(t)} + U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + U_{max}$$

Άρα υπολογίζω την U_{max} η οποία στην συνέχεια θα μετατραπεί πάλι σε Κινητική Ενέργεια καθώς στην ελαστική κρούση η Κινητική Ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου**
τις ακόλουθες ασκήσεις: 8.1 - 8.76, 8.102, 8.103, 8.104, 8.106, 8.118, 8.119,
8.121, 8.126, 8.127, 8.130, 8.131, 8.133, 8.134, 8.136, 8.139, 8.143, 8.144, 8.146,
8.149, 8.151, 8.154, 8.156, 8.164, 8.168, 8.170, 8.173, 8.174

Κεφάλαιο 5

Φαινόμενο Ντόμπλερ(*Doppler*)

Στεκόμαστε ακίνητοι στην αποβάθρα ενός σταθμού. Ένα τραίνο με ανοικτή τη σειρήνα του, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μας πλησιάζει και στη συνέχεια μας προσπερνά. Όλοι μας έχουμε παρατηρήσει ότι ο ήχος που αντιλαμβανόμαστε κατά την διάρκεια της κίνησης του τραίνου δεν είναι ο ίδιος.

Πιο συγκεκριμένα, καθώς το τραίνο μας πλησιάζει ο ήχος της σειρήνας είναι οξύτερος από ό,τι όταν το τραίνο απομακρύνεται από εμάς, αφού μας έχει προσπεράσει. Η οξύτητα ενός ήχου εκφράζεται "αντικειμενικά" με την συχνότητα. Όσο μεγαλύτερη η οξύτητα του ήχου τόσο μεγαλύτερη και η συχνότητα του. Αν βέβαια ρωτούσαμε τον μηχανοδηγό για το ύψος του ήχου που αντιλαμβάνεται κατά την κίνηση του τριανου, θα μας απαντούσε ότι ακούει σταθερό ήχο.

Από τις παραπάνω εύκολα μετρήσιμες διαπιστώσεις οδηγούμαστε στην ακόλουθη διατύπωση για το φαινόμενο *Doppler*:

Φαινόμενο *Doppler* λέγεται το φαινόμενο κατά το οποίο, όταν ένας παρατηρητής και μία πηγή κυμάτων βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε η συχνότητα του κύματος που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται δεν είναι ίδια με την συχνότητα που η πηγή εκπέμπει.

Το φαινόμενο παρατηρείται σε όλα τα αρμονικά κύματα, τόσο στα μηχανικά, όσο και στα ηλεκτρομαγνητικά.

Για την μελέτη του φαινομένου θα συμβολίζουμε με S την πηγή, f_S την συχνότητα της πηγής, $\vec{v}_S$ την ταχύτητα της πηγής. Επίσης θα συμβολίζουμε με A τον παρατηρητή, f_A την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής και $\vec{v}_A$ την ταχύτητα του παρατηρητή. Ως θετική φορά των ταχυτήτων $\vec{v}_S$, $\vec{v}_A$ θα θεωρούμε την φορά από την πηγή προς τον παρατηρητή.

Τέλος δεχόμαστε ότι ο αέρας, που αποτελεί το μέσον διάδοσης των ηχητικών κυμάτων, είναι ακίνητος. Οι ταχύτητες $\vec{v}_S$ και $\vec{v}_A$ είναι υπολογισμένες σε σχέση με τον αέρα. Επίσης η ταχύτητα v με την οποία διαδίδεται ο ήχος στον αέρα είναι σταθερή και η φορά της θεωρείται πάντα θετική.

5.1 Ακίνητη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής

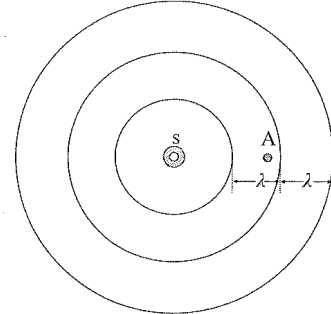
Θεωρούμε μια ακίνητη ως προς το μέσο διάδοσης πηγή S που εκπέμπει προς όλες τις κατευθύνσεις ήχο συχνότητας f_S . Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα v και έχουν μήκος κύματος λ , τα οποία συνδέονται με την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$v = \lambda f_S \Rightarrow f_S = \frac{v}{\lambda}$$

Στο σχήμα βλέπουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος. Οι ομόκεντροι κύκλοι παριστάνουν τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος σε μια χρονική στιγμή. Είναι σαφές ότι δύο μέγιστα απέχουν μεταξύ τους απόσταση λ . Ένας παρατηρητής Α, ο οποίος είναι επίσης ακίνητος ως προς τον αέρα, υπολογίζει συχνότητα ήχου f_A , μετρώντας τα μέγιστα που φτάνουν σε αυτόν ανα μονάδα χρόνου. Όμως στην μονάδα του χρόνου, όσα μέγιστα παράγει η πηγή, τόσα μέγιστα φτάνουν στον παρατηρητή, άρα θα αντιλαμβάνεται την ίδια συχνότητα με εκείνη που η πηγή εκπέμπει.

$$f_A = f_S = \frac{v}{\lambda}$$

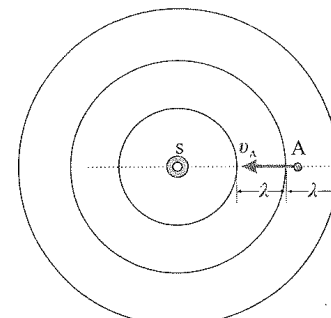
Άρα στην περίπτωση που δεν υπάρχει σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή δεν παρατηρούμε αλλαγή στην συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται!



5.2 Ακίνητη πηγή - Κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής πλησιάζει

Θεωρούμε ότι ένα παρατηρητής Α πλησιάζει προς την ακίνητη πηγή S με ταχύτητα $\vec{v}_A$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τώρα στην μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή περισσότερα μέγιστα κύματος από αυτά που η πηγή παράγει στον ίδιο χρόνο, αφού το μέτρο της ταχύτητας με την οποία διαδίδεται ο ήχος, ως προς τον παρατηρητή είναι μεγαλύτερη λόγω της σχετικής κίνησης παρατηρητή - ήχου.



Γενικά για την σχετική ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος Α σε σχέση με ένα κινούμενο σώμα Β μπορούμε να γράψουμε $\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, όπου οι ταχύτητες $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ είναι υπολογισμένες ως προς ένα ακίνητο παρατηρητή.

Στην δική μας περίπτωση η ταχύτητα του ήχου ως προς τον κινούμενο παρατηρητή Α θα υπολογίζετε με βάση το παραπάνω ως εξής:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A \Rightarrow v' = v - (-v_A) = v + v_A$$

Το μήκος κύματος που η πηγή εκπέμπει δίνεται πάλι από την σχέση: $\lambda = \frac{v}{f_S}$.

Ο παρατηρητής μετράει ακριβώς το ίδιο μήκος κύματος λ ως εάν ήταν ακίνητος, αλλιώς βλέπει τα μέγιστα να τον προσπερνούν

Η τιμή του μήκους κύματος είναι η ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς, στο σύστημα αναφοράς της πηγής και του κινούμενου παρατηρητή. Έτσι η συχνότητα που ο παρατηρητής αναλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_A}{\lambda} = \frac{v + v_A}{v/f_S} \Rightarrow f_A = \frac{v + v_A}{v} f_S$$

Επειδή $v + v_A > v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A > f_S$).

Ο παρατηρητής απομακρύνεται

Θεωρούμε ότι ένας παρατηρητής Α απομακρύνεται από την ακίνητη ως προς τον αέρα πηγή S με ταχύτητα $\vec{v}_A$. Τώρα στην μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή λιγότερα μέγιστα του κύματος από αυτά που η πηγή στον ίδιο χρόνο παράγει, αφού το μέτρο της ταχύτητας με την οποία διαδίδεται ο ήχος, ως προς την παρατηρητή είναι μικρότερη λόγω της σχετικής κίνησης. Με βάση τα παραπάνω:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A \Rightarrow v' = v - v_A = v - v_A$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

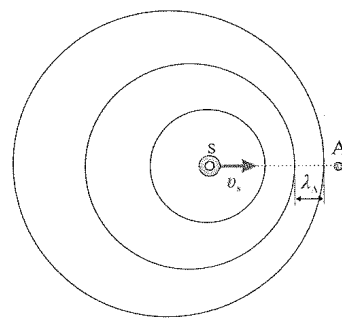
$$f_A = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_A}{\lambda} = \frac{v - v_A}{v/f_S} \Rightarrow f_A = \frac{v - v_A}{v} f_S$$

Επειδή $v - v_A < v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερης συχνότητας (βαρύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A < f_S$).

5.3 Κινούμενη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής

Η πηγή πλησιάζει

Υποθέτουμε ότι μια πηγή ήχου S κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_S$, πλησιάζοντας έναν ακίνητο παρατηρητή Α. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, ως προς τον αέρα θα είναι v γιατί εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης και όχι από την κίνηση της πηγής. Η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής για την πηγή θα είναι $v = \lambda f_S$. Από το σχήμα φαίνεται ότι καθώς η πηγή κατευθύνεται προς τον παρατηρητή "συμπιέζει" τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος, με αποτέλεσμα ο παρατηρητής να τα ανιχνεύει με μικρότερο μήκος κύματος από εκείνο που η πηγή εκπέμπει.



Πιο συγκεκριμένα ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος λ_A την απόσταση δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σε αυτόν. Η πηγή εκπέμπει κύματα και ταυτόχρονα κινείται. Ο χρόνος που μεσολαβεί κατά την εκπομπή δύο διαδοχικών κυμάτων είναι μια περίοδος T της ταλάντωσης της πηγής. Άρα μέχρι η πηγή έχει προχωρήσει κατά $x = v_S T$ μέχρι να εκπέμψει το επόμενο κύμα. Επομένως η απόσταση δύο διαδοχικών μεγίστων θα είναι $\lambda - v_S T$. Αυτή η απόσταση είναι και το μήκος κύματος λ_A που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται. Άρα η

συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v}{\lambda_A} = \frac{v}{\lambda - v_S T} = \frac{v}{\frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}} \Rightarrow f_A = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

Επειδή $v - v_S < v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A > f_S$).

Η πηγή απομακρύνεται

Αν υποθέσουμε ότι μία πηγή ήχου S απομακρύνεται με ταχύτητα $\vec{v}_S$ από τον παρατηρητή A , τότε με το αντίστοιχο σκεπτικό που παραπάνω αναλύσαμε είναι σαφές ότι ο παρατηρητής A θα αντιλαμβάνεται δύο διαδοχικά μέγιστα του κύματος σε μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους, αφού η πηγή σε χρόνο μίας περιόδου θα έχει απομακρυνθεί κατά $v_S T$. Το μήκος κύματος που ο παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται θα είναι $\lambda + v_S T$. Άρα η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v}{\lambda_A} = \frac{v}{\lambda + v_S T} = \frac{v}{\frac{v}{f_S} + \frac{v_S}{f_S}} \Rightarrow f_A = \frac{v}{v + v_S} f_S$$

Επειδή $v + v_S > v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερης συχνότητας (βαρύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A < f_S$).

5.4 Γενικές παρατηρήσεις

Αν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με τον αέρα ή γενικά το μέσο διάδοσης, τότε η σχέση που μας δίνει την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τον συνδυασμό όλων των παραπάνω περιπτώσεων.

$$f_A = \frac{v \pm v_A}{v \mp v_S} f_S \quad (5.1)$$

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι:

Ο παρατηρητής ακούει ήχο με μεγαλύτερη συχνότητα από εκείνο της πηγής, όταν η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται, και με συχνότητα μικρότερη από εκείνο της πηγής όταν η μεταξύ τους απόσταση αυξάνεται. Προσοχή στα πρόσημα!

- ο αριθμητής αναφέρεται στην κίνηση του παρατηρητή με το (+) να αντιστοιχεί στον παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή και το (-) στον παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή.
- ο παρονομαστής αναφέρεται στην κίνηση της πηγής με το (-) να αντιστοιχεί στην πηγή που πλησιάζει τον παρατηρητή και το (+) στην πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Χρονική Διάρκεια εκπομπής και χρονική διάρκεια λήψης του ήχου

Στο φαινόμενο *Doppler* δεν έχουμε μόνο αλλαγή στην συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής, αλλά και στην χρονική διάρκεια του ήχου που ακούει (Δt_A). Υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει τον ήχο για χρονική διάρκεια Δt_S . Από τον ορισμό της συχνότητας έχουμε ότι:

$$f_A = \frac{N_A}{\Delta t_A} \quad f_S = \frac{N_S}{\Delta t_S}$$

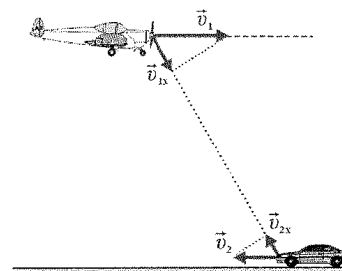
Ο αριθμός των κυμάτων που η πηγή εκπέμπει (N_S) είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που φτάνουν στον παρατηρητή (N_A). Άρα προκύπτει:

$$f_A \Delta t_A = f_S \Delta t_S \Rightarrow \Delta t_A = \frac{f_S}{f_A} \Delta t_S$$

Προφανώς, όταν ο παρατηρητής και η πηγή δεν βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε $f_A = f_S$, άρα και οι χρονικές διάρκειες θα είναι ίσες.

Πηγή και παρατηρητής που δεν κινούνται πάνω σε ευθεία που ενώνει πηγή με παρατηρητή

Όταν η πηγή κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_S$ που δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία πηγής - παρατηρητή, τότε πρέπει να προσέξουμε τον τρόπο εφαρμογής των παραπάνω σχέσεων. Επιλέγουμε ως ταχύτητα του παρατηρητή ή ταχύτητα της πηγής την προβολή των ταχυτήτων τους πάνω στην ευθεία που ενώνει πηγή - παρατηρητή και εφαρμόζουμε την ανάλογη σχέση.



Πηγή ή παρατηρητής που εκτελούν μεταβαλλόμενη κίνηση

Όταν η κίνηση της πηγής ή του παρατηρητή δεν είναι ομαλή, τότε και η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα μεταβάλλεται και αυτή με τον χρόνο.

Στην περίπτωση της κινούμενης πηγής η ταχύτητα της θα είναι μια συνάρτηση του χρόνου $v_S(t)$ ανάλογα βέβαια με το είδος της κίνησης. Αν για παράδειγμα η πηγή εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση τότε $v_S = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$.

Στην περίπτωση του κινούμενου παρατηρητή η ταχύτητα του θα είναι μια συνάρτηση του χρόνου $v_A(t)$. Αν για παράδειγμα ο παρατηρητής επιταχύνεται ευθύγραμμα και ομαλά $v_S = \alpha_S t$

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 9.1 - 9.45, 9.50, 9.51, 9.53, 9.54, 9.56, 9.57, 9.58, 9.61, 9.62, 9.63, 9.65, 9.67, 9.68, 9.71

Μέρος Ι

Διαγωνίσματα 2011 - 2012

1ο Διαγώνισμα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ημερομηνία :

Ονοματεπώνυμο :

Βαθμός :

Διάρκεια : 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και γωνιακής συχνότητας ω , είναι της μορφής $x = A\sin(\omega t)$. Τότε, η εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι η :

(α) $v = \omega A\sin(\omega t)$

(β) $v = -\omega A\sin(\omega t)$

(γ) $v = \omega A\cos(\omega t)$

(δ) $v = -\omega A\cos(\omega t)$

1.2. Ένα σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ολική ενέργεια E , πλάτος A και περίοδο T . Αν το σύστημα απορροφήσει επιπλέον ενέργεια $3E$, τότε

(α) η περίοδος της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται

(β) η περίοδος της ταλάντωσης υποτριπλασιάζεται

(γ) το πλάτος της ταλάντωσης τριπλασιάζεται

(δ) το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται

1.3 Σώμα μάζας m εκτελεί Απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T και πλάτος A . Τετραπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του και διπλασιάζουμε τη μάζα του ενώ διατηρούμε αμετάβλητη τη σταθερά επαναφοράς D . Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις ακραίες θέσεις θα :

(α) τετραπλασιαστεί

(β) παραμένει σταθερός

(γ) υποτετραπλασιαστεί

(δ) διπλασιαστεί

1.4 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 4s$. Η συχνότητα μεγιστοποίησης του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι f' ίση με:

- (α) 4 Hz
- (β) 2 Hz
- (γ) $0,5 \text{ Hz}$
- (δ) $0,25 \text{ Hz}$

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης διπλασιάζεται η μέγιστη ταχύτητα και η ενέργεια ταλάντωσης.
- (β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσες αποστάσεις.
- (γ) Για να εκτελέσει ένα σώμα Α.Α.Τ πρέπει για τη συνισταμένη δύναμη να ισχύει $\Sigma F = Dx$.
- (δ) Στην Α.Α.Τ η επιτάχυνση αλλάζει κατεύθυνση στη Θέση ισορροπίας
- (ε) Στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει ταχύτητα $v < 0$ και επιτάχυνση $a < 0$. Εκείνη τη στιγμή το σώμα κινείται επιταχυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) της ταλάντωσης.

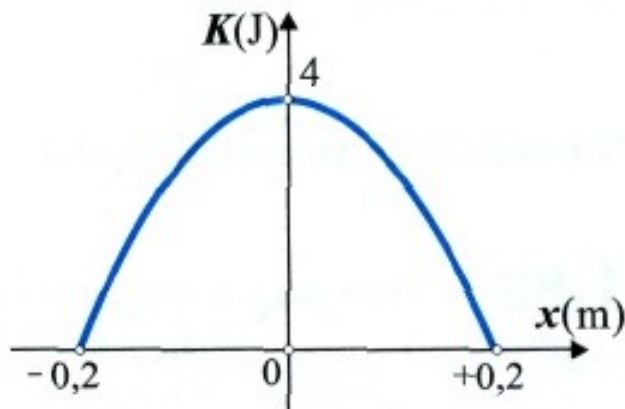
Θέμα 2ο

2.1 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας K ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του.

- (α) Στη θέση απομάκρυνσης $x = +0,1m$ η κινητική ενέργεια K και η δυναμική ενέργεια U ικανοποιούν τη σχέση:

- i) $K = U$
- ii) $K = 3U$
- iii) $K = 2U$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+4=7 μονάδες)**



(β) Η δύναμη επαναφοράς F και η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας ικανοποιούν τη σχέση:

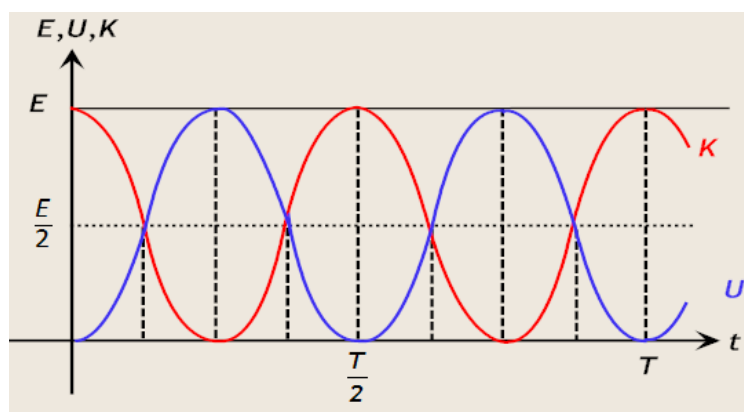
i) $F = -200x(S.I.)$

ii) $F = -100x(S.I.)$

iii) $F = -400x(S.I.)$

Να επιλέξετε τη σωστή σχέση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+3 = 6 μονάδες)**

2.2. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση μηδέν. Η γραφική παράσταση δείχνει τις μεταβολές της κινητικής K , της δυναμικής U και της ολικής ενέργειας E , σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η κινητική του ενέργεια K εξισώνεται με τη δυναμική του ενέργεια U , 120 φορές ανά λεπτό. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

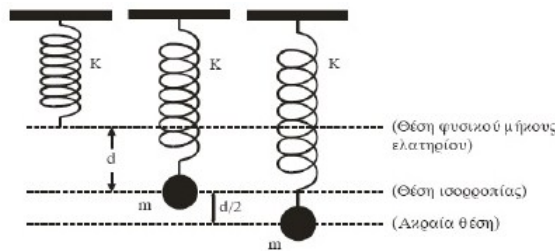
α) 30 Hz .

β) 2 Hz .

γ) $0,5 \text{ Hz}$.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+3 = 6 μονάδες)**

2.3. Στην κάτω άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $d/2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d . Στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος, ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι:



(α) $F_{ελ}/F_{επ} = 1/3$

(β) $F_{ελ}/F_{επ} = 1/2$

(γ) $F_{ελ}/F_{επ} = 2$

(δ) $F_{ελ}/F_{επ} = 3$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+3 = 6 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Ένα σώμα μάζας 1 kg εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου είναι $x = \sqrt{2}m$, κινούμενο με θετική ταχύτητα και η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ($K_{αρχ} = 3U_{αρχ}$). Κάθε στιγμή η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ικανοποιεί τη σχέση $\Sigma F = -16x \text{ (S.I.)}$. Να βρείτε:

(α) τη δυναμική ενέργεια, την κινητική ενέργεια και την ενέργεια της ταλάντωσης την στιγμή $t = 0$.

(β) το πλάτος και την αρχική φάση της ταλάντωσης ϕ_0

- (γ) την εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο.
- (δ) το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{24} s$.
- (ε) να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της δυναμικής ενέργειας με την απομάκρυνση και της δύναμης επαναφοράς με την απομάκρυνση.

(4+4+4+7+6 μονάδες)

Θέμα 4ο

Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 100 N/m$ κρέμεται σώμα μάζας $m = 1 kg$ ενώ το άνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ανυψώνουμε το σώμα κατακόρυφα ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σώμα ελεύθερο. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα ταλάντωσης τη θέση ισορροπίας και ως θετική η κατεύθυνση προς τα κάτω.

- (α) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που κάνει το σύστημα.
- (β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σαν συνάρτηση του χρόνου και να κάνετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με τον χρόνο.
- (γ) Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που το σώμα περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας.
- (δ) Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύαμε το σώμα με μια ταχύτητα $v_{εκτ}$ τότε θα αποκτούσε πλάτος A' κατά 50% μεγαλύτερο από αυτό που αποκτά αν το αφήσουμε ελεύθερο. Βρείτε την ταχύτητα $v_{εκτ}$.

Δίνεται $g = 10 m/s^2$.

(5+8+5+7 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία !

2ο Διαγώνισμα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ημερομηνία :

Ονοματεπώνυμο :

Βαθμός :

Διάρκεια : 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Σώμα μάζας m που είναι προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k , όταν απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας κατά A , εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T . Αν τετραπλασιάσουμε την απομάκρυνση A , η περίοδος της ταλάντωσης γίνεται :

- (α) $4T$
- (β) $2T$
- (γ) $T/2$
- (δ) T

1.2. Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ. Στα σημεία όπου η ταχύτητα έχει την μισή της μέγιστης τιμής της ισχύει :

- (α) $U = E/3$
- (β) $U = K$
- (γ) $4U = 3E$
- (δ) $U = 3E$

1.3 Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ και την χρονική στιγμή t_1 κινείται προς τη θέση ισορροπίας του έχοντας αρνητική επιτάχυνση ($a < 0$) . Τη χρονική στιγμή t_1 :

- (α) Το σώμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα ($x < 0$)
- (β) Η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική ($v < 0$)
- (γ) Το σώμα επιβραδύνει
- (δ) Η δυναμική του ενέργεια και η ενέργεια ταλάντωσης μειώνονται

1.4 Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Σ την ακραία θετική του θέση :

- (α) Η επιτάχυνση είναι θετική
- (β) Η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη
- (γ) Η ενέργεια ταλάντωσης ισούται με μηδέν
- (δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μέγιστος

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος μιας α.α.τ, τότε διπλασιάζεται και ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να πάει από τη μία ακραία θέση στην άλλη.
- (β) Η δύναμη που δέχεται το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση $x_1 = A/2$ έχει διπλάσιο μέτρο από τη δύναμη που δέχεται το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση $x_2 = -A$.
- (γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κινείται κατά την αρνητική φορά, τότε η ταλάντωση έχει αρχική φάση.
- (δ) Για ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ. η ταχύτητα έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση, όταν το σώμα κατευθύνεται προς τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του.
- (ε) Η ταχύτητα (v) ενός σώματος που εκτελεί α.α.τ. έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση (x) του από την θέση ισορροπίας σε μια τυχαία χρονική στιγμή.

Θέμα 2ο

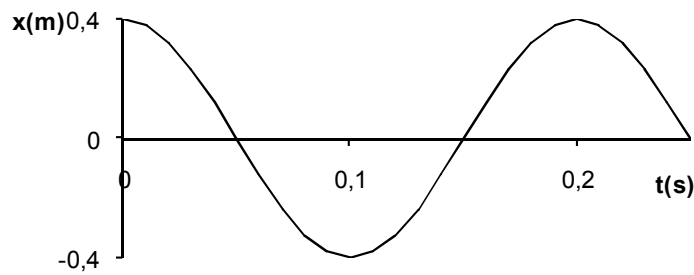
2.1 Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ. Να αποδείξετε τη σχέση η οποία συνδέει τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό, με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπία και να ερμηνεύσετε το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται στη σχέση αυτή. **(5 μονάδες)**

2.2. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

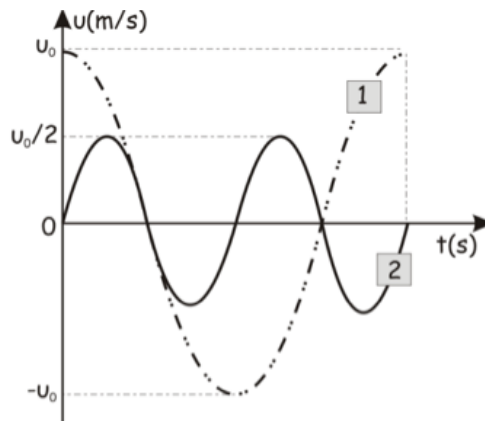
Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση :

- (α) $v = 4\pi\sigma\nu(10\pi t)$ (S.I.)
- (β) $v = 4\pi\sigma\nu(10t + \frac{\pi}{2})$ (S.I.)
- (γ) $v = 4\pi\sigma\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2})$ (S.I.)

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+3 = 5 μονάδες)**



2.3. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας-χρόνου για δύο σημειακά αντικείμενα (1) και (2) με ίσες μάζες, τα οποία εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση.



(α) Η ενέργεια ταλάντωσης E_1 του σώματος (1) και η ενέργεια ταλάντωσης E_2 του σώματος (2) ικανοποιούν τη σχέση:

- (i) $E_1 = 2E_2$
- (ii) $E_1 = E_2$
- (iii) $E_2 = 4E_1$
- (iv) $E_1 = 4E_2$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+4 = 7 μονάδες)**

(β) Οι μέγιστες δυνάμεις επαναφοράς που δέχονται τα αντικείμενα (1) και (2) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης τους, ικανοποιούν τη σχέση:

- (i) $F_{1(max)} = F_{2(max)}$

$$(ii) F_{1(max)} = 2F_{2(max)}$$

$$(iii) F_{1(max)} = \sqrt{2}F_{2(max)}$$

$$(iv) F_{1(max)} = 4F_{2(max)}$$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+5 = 8 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Μικρό σώμα μάζας $m = 1\text{ kg}$ στερεώνεται στο κάτω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{ N/m}$, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Το σώμα αφήνεται να ισορροπήσει. Εκτρέπουμε το σώμα φέρνοντάς το στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και του δίνουμε αρχική ταχύτητα μέτρου $|v_0| = \sqrt{3}m/s$, προς την θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

- (α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα, αν αγνοήσουμε οποιεσδήποτε τριβές και αν θεωρήσουμε θετική την φορά προς τα πάνω.
- (β) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης επαναφοράς και το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή που το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά
- (γ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος την χρονική στιγμή t , που για πρώτη το σώμα βρίσκεται $0,1\text{ m}$ κάτω από την θέση ισορροπίας του.

Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

(10+10+5 μονάδες)

Θέμα 4ο

Σώμα μάζας $m_1 = 3\text{ kg}$ είναι στερεωμένο στην άκρη οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\text{ N/m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T και πλάτος $A = 0,4\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης. Τη χρονική στιγμή $t = T/6$, ένα σώμα μάζας $m_2 = 1\text{ kg}$ που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το σώμα μάζας m_1 και έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 8\text{ m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αυτό με την διάρκεια της κρούσης να είναι αμελητέα. Να υπολογίσετε :

- (α) την αρχική φάση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1

- (β) τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα μάζας m_1 τη στιγμή της σύγκρουσης
- (γ) την περίοδο ταλάντωσης του συσσωματώματος
- (δ) την ενέργεια της ταλάντωσης μετά την κρούση

(5+8+4+8 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε !!!

Καλή Επιτυχία !

3ο Διαγώνισμα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ημερομηνία :

Ονοματεπώνυμο :

Βαθμός :

Διάρκεια : 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Σύστημα μάζας - ελατηρίου εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης τότε :

- (α) Διπλασιάζεται η ενέργεια ταλάντωσης
- (β) Διπλασιάζεται η περίοδος
- (γ) Διπλασιάζεται η μέγιστη δύναμη επαναφοράς
- (δ) Τετραπλασιάζεται η μέγιστη επιτάχυνση

1.2. Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A και αρχική φάση $\frac{5\pi}{6}$, την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται :

- (α) στην θέση $\frac{A}{2}$ με θετική ταχύτητα
- (β) στην θέση $\frac{A}{2}$ με αρνητική ταχύτητα
- (γ) στην θέση $-\frac{A}{2}$ με θετική ταχύτητα
- (δ) στην θέση $-\frac{A}{2}$ με αρνητική ταχύτητα

1.3 Ελατήριο αμελητέας μάζας επιμηκύνεται κατά Δl , όταν σε αυτό αναρτάται μάζα m και μπορεί να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f_0 . Αν στο ίδιο ελατήριο αναρτηθεί σώμα μάζας $3m$, η συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος γίνεται

- (α) $\frac{f_0}{3}$
- (β) f_0
- (γ) $\sqrt{3}f_0$
- (δ) $\frac{\sqrt{3}f_0}{3}$

1.4 Στην απλή αρμονική ταλάντωση η διαφορά φάσης μεταξύ ταχύτητας και δύναμης επαναφοράς είναι:

- (α) μηδέν
- (β) π
- (γ) $\frac{\pi}{2}$
- (δ) $\frac{\pi}{4}$

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
- (β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, η απομάκρυνση και η ταχύτητά του έχουν ίσες φάσεις.
- (γ) Η ενέργεια ταλάντωσης στην απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.
- (δ) Αν ένα σύστημα S_1 ελατηρίου (k) - μάζας (m) και ένα σύστημα S_2 ελατηρίου $2k$ - μάζας (m) εκτελούν ταλαντώσεις ίδιου πλάτους A , τότε η ολική ενέργεια του συστήματος S_2 είναι μεγαλύτερη από την ολική ενέργεια του συστήματος S_1
- (ε) Η δυναμική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση γίνεται μέγιστη, όταν το ταλαντούμενο σύστημα έχει μέγιστη επιτάχυνση

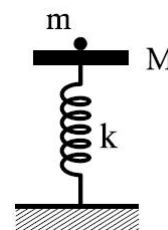
Θέμα 2ο

2.1 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$ ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

- (α) $\frac{K}{U} = \frac{1}{3}$
- (β) $\frac{K}{U} = 1$
- (γ) $\frac{K}{U} = 3$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+4=7 μονάδες)**

2.2. Δίσκος μάζας M είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , και ισορροπεί (όπως στο σχήμα). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο έδαφος. Στο δίσκο τοποθετούμε χωρίς αρχική ταχύτητα σώμα μάζας m . Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:



(α) $\frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k}$.

(β) $\frac{1}{2} \frac{M^2 g^2}{k}$.

(γ) $\frac{1}{2} \frac{(m+M)^2}{k} g^2$.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5 = 9 μονάδες)**

2.3. Στα κάτω άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων Α και Β των οποίων τα άλλα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα, ισορροπούν δύο σώματα με ίσες μάζες. Απομακρύνουμε και τα δύο σώματα προς τα κάτω κατά d και τα αφήνουμε ελεύθερα, ώστε αυτά να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η σταθερά του ελατηρίου Α είναι τετραπλάσια από τη σταθερά του ελατηρίου Β, ποιος είναι τότε ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων $\frac{v_{A(max)}}{v_{B(max)}}$ των δύο σωμάτων·

(α) $\frac{1}{2}$

(β) 1

(γ) 2

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+4 = 7 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Το σώμα Σ του σχήματος είναι συνδεδεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 900 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο $T = (\pi/15) \text{ s}$. Το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $v = 6 \text{ m/s}$ κινούμενο προς τα δεξιά. Να βρείτε:



(α) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

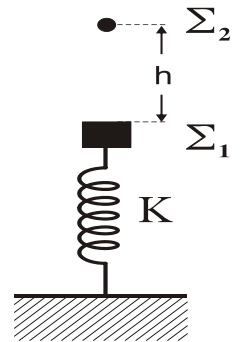
(β) Τη μάζα του σώματος.

- (γ) Την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα από 0 έως $(2\pi/15)s$.
- (δ) Για ποιες απομακρύνσεις ισχύει $K = 3U$, όπου K η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

(5+5+8+7 μονάδες)

Θέμα 4ο

Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$ έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα Σ_1 με μάζα $M = 4kg$ που ισορροπεί. Δεύτερο σώμα Σ_2 με μάζα $m = 1kg$ βρίσκεται πάνω από το πρώτο σώμα Σ_1 σε άγνωστο ύψος h , όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετακινούμε το σώμα Σ_1 προς τα κάτω κατά $d = \frac{\pi}{20}m$ και το αφήνουμε ελεύθερο, ενώ την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο σώμα Σ_2 .



- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του ύψους h ώστε τα δύο σώματα να συναντηθούν στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .
- (β) Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική να δείξετε ότι το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση ακινητοποιείται στιγμιαία.
- (γ) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα.

Δίνεται $g = 10m/s^2$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 \approx 10$.

(7+7+6+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία!

1ο Τεστ - Ιδανικό Κύκλωμα $L - C$

Ημερομηνία:

Διάρκεια: 75

min

Ονοματεπώνυμο:**Βαθμός:**

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 6 = 24$ μονάδες)

1.1. Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης γ' ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$ διπλασιάζεται:

- (α) αν διπλασιαστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή
- (β) αν διπλασιαστεί το αρχικό φορτίο του πυκνωτή
- (γ) αν τετραπλασιαστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή
- (δ) αν διπλασιαστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου

1.2. Στην διάρκεια μιας περιόδου των ηλεκτρικών ταλαντώσεων που εκτελούντε σε ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή γίνεται ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο:

- (α) τέσσερις φορές
- (β) μία φορά
- (γ) δύο φορές
- (δ) οκτώ φορές

1.3 Όταν ο πυκνωτής ενός ιδανικού κυκλώματος $L - C$ φορτίζεται από πηγή συνεχούς τάσης V_0 , το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστο ρεύμα I . Όταν ο πυκνωτής φορτίζεται από πηγή συνεχούς τάσης $2V_0$, το κύκλωμα θα εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση με μέγιστο ρεύμα:

- (α) I
- (β) $\frac{I}{2}$
- (γ) $2I$
- (δ) $4I$

1.4 Σε ταλαντούμενο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται :

- (α) το φορτίο του πυκνωτή αυξάνεται και η ένταση του ρεύματος μειώνεται
- (β) η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μειώνεται και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο αυξάνεται.
- (γ) η χωρητικότητα του πυκνωτή μειώνεται

Θέμα 2ο

2.1 Ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$ (1) έχει πυκνωτή με χωρητικότητα C και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L , ενώ ένα άλλο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ (2) έχει τον ίδιο πυκνωτή, αλλά πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $4L$. Φορτίζουμε τον πυκνωτή του κυκλώματος (1) με πηγή τάσης V και τον πυκνωτή του κυκλώματος (2) με πηγή τάσης $2V$ και τα διεγείρουμε ώστε να εκτελούν αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

(1) Ο λόγος των μέγιστων φορτίων στα δύο κυκλώματα $\frac{Q_2}{Q_1}$ ισούται με :

- (α) 1
- (β) 2
- (γ) $\frac{1}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(5+4=9 μονάδες)**

(2) Ο λόγος των ολικών ενεργειών στα δύο κυκλώματα $\frac{E_2}{E_1}$ ισούται με :

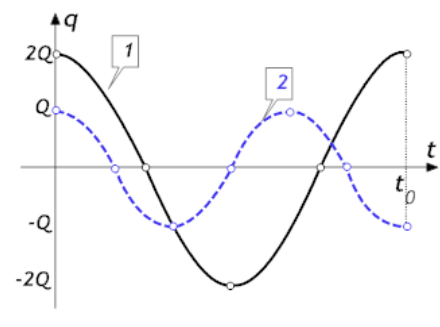
- (α) 1
- (β) 2
- (γ) 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(5+4=9 μονάδες)**

2.2 Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των χρονικών εξισώσεων $q - t$ για δυο κυκλώματα $L - C$.

Ο λόγος των μέγιστων εντάσεων των ρευμάτων στα δύο κυκλώματα $\frac{I_2}{I_1}$ ισούται με :

- (α) $\frac{3}{4}$
- (β) $\frac{4}{3}$
- (γ) $\frac{4}{9}$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(6+4=10 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Ιδανικό ηλεκτρικό κύκλωμα $L - C$ περιλαμβάνει πυκνωτή χωρητικότητας $C = 100\mu F$ και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L . Όταν το κύκλωμα διεγείρεται και εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις το φορτίο του αρχικά θετικού οπλισμού του πυκνωτή δίνεται από την εξίσωση $q = 10^{-4} \sigma \nu \nu (100t) (S.I.)$.

- Να υπολογίσετε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου
- Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με τον χρόνο
- Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα την χρονική στιγμή $t = 0$
- Την χρονική στιγμή που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι ίση με την μισή της μέγιστης τιμής της να υπολογίσετε το φορτίο q του πυκνωτή.

(10+12+12+14 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία!

2ο Τεστ - Ηλεκτρικές Ταλάντώσεις

Ημερομηνία:

Διάρκεια: 75

min

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός:

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 7 = 28$ μονάδες)

1.1. Σε κύκλωμα $L-C$ αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων, το μέγιστο φορτίο Q στον πυκνωτή και η μέγιστη ένταση I του ρευματος στο πηνίο συνδέονται με την σχέση:

(α) $Q = LCI$

(β) $Q = LCI^2$

(γ) $I = Q\sqrt{LC}$

(δ) $I = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$

1.2. Ιδανικό κύκλωμα $L - C$ εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις περιόδου T και την χρονική στιγμή $t = 0$ ενέργεια του πυκνωτή είναι μέγιστη και ισούται με $0,4J$. Την χρονική στιγμή $t = T + \frac{3T}{4}$ η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με:

(α) μηδεν

(β) $0,1J$

(γ) $0,3J$

(δ) $0,4J$

1.3 Η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων που εκτελεί ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$ είναι ίση με f . Αν αντικαταστήσουμε τον πυκνωτή με άλλον που έχει διπλάσια χωρητικότητα, τότε η νέα συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης γίνεται ίση με f' . Το πηλίκο $\frac{f'}{f}$ έχει τιμή ίση με:

(α) 2

(β) $\sqrt{2}$

(γ) $\frac{1}{2}$

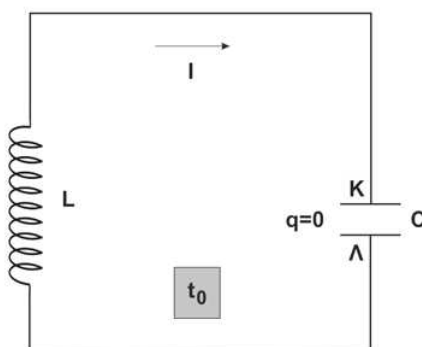
(δ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.4 Ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων $L - C$ έχει σταθερή ωμική αντίσταση R . Το μέγεθος που δεν ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου είναι:

- (α) το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή
- (β) η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος
- (γ) η περίοδος της ταλάντωσης
- (δ) η ολική ενέργεια της ταλάντωσης

Θέμα 2ο

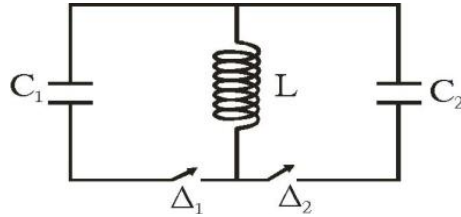
2.1 Το ιδανικό κύκλωμα $L - C$ του σχήματος εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, με περίοδο T . Τη χρονική στιγμή t_0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με τη φορά που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.



Τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + \frac{T}{2}$, η ένταση του ρεύματος θα είναι:

- (α) μέγιστη με τη φορά του σχήματος.
- (β) μηδέν.
- (γ) μέγιστη με φορά αντίθετη από αυτήν του σχήματος.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(6+4=10 μονάδες)**



2.2 Στο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ του σχήματος,

ο πυκνωτής C_1 έχει φορτιστεί μέσω πηγής συνεχούς τάσης με φορτίο Q_1 . Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο διακόπτης Δ_1 κλείνει, οπότε στο κύκλωμα $L - C_1$ έχουμε αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{5T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης του κυκλώματος $L - C_1$, ο διακόπτης Δ_1 ανοίγει και ταυτόχρονα κλείνει ο Δ_2 . Το μέγιστο φορτίο Q_2 που θα αποκτήσει ο πυκνωτής χωρητικότητας C_2 , όπου $C_2 = 4C_1$, κατά την διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος $L - C_2$ θα είναι ίσο με:

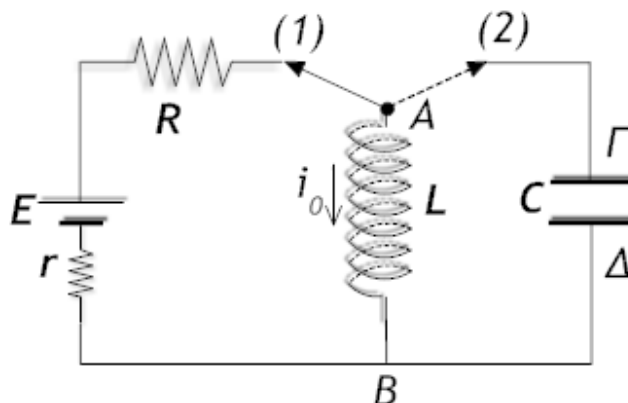
- (α) Q_1
- (β) $\frac{Q_1}{2}$
- (γ) $2Q_1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(7+5=12 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος η ηλεκτρική πηγή έχει ΗΕΔ $E = 20\text{volt}$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$, ο αντιστάτης έχει αντίσταση $R = 9\Omega$, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10\mu F$ και το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 16mH$. Ο μεταγωγός διακόπτης είναι αρχικά στη θέση (1) και το πηνίο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης. Την χρονική στιγμή $t = 0$, μεταφέρουμε απότομα το διακόπτη στη θέση (2) χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας, οπότε στο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ διεγείρεται αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.

- (α) Να βρείτε τη σταθερή ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο καθώς και την αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση (1)
- (β) Ποιος οπλισμός του πυκνωτή θα φορτιστεί πρώτος θετικά και γιατί; Ποιά χρονική στιγμή ο οπλισμός Δ του πυκνωτή θα αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστο φορτίο με αρνητική πολικότητα; Ποιά χρονική στιγμή το πηνίο για πρώτη φορά θα διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης τιμής και φοράς από το Β προς το Α



- (γ) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν πως μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο στο $S.I.$ το φορτίο του οπλισμού Δ του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος
- (δ) Να βρείτε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι μηδέν.

(12+12+12+14 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία!

1ο Διαγώνισμα -Ταλαντώσεις

Ημερομηνία :
Ονοματεπώνυμο :
Βαθμός :

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας περιγράφεται από την σχέση

$$x = 4 \cdot 10^{-2} \eta \mu(10t + \frac{\pi}{6}) \quad (S.I.)$$

- (α) το πλάτος ταλάντωσης είναι 4 m.
- (β) η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $40 \cdot 10^{-2} rad$.
- (γ) η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\frac{4\pi}{6} rad$.
- (δ) η φάση είναι άυξουσα συνάρτηση του χρόνου

1.2. Ένα κύκλωμα $L-C$ εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με μέγιστο φορτίο Q και μέγιστο ρεύμα I . Αν διπλασιαστεί η μέγιστη τάση στα άκρα του πυκνωτή ($V_{C(max)}$) χωρίς να μεταβληθεί άλλο στοιχείο του κυκλώματος τότε το μέγιστο ρεύμα:

- (α) θα διπλασιαστεί
- (β) θα υποδιπλασιαστεί
- (γ) θα παραμείνει το ίδιο
- (δ) θα τετραπλασιαστεί

1.3 Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο αρμονικών ταλαντώσεων πλάτους A οι οποίες γίνονται πάνω στην ίδια ευθεία, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με συχνότητα f_1, f_2 και οι οποίες έχουν παραπλήσιες τιμές είναι μια νέα ταλάντωση της οποίας:

- (α) το πλάτος μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών $-2A$ και $2A$ με συχνότητα $|f_1 - f_2|$.
- (β) το πλάτος μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών 0 και $2A$ με συχνότητα $\frac{f_1+f_2}{2}$.

(γ) η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών 0 και $2A$ με συχνότητα $\frac{f_1-f_2}{2}$.

(δ) η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών $-2A$ και $2A$ με συχνότητα $\frac{f_1+f_2}{2}$.

1.4 Το σύστημα ανάρτησης ενός αυτοκινήτου :

(α) είναι ένα σύστημα αποσβεσμένων ταλαντώσεων με πολύ μικρό b .

(β) είναι ένα σύστημα αποσβεσμένων ταλαντώσεων με πολύ μεγάλο b .

(γ) σκοπό έχει να διατηρεί την ταλάντωση για πολύ χρόνο όταν οι τροχοί συναντούν μικρά εμπόδια στο οδόστρωμα.

(δ) όταν φθείρεται, τότε αυξάνει την σταθερά απόσβεσης του.

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

(α) Το πλάτος ταλάντωσης σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση εξαρτάται από την σταθερά απόσβεσης.

(β) Η συχνότητα ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση αυξάνει όταν ελαττώνεται η μάζα του σώματος.

(γ) Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, είναι μια νέα απλή αρμονική ταλάντωση.

(δ) Κάθε εξαναγκασμένη ταλάντωση οδηγείται σε συντονισμό.

(ε) Η μείωση της αντίστασης σε ένα κύκλωμα $R - L - C$ οδηγεί σε αύξηση της Ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

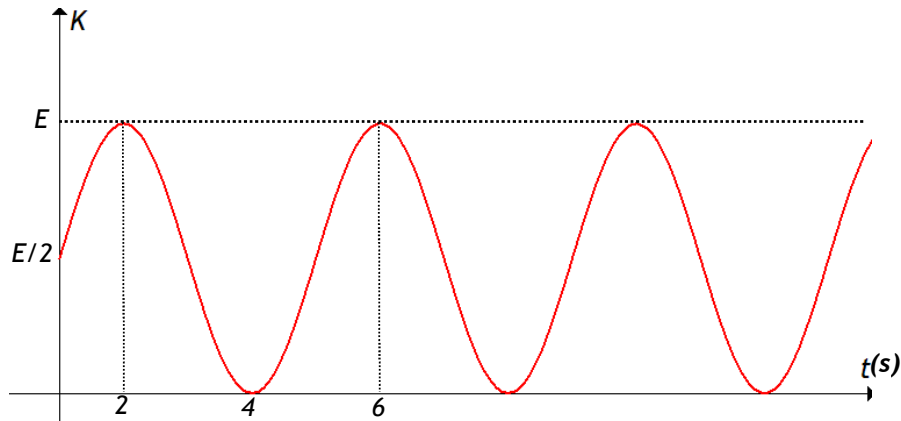
Θέμα 2ο

2.1. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Η πρώτη διέλευση του σώματος από την θέση ισορροπίας γίνεται κατά την αρνητική κατεύθυνση.

A. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

(α) $4s$

(β) $8s$



(γ) $16s$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+2 = 3 μονάδες)**

B. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι :

(α) $\frac{\pi}{4}$

(β) $\frac{3\pi}{4}$

(γ) $\frac{5\pi}{4}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+4 = 7 μονάδες)**

2.2. Σημειακή μάζα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις στην ίδια κατεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις $x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t)$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3})$. Αν η ενέργεια της μάζας αν εκτελούσε μόνο την πρώτη ταλάντωση είναι $E_1 = 2J$ και η ενέργεια της μάζας αν εκτελούσε μόνο την δεύτερη ταλάντωση είναι $E_2 = 4,5J$, τότε η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι :

(α) $E = 6,5J$

(β) $E = 2,5J$

(γ) $E = 9,5J$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+4=7 μονάδες)**

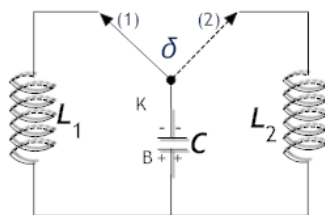
2.3. Σημειακό αντικείμενο εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Τη χρονική στιγμή t_1 το αρχικό πλάτος έχει υποδιπλασιαστεί. Το πλάτος της ταλάντωσης θα γίνει $\frac{A_0}{16}$ την χρονική στιγμή:

- (α) $4t_1$
- (β) $2t_1$
- (γ) $16t_1$

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+4 = 8 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Στο κύκλωμα του σχήματος, ο πυκνωτής C έχει χωρητικότητα $C = 20\mu F$ και είναι φορτισμένος από πηγή με ΗΕΔ $E = 10V$ olt, και πολικότητα όπως στο σχήμα. Τα πηνία έχουν συντελεστή αυτεπαγωγής $L_1 = 8mH$ και $L_2 = 2mH$.



- (1) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο μεταγωγός διακόπτης δ μεταβαίνει στη θέση (1) και το κύκλωμα $L_1 - C$ αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.
 - (α) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις, που δίνουν το φορτίο του πυκνωτή και την ένταση του ρεύματος, στο $(S.I.)$. Πόση είναι η ολική ενέργεια E_1 της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος $L_1 - C$.
 - (β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{16\pi}{3} 10^{-4} s$:
 - (i) Την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το 1ο πηνίο.
 - (ii) Το φορτίο κάθε οπλισμού του πυκνωτή.
- (2) Τη χρονική στιγμή t_1 ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση (2), χωρίς να ξεσπάσει ηλεκτρικός σπινθήρας.
 - (α) Θεωρώντας πάλι ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή που αλλάζει θέση ο διακόπτης, να γράψετε τη σχέση έντασης ρεύματος-χρόνου για το κύκλωμα $L_2 - C$. Πόση είναι τώρα η ολική ενέργεια E_2 του κυκλώματος $L_2 - C$.

- (β) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας μαγνητικού πεδίου του πηνίου, τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5\pi}{4} 10^{-4} s$

$$\Deltaίνεται \text{ ότι } \eta\mu(2\phi) = 2\eta\mu(\phi) \cdot \sigma\upsilon\nu(\phi)$$

(6+6+6+7 μονάδες)

Θέμα 4ο

Σώμα Σ μάζας $m_1 = 4kg$ ισοροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Ανεβάζουμε το σώμα μάζας m_1 κατά απόσταση $l = 0,05m$ από τη θέση ισορροπίας του και το εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα κάτω (κατά την αρνητική φορά δηλαδή) με ταχύτητα μέτρου $v_0 = (\sqrt{3}/2)m/s$. Το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

- (α) Να βρεθεί το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος Σ
- (β) Κάποια στιγμή που το σώμα Σ περνά από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του και κατεβαίνει, συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας m_2 που ανεβαίνει με ταχύτητα μέτρου v_2 . Μετά τη σύγκρουση το συσσωμάτωμα ανεβαίνει και φτάνει μέχρι μια θέση που βρίσκεται πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $d = 0,1m$. Δίνεται η περίοδος $T_{o\lambda}$ της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι $T_{o\lambda} = \sqrt{2}T_1$, όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσης που έκανε το σώμα Σ. **Να βρεθούν:** (i) η μάζα m_2 και (ii) το μέτρο της ταχύτητας v_2 .
- (γ) Κάποια στιγμή ($t = 0$) το σύστημα συσσωματώματος - ελατηρίου βυθίζεται σε υγρό. Το σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση για την οποία η αντιτιθέμενη δύναμη είναι της μορφής $F = -b \cdot v$, όπου b θετική σταθερά. Δίνεται η σταθερά $\Lambda = 0,195s^{-1}$. Να βρεθεί σε ποιά χρονική στιγμή το σύστημα συσσωματώματος - ελατηρίου έχει χάσει ενέργεια $13,5J$. Δίνεται $\ln 2 = 0,693$

$$\Deltaίνεται \text{ } g = 10m/s^2.$$

(6+7+7+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία!

2ο Διαγώνισμα -Ταλαντώσεις

Ημερομηνία :

Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο :

Βαθμός :

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Η ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς τριβή είναι ίση με 20 Hz . Το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι :

(α) 10 Hz (β) 20 Hz (γ) 30 Hz (δ) 40 Hz

1.2. Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους και διεύθυνσης. Οι συχνότητες f_1 και f_2 ($f_1 > f_2$) των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται διακρότημα. Αν η συχνότητα f_2 προσεγγίσει την συχνότητα f_1 χωρίς να την ξεπεράσει, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα :

(α) αυξηθεί.

(β) μειωθεί.

(γ) παραμείνει ο ίδιος.

(δ) αυξηθεί ή θα μειωθεί ανάλογα με την τιμή της f_2

1.3 Σε μια φθίνουσα ταλάντωση με αρχικό πλάτος A_0 , μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα το σύστημα έχει χάσει ενέργεια $\Delta E = -\frac{3E_0}{4}$, όπου E_0 η αρχική του ενέργεια. Το πλάτος της ταλάντωσης του τη στιγμή εκείνη είναι :

(α) $A_0/4$ (β) $A_0/2$

(γ) $3A_0/4$

(δ) A_0

1.4 Σύστημα ελατηρίου σταθεράς k και μάζας m εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα f και μέγιστο πλάτος A . Αν τετραπλασιάσουμε την σταθερά του ελατηρίου κρατώντας σταθερή την μάζα και την συχνότητα του διεγέρτη, τότε το σύστημα θα ταλαντώνεται με:

(α) συχνότητα $\frac{f}{2}$ και πλάτος A

(β) συχνότητα f και μικρότερο πλάτος

(γ) συχνότητα f και μεγαλύτερο πλάτος

(δ) συχνότητα $2f$ και πλάτος A

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

(α) Σε μία γραμμική απλή αρμονική ταλάντωση, ο υποτετραπλασιασμός της μάζας του σώματος (με σταθερό πλάτος A) έχει σαν αποτέλεσμα το διπλασιασμό της συχνότητας, ενώ η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή.

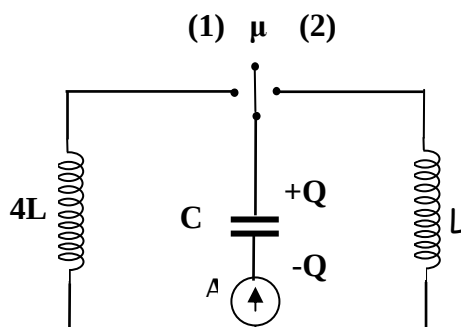
(β) Σε μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση, όσο η αντίσταση R αυξάνει, η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται και αυξάνει ο ρυθμός με τον οποίο το κύκλωμα χάνει την ενέργεια του.

(γ) Κατά τον συντονισμό ενός συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, το σύστημα εμφανίζει την μέγιστη δυνατότητα απορρόφησης ενέργειας από το διεγέρτη, το μέγιστο πλάτος και τη μέγιστη συχνότητα ταλάντωσης.

(δ) Σε ιδανικό κύκλωμα $L - C$ η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο δεν εξαρτάται από την φορά του ρεύματος.

(ε) Μια ταλάντωση είναι ελεύθερη όταν η συχνότητα της ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

Θέμα 2ο



2.1 Ο πυκνωτής του σχήματος έχει φορτιστεί με φορτίο Q . Την χρονική στιγμή $t = 0$ ο μεταγωγός έχει μεταφερθεί στην θέση (1) και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με περίοδο T_1 . Την χρονική στιγμή $t_1 = 2T_1$ ο μεταγωγός μεταφέρεται ακαριαία στην θέση (2).

Για χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t_2 = 4T_1$ να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με τον χρόνο:

(α) του φορτίου του πυκνωτή

(β) της έντασης του ρεύματος που περνά από το αμπερόμετρο Α

(4+4=8 μονάδες)

2.2. Μηχανικό σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μικρής απόσβεσης, συχνότητας f_1 και πλάτους $A_1 = 0,2m$. Μικραίνοντας την συχνότητα του διεγέρτη παρατηρούμε αύξηση του πλάτους και στην συνέχεια μείωση αυτού, μέχρι μια συχνότητα διεγέρτη f_2 για την οποία το πλάτος ισούται ξανά με A_1 . Κατά την διάρκεια μείωσης της συχνότητας η μεγαλύτερη μεταβολή του πλάτους που παρατηρήθηκε σε σχέση με το αρχικό πλάτος A_1 είναι ίση με $0,15m$.

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος, όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού ισούται με:

(α) $0,45 m$

(β) $0,05 m$

(γ) $0,35 m$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5 = 9 μονάδες)**

2.3. Ένας ταλαντωτής εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με συχνότητες $f_1 = 98Hz$ και $f_2 = 102Hz$ και εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

A. Πόσες φορές μέσα σε χρόνο $1s$, ο ταλαντωτής διέρχεται από την θέση ισορροπίας του·

- (α) 4
- (β) 100
- (γ) 200

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 = 4 μονάδες)**

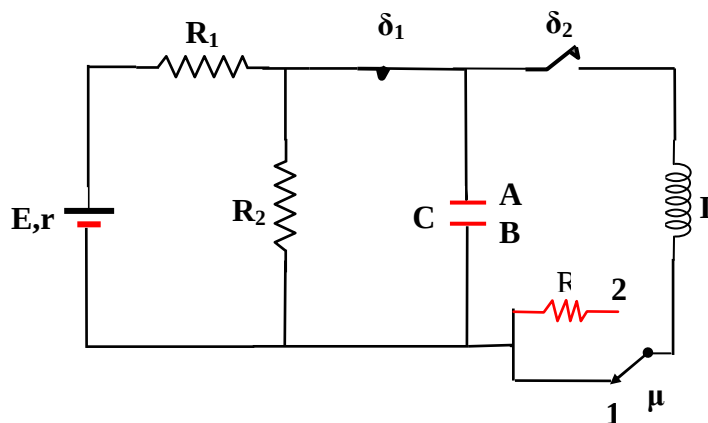
B. Πόσες φορές μέσα σε $1s$ μηδενίζεται το πλάτος του ταλαντωτή·

- (α) 4
- (β) 100
- (γ) 200

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 = 4 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Στο κύκλωμα του σχήματος η πηγή έχει ΗΕΔ $E = 10\text{volt}$ και εσωτερική αντίσταση $r = 2\Omega$. Οι αντιστάτες του κυκλώματος εμφανίζουν αντίσταση $R_1 = 8\Omega$ και $R_2 = 10\Omega$, το πηνίο είναι ιδανικό με συντελεστή αυτεπαγωγής L και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 4\mu F$. Αρχικά ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός και ο διακόπτης δ_2 ανοικτός. Ανοίγουμε τον δ_1 την χρονική στιγμή $t = 0$ και κλείνουμε τον δ_2 , ενώ ο μεταγωγός είναι στην θέση (1) με αποτέλεσμα να έχουμε ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Την χρονική στιγμή $t_1 = \pi \cdot 10^{-3}\text{sec}$ μετά την έναρξη της ταλάντωσης ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί για πρώτη φορά.



- (α) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.
- (β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου και την μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.
- (γ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή για την οποία η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο γίνεται τριπλάσια της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή για δεύτερη φορά.
- (δ) Την χρονική στιγμή $t_2 = 0,2\pi s$ μεταφέρουμε ακαριαία τον μεταγωγό από την θέση (1) στην θέση (2) χωρίς να σχηματιστεί σπινθήρας, δημιουργώντας το κύκλωμα RLC . Εάν η σταθερά της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $\Lambda = \frac{\ln 2}{\pi} s^{-1}$ να υπολογιστεί:
- τον αριθμό των ταλαντώσεων του κυκλώματος από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι και τη στιγμή που το μέγιστο φορτίο του οπλισμού Α έχει τιμή $Q_1 = 10^{-5} C$
 - το ποσοστό της ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα εξαιτίας του φαινομένου *Joule* στον αντιστάτη R στο χρονικό διάστημα από την στιγμή $t = 0$ μέχρι και την στιγμή που είναι $Q_1 = 10^{-5} C$

(4+5+8+4+4 μονάδες)

Θέμα 4ο

Σώμα μάζας $m_1 = 2kg$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του, προκαλώντας στο ελατήριο συσπίρωση (σε σχέση με το φυσικό του μήκος) ίση με την αρχική παραμόρφωση που προκάλεσε η μάζα m_1 και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

- (α) Αν η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T_1 = 0,1\pi s$ να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου και να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας.
- (β) Τη στιγμή $t = \frac{2\pi}{15} s$ το σώμα συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα μάζας m_2 που ανεβαίνει με ταχύτητα μέτρου $v_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} m/s$ και το συσσωμάτωμα που προκύπτει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T_2 = 2T_1$.
- να υπολογίσετε την παραμόρφωση του ελατηρίου και την ταχύτητα της μάζας m_1 τη στιγμή της κρούσης
 - να υπολογίσετε τη μάζα m_2 και το πλάτος της ταλάντωσης A_2 του συσσωματώματος

- (δ) Να συγκρίνεται τη μέγιστη συσπείρωση που προκαλείται στο ελατήριο από τις δύο ταλαντώσεις.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. Να θεωρήσετε τις τριβές του αέρα αμελητέες, και ως θετική φορά την κατακόρυφη προς τα πάνω.

(6+7+7+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή

Καλή Επιτυχία!

Περι "Φυσικής" ορμώμενος
ΈΝΑ ΙΣΤΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΟΥ...

1ο Διαγώνισμα Κύματα Μηχανικά - Ηλεκτρομαγνητικά

Ημερομηνία:

Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός:

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών στάσιμου κύματος τα σημεία του ελαστικού μέσου

- (α) έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης
- (β) έχουν την ίδια φάση
- (γ) έχουν την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης
- (δ) είναι ακίνητα

1.2. Στην επιφάνεια ενός υγρού δύο πηγές, που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, παράγουν κύματα ίδιου πλάτους. Ένα σημείο Μ στο οποίο συμβάλλουν τα κύματα θα είναι διαρκώς ακίνητο όταν η διαφορά των αποστάσεων του από τις πηγές είναι:

- (α) $14\frac{\lambda}{4}$
- (β) $6\frac{\lambda}{3}$
- (γ) μηδέν
- (δ) $\frac{\lambda}{4}$

1.3 Τα στάσιμα δημιουργούνται κάθε φορά που συμβάλλουν δύο κύματα:

- (α) με ίδιο πλάτος.
- (β) με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα.
- (γ) με ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα και αντίθετη ταχύτητα.
- (δ) που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις

1.4 Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα

- (α) δημιουργείται μόνο από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο
- (β) διαδίδεται στο κενό πάντα με την ταχύτητα του φωτός
- (γ) διαδίδεται μόνο στο κενό
- (δ) διαδίδεται μόνο στον οριζόντιο άξονα

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται τόσο στα στερεά όσο και στα υγρά και τα αέρια.
- (β) Ραδιενεργοί πυρήνες μπορούν να εκπέμπουν ακτίνες γ.
- (γ) Στα στάσιμα κύματα μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο.
- (δ) Όταν σε ένα σημείο Μ συμβάλλουν δύο κύματα που προέρχονται από σύγχρονες πηγές τότε στο σημείο Μ συμβαίνει πάντα ενισχυτική συμβολή.
- (ε) Όταν ένα κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης, τότε η συχνότητα του μεταβάλλεται.

Θέμα 2ο

2.1 Αρμονικό κύμα με μήκος κύματος λ διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου το οποίο ταυτίζεται με τον ημιάξονα Ox . Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και το υλικό σημείο O ($x = 0$) που βρίσκεται στο αριστερό άκρο του ελαστικού μέσου ταλαντώνεται με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$.

- α) Τη χρονική στιγμή t_1 που το υλικό σημείο O φτάνει για τέταρτη φορά σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης ο αριθμός των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στη μέγιστη θετική τους απομάκρυνση ισούται με:
 - i) 4
 - ii) 1
 - iii) 2
- β) Τη χρονική στιγμή t_2 που το υλικό σημείο K ($x_K = +2\lambda$) φτάνει για τρίτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του, ο αριθμός των σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στη θέση απομάκρυνσης $y_1 = +\frac{A}{2}$ ισούται με:
 - i) 5

ii) 7

iii) 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+4=8 μονάδες)**

2.2. Στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις με συχνότητα f και δημιουργούν εγκάρσια κύματα ίδιου πλάτους A . Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού ταλαντώνεται εξ αιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων με πλάτος $2A$. Αν οι δύο πηγές εκτελέσουν ταλάντωση με συχνότητα $2f$ και με το ίδιο πλάτος A τότε το σημείο Σ θα :

(α) ταλαντωθεί με πλάτος $2A$.

(β) ταλαντωθεί με πλάτος $4A$.

(γ) παραμένει ακίνητο.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5 = 9 μονάδες)**

2.3. Σε αρμονικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται στο $S.I.$ από την εξίσωση :

$$E = 30\eta\mu 2\pi (6 \cdot 10^{10}t - 2 \cdot 10^2x)$$

(α) Να εξετάσετε αν το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό.

(β) Να εξετάσετε αν το μαγνητικό πεδίο του παραπάνω ηλεκτρομαγνητικού κύματος περιγράφεται στο $S.I.$ από την εξίσωση :

$$B = 10^{-7}\eta\mu\pi (12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2x)$$

Δίνεται η ταχύτητα του φωτός στο κενό: $c = 3 \cdot 10^8 m/s$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(3+5 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος $A = 0,2m$, κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0,6m$. Οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με θετική ταχύτητα. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 7,6m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 4,8m$ από την πηγή Π_2 . Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 12sec$.

- (α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.
- (β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα.
- (γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του (Σ) τη χρονική στιγμή $t' = \frac{707}{16} \text{ sec}$.
- (δ) Να υπολογίσετε το πηλίκο της κινητικής ενέργειας του σημείου Σ προς την ενέργεια ταλάντωσής του, τη χρονική στιγμή t' .

Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 \approx 10$.

(5+6+7+7 μονάδες)

Θέμα 4ο

A. Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A = 5 \text{ cm}$ διαδίδεται κατά μήκος μιας τεντωμένης ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους από τα αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$. Αν το αριστερό άκρο Ο της χορδής αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης και μετά από κάποιο χρόνο δυο σημεία της χορδής που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 7 \text{ cm}$ και ταλαντώνονται, έχουν διαφορά φάσης $\frac{7\pi}{2} \text{ rad}$ τότε:

- (α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος και να βρείτε την ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων Α ($x_A = 5 \text{ cm}$) και Β ($x_B = 20 \text{ cm}$) την χρονική στιγμή $t = 0,1 \text{ sec}$.
- (β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή τη χρονική στιγμή $t = 0,1 \text{ sec}$.
- (γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $y = f(t)$ του σημείου Β και να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή $t = 0,1 \text{ sec}$

(3+2+4 μονάδες)

B. Αν στην χορδή διαδίδεται και ένα δεύτερο τρέχον κύμα που συμβάλλει με το αρχικό ώστε να δημιουργείται στάσιμο κύμα τότε:

- (α) Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος
- (β) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος
- (γ) Να γίνει η γραφική παράσταση του στιγμιότυπου του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t = 0,1 \text{ sec}$ και $t = \frac{17}{3} \text{ sec}$.

(δ) Να βρεθεί η ταχύτητα των σημείων που βρίσκονται στις θέσεις $x_A = 5cm$ και $x_B = 20cm$ τη χρονική στιγμή $t = 0,1sec$.

(ε) Πόσοι δεσμοί και πόσες κοιλίες βρίσκονται μεταξύ των σημείων Α και Β ·

Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 \approx 10$.

(2+2+3+4+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Δεν αντιγράφουμε!!!

Καλή Επιτυχία!



1ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Ταλαντώσεις - Κύματα

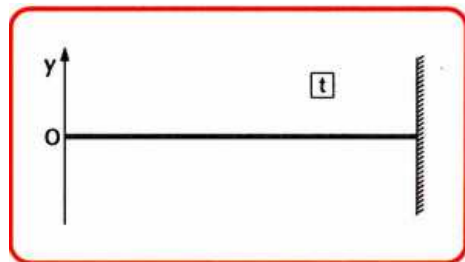
Ημερομηνία:
Ονοματεπώνυμο:
Βαθμός:

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Στο σχήμα δίνεται στο στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος το οποίο έχει δημιουργηθεί κατα μήκος ενός σχοινιού. Η ενέργεια του κύματος κατά την χρονική στιγμή t , κατά την οποία έχει ληφθεί το στιγμιότυπο, είναι:



- (α) μηδέν
- (β) μόνο κινητική
- (γ) μόνο δυναμική
- (δ) κινητική και δυναμική

1.2. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$, στο οποίο εκτελούνται αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης στα άκρα του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

- (α) 0
- (β) $\frac{\pi}{4}$
- (γ) $\frac{\pi}{2}$
- (δ) π

1.3 Αν σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, τότε τα διαδοχικά πλάτη προς την ίδια κατεύθυνση A_1 , A_2 και A_3 , συνδέονται με την σχέση:

(α) $A_1^2 = A_2 A_3$

(β) $A_2 = \frac{A_1 + A_3}{2}$

(γ) $A_2 = \sqrt{A_1 A_3}$

(δ) $A_2 = \frac{A_1 - A_3}{2}$

1.4 Για το φυσικό σύστημα που αποτελείται από γυάλινη πλάκα με δείκτη διάθλασης $n_1 = \frac{3}{2}$ και ποσότητα νερού με δείκτη διάθλασης $n_2 = \frac{4}{3}$, η τιμή του ημιτόνου της κρίσιμης γωνίας για ορισμένη μονοχρωματική ακτινοβολία είναι:

(α) 9/16

(β) 8/9

(γ) 9/8

(δ) 1/2

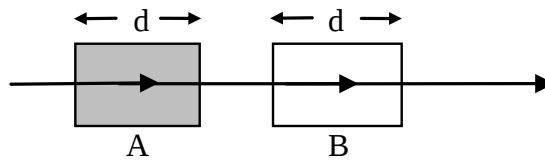
1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Στις χορδές της κιθάρας σχηματίζονται στάσιμα κύματα. Τα άκρα κάθε χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμοί.
- (β) Μικροκύματα παράγονται από ηλεκτρικά κυκλώματα και χρησιμοποιούνται στα ραντάρ.
- (γ) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, κατά τον συντονισμό η ενέργεια της ταλάντωσης είναι μέγιστη.
- (δ) Η συχνότητα του διακροτήματος είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις συχνότητες των δύο ταλαντώσεων που δημιουργούν το διακρότημα.
- (ε) Ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Θέμα 2ο

2.1 Μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_0 στο κενό, διαπερνά κάθετα δυο πλακίδια Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο πλακίδια βρίσκονται στον αέρα.

Το πάχος του πλακιδίου Β είναι ίσο με το πάχος του πλακιδίου Α και η ακτινοβολία τα διαπερνά σε χρόνους t_A και t_B για τους οποίους ισχύει $t_B = \sqrt{3}t_A$. Αν η κρίσιμη γωνία κατά την διάδοση της ακτινοβολίας από το υλικό Α στον αέρα είναι 60° , τότε η αντίστοιχη κρίσιμη γωνία κατά την μετάβαση από το υλικό Β στον αέρα είναι:



(α) 30°

(β) 45°

(γ) 120°

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5=9 μονάδες)**

2.2. Τεντωμένη χορδή έχει μήκος L και τα δύο άκρα της Ζ και Η είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, ενώ η χορδή διατηρείται οριζόντια. Διεγέρτης θέτει το μέσο (Ο) της χορδής σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu(2\pi f_1 t)$, για ορισμένο χρονικό διάστημα και μετά σταματά. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των Ζ και Η.

Μεταβάλλουμε την συχνότητα ταλάντωσης του διεγέρτη σε f_2 και παρατηρούμε πως όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, υπάρχουν 8 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των Ζ και Η.

Ο λόγος των συχνοτήτων είναι ίσος με:

(α) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{9}$

(β) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2}$

(γ) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{9}{5}$

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+4 = 7 μονάδες)**

2.3. Ένα υλικό σημείο υποχρεώνεται να εκτελέσει ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εκτελούνται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας στην ίδια διεύθυνση και έχουν εξισώσεις $x_1 = 0,2\eta\mu(2\pi t)(S.I.)$ και $x_2 = 0,2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(2\pi t)(S.I.)$. Η ταχύτητα του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από την σχέση:

(α) $v = 0,8\pi\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \frac{\pi}{3})(S.I.)$

(β) $v = 0,8\pi\eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{3})(S.I.)$

(γ) $v = 0,8\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi t)(S.I.)$

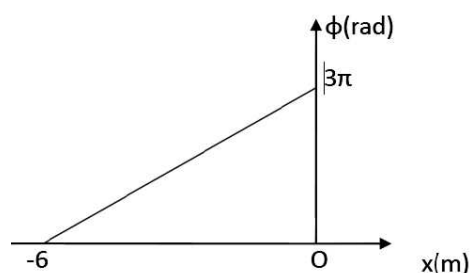
(δ) $v = 0,8\pi\eta\mu(2\pi t)(S.I.)$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(4+5 = μονάδες)**

Θέμα 3ο

Δίνεται η γραφική παράσταση της φάσης ενός γραμμικού αρμονικού κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη θέσης x τη χρονική στιγμή $t = 3\text{sec}$.

Το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα xOx και την χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο O ($x = 0$) διέρχεται από την θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την μέγιστη θετική του απομάκρυνση.



3.1 Να υπολογίσετε την περίοδο και το μήκος κύματος του κύματος

3.2 Το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου είναι $A = 0,1\text{m}$

- (α) Να υπολογίσετε την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του μέσου.
- (β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- (γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή $t = 3\text{sec}$.

3.3 Σημείο K του ελαστικού μέσου βρίσκεται στη θέση $x_K = -5\text{m}$.

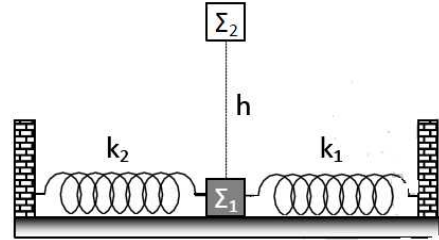
- (α) Να βρείτε την χρονική στιγμή που το σημείο K ξεκινά την ταλάντωση του
- (β) Να κάνετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.
- (γ) Να βρείτε την διαφορά φάσης του σημείου K από το σημείο O ($x = 0$)

(4+3+3+4+3+4+4 μονάδες)

Θέμα 4ο

Το σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ του παρακάτω σχήματος ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα άκρα δύο οριζοντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 . Τα άλλα άκρα είναι δεμένα σε ακλόνητα σημεία. Στη θέση ισορροπίας του Σ_1 τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Δεύτερο σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κατακόρυφο που διέρχεται από το Σ_1 σε ύψος $h = 31,25\text{cm}$ πάνω από αυτό.

Μετακινούμε το σώμα Σ_1 κατά μήκος του άξονα των ελατηρίων έτσι ώστε το ελατήριο σταθεράς k_1 να συμπιεστεί κατά $d = 20\text{cm}$. Αφήνουμε ταυτόχρονα τα δύο σώματα ελεύθερα να κινηθούν. Τα δύο σώματα συγκρούονται την στιγμή που το Σ_1 περνά από την θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά. Η κρούση των δύο σωμάτων θεωρείται πλαστική.



4.1 Για την κίνηση των δύο σωμάτων μέχρι την κρούση τους:

- (α) Να αποδείξετε ότι το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.
- (β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες με τις οποίες τα δύο σώματα συγκρούονται μεταξύ τους.

4.2 Το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την κρούση μετά από χρόνο $t = 1\text{sec}$.

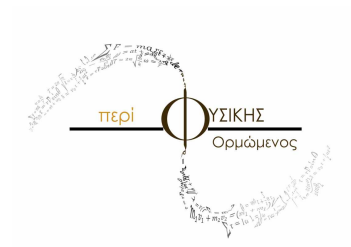
- (α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 \approx 10$.

(6+6+7+6 μονάδες)

Οδηγίες

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας...



Καλή Επιτυχία!
Καλή Χρονιά!

2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Ταλαντώσεις - Κύματα

Ημερομηνία:

Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός:

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Δύο σώματα (1) και (2) με ίσες μάζες ($m_1 = m_2$) εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με περίοδο T_1 και T_2 και πλάτος A_1 και A_2 αντίστοιχα. Αν οι περίοδοι ικανοποιούν τη σχέση $T_1 = 2T_2$ και τα πλάτη τη σχέση $A_1 = 4A_2$ τότε οι ενέργειες ταλάντωσης των δύο σωμάτων ικανοποιούν την σχέση:

(α) $E_1 = E_2$

(β) $E_1 = 2E_2$

(γ) $E_2 = 2E_1$

(δ) $E_1 = 4E_2$

1.2. Μικρό σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και η δύναμη απόσβεσης που δέχεται έχει την μορφή $F' = -bv$. Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης ήταν $E_0 = 10J$ και από την στιγμή της έναρξης της ταλάντωσης μέχρι το τέλος της 10ης περιόδου το έργο της δύναμης απόσβεσης ισούται με $W_{F'} = -4J$. Η ενέργεια της ταλάντωσης στο τέλος της 10ης περιόδου ισούται με:

(α) $1J$

(β) $9,6J$

(γ) $3J$

(δ) $6J$

1.3 Μονοχρωματική Ακτίνα φωτός μεταβαίνει από διαφανές μέσο Α σε άλλο διαφανές μέσο Β. Αν η γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_a = 30^\circ$ και η γωνία διάθλασης είναι $\theta_b = 45^\circ$ τότε η ταχύτητα διάδοσης της μονοχρωματικής ακτινοβολίας στο μέσο Β είναι:

- (α) μικρότερη απο αυτή στο μέσο Α
- (β) ίση με αυτή στο μέσο Α
- (γ) μεγαλύτερη απο αυτη στο μέσο Α
- (δ) εξαρτάται από τη συχνότητα της μονοχρωματικής ακτινοβολίας.

1.4 Στην ηρεμή επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος, τα οποία δημιουργούνται από δύο σύμφωνες πηγές Π_1 και Π_2 . Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές παραμένει συνεχώς ακίνητο μετά την συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο πηγών ισούται με:

- (α) $0rad$
- (β) $\frac{\pi}{2}rad$
- (γ) πrad
- (δ) $\frac{2\pi}{3}rad$

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** καθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, είναι απλή αρμονική ταλάντωση.
- (β) Αν μεταβληθεί η σταθερά αυτεπαγωγής του πηνίου σε ένα κύκλωμα LC με αντιστάτη και πηγή εναλασσόμενης τάσης, τότε μεταβάλλεται η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.
- (γ) Οι ερυθρές ακτίνες έχουν μικρότερο μήκος κύματος από τις υπέρυθρες.
- (δ) Ο δείκτης διάθλασης του θαλασσινού νερού είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας.
- (ε) Το μήκος κύματος μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας μειώνεται, όταν αυτή διαδίδεται από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο μέσο.

Θέμα 2ο

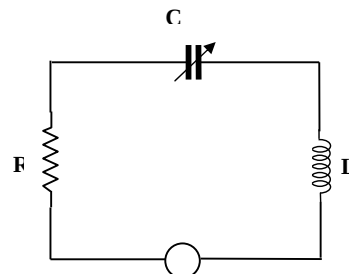
2.1 Κύκλωμα περιλαμβάνει συνδεδεμένα σε σειρά αντιστάτη αντίστασης R , μεταβλητό πυκνωτή χωρητικότητας C και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L . Το κύκλωμα διεγείρεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση συχνότητας f . Μεταβάλλοντας τη χωρητικότητα C του πυκνωτή, το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι μέγιστο όταν $C = C_0$.

Χαρακτηρίστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

(α) Η χωρητικότητα C_0 του πυκνωτή είναι ίση με:

$$C_0 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

(β) Αν η χωρητικότητα του πυκνωτή γίνει ίση με $C = 4C_0$, η συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος υποδιπλασιάζεται.



Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+3=6 μονάδες)**

2.2. Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 παραγωγής κυμάτων δημιουργούν επιφανειακά κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού πλάτους A και μήκος κύματος $\lambda = 18\text{cm}$ τα οποία συμβάλλουν. Ένα μικρό κομμάτι φελλού είναι σε σημείο M που απέχει από τις πηγές αποστάσεις 90cm και 72cm αντίστοιχα. Όταν κύματα δίδει μόνο η μία πηγή ο φελλός έχει ενέργεια ταλάντωσης $9 \cdot 10^{-3}\text{J}$. Όταν έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων:

2.2.1 Ο φελλός είναι σε:

- (α) Υπερβολή ενίσχυσης.
- (β) Υπερβολή απόσβεσης.
- (γ) Ενδιάμεση κατάσταση.

2.2.2. Η ενέργεια του φελλού είναι:

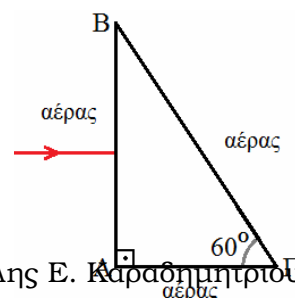
- (α) $9 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (β) $18 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (γ) $36 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (δ) $72 \cdot 10^{-3}\text{J}$

2.2.3 Η περίοδος των κυμάτων τριπλασιάζεται. Ο φελλός έχει ενέργεια:

- (α) $9 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (β) $27 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (γ) $81 \cdot 10^{-3}\text{J}$
- (δ) $1 \cdot 10^{-3}\text{J}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+2+2=6 μονάδες)**

2.3. Στο σχήμα φαίνεται η κάθετη τομή ενός ορθογώνιου πρίσματος που βρίσκεται στον αέρα ($n_{\text{αερ}} = 1$). Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει κάθετα στην πλευρά AB και εισέρχεται στο πρίσμα. Το πρίσμα για την ακτινοβολία αυτή έχει δείκτη διάθλασης $n = 2$. Η ακτίνα στην πλευρά $BΓ$ θα υποστεί:



[http : //perifysikhs.wordpress.com](http://perifysikhs.wordpress.com)

Μιχάλης Ε. Καραδημητρίου

- (α) ανάκλαση και διάθλαση,
- (β) ολική ανάκλαση,
- (γ) μόνο διάθλαση.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5 = 9 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Γραμμικό ελαστικό μέσο εκτείνεται κατα μήκος του οριζοντίου ημιάξονα Οχ. Την χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο Ο του ελαστικού μέσου ($x = 0$), αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η απομάκρυνση της οποίας περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,1\eta\mu(\omega t)(S.I.)$. Η ταλάντωση του σημείου εξελίσσεται στην κατακόρυφη διεύθυνση και έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς την θετική καταύθυνση του ημιάξονα Οχ.

Αν γνωρίζεται ότι τη χρονική στιγμή $0,4s$ το υλικό σημείο Ο έχει εκτελέσει δύο πλήρεις ταλαντώσεις και την ίδια χρονική στιγμή το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι την θέση $x_1 = 4m$, τότε:

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος
- (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Ν, που βρίσκεται στην θέση $x_2 = 3m$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση του σημείου Ο είναι $3,75\pi rad$.
- (γ)
 - i) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή $0,25s$.
 - ii) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια εκείνη τη χρονική στιγμή.

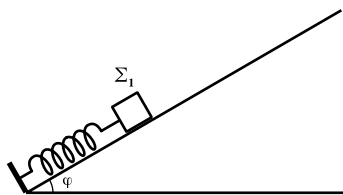
Αν η απλή αρμονική ταλάντωση του υλικού σημείου Ο προκύπτει από την σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται στην κατακόρυφη διεύθυνση και οι απομακρύνσεις τους περιγράφονται από τις εξισώσεις $y_1 = A_1\eta\mu\omega t$ και $y_2 = 0,1\eta\mu(\omega t + \pi)$ τότε:

- (δ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης y_1 σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Δίνεται ότι: $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\pi = 3,14$.

(6+7+7+5 μονάδες)

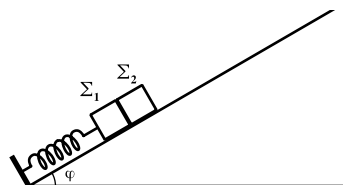
Θέμα 4ο



Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{ kg}$ ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\phi = 30^\circ$. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{ N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 κατά $d_1 = 0,1\text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας του κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και το αφήνουμε ελεύθερο.

- (α) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
 (β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 .

Μετακινούμε το σώμα Σ_1 προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι το ελατήριο να συμπιεστεί από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell = 0,3\text{ m}$. Τοποθετούμε ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{ kg}$ στο κεκλιμένο επίπεδο, ώστε να είναι σε επαφή με το σώμα Σ_1 , και ύστερα αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα.



- (γ) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του.
 (δ) Να υπολογίσετε σε πόση απόσταση από τη θέση που αφήσαμε ελεύθερα τα σώματα χάνεται η επαφή μεταξύ τους.

$$\text{Δίνεται } g = 10\text{ m/s}^2, \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

(5+5+6+9 μονάδες)

Οδηγίες:

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Ελέγχουμε τα αποτελέσματα μας...



Καλή Επιτυχία!

1ο Διαγώνισμα

Μηχανική Στερεού Σώματος

Ημερομηνία:

Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός:

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος, ως προς κάποιο άξονα περιστροφής δεν εξαρτάται από:

- (α) τη μάζα του σώματος.
- (β) το σχήμα του σώματος.
- (γ) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος.
- (δ) τη θέση του άξονα περιστροφής του σώματος.

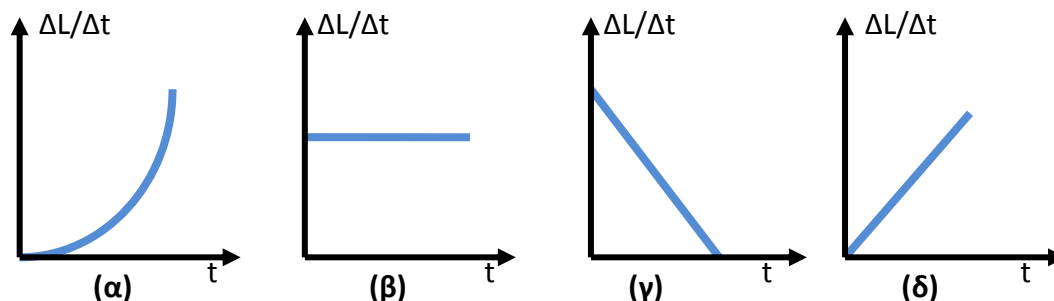
1.2. Μια σφαίρα κυλίεται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση μόνο του βάρους της και της δύναμης που δέχεται από το επίπεδο. Αρχικά η σφαίρα ανεβαίνει και στη συνέχεια κατεβαίνει.

- (α) Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.
- (β) Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.
- (γ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της μεταβάλλεται.
- (δ) Όταν η σφαίρα ανεβαίνει, το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη φορά από την φορά όταν κατεβαίνει.

1.3. Δύο στερεά σώματα εκτελούν στροφική κίνηση με ίδια στροφορμή. Το σώμα με την μεγαλύτερη ροπή αδράνειας:

- (α) έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια και μικρότερη γωνιακή ταχύτητα.
- (β) έχει μικρότερη κινητική ενέργεια και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.
- (γ) έχει μικρότερη κινητική ενέργεια και μικρότερη γωνιακή ταχύτητα.
- (δ) έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.

1.4. Οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς εφαπτόμενη σε αυτόν. Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο:

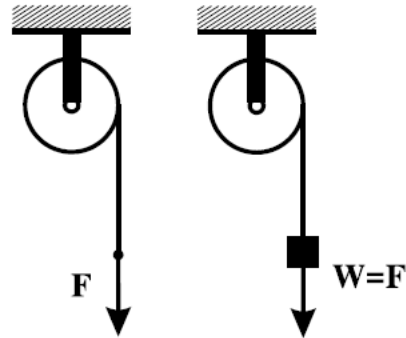


1.5. Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση.
(5 × 1 = 5 μονάδες)

- (α) Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια στην μεταφορική κίνηση.
- (β) Όταν ένας αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας, η γωνιακή ταχύτητά του λόγω ιδιοπεριστροφής αυξάνεται
- (γ) Όταν ο φορέας της δύναμης, η οποία ασκείται σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.
- (δ) Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα έχει πάντοτε μηδενική γωνιακή επιτάχυνση.
- (ε) Στη μεταφορική κίνηση ενός σώματος κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία του έχουν την ίδια ταχύτητα.

Θέμα 2ο

2.1. Τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα. Όταν στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω μέτρου F , η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$ ενώ, όταν κρεμάμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος σώμα βάρους $W = F$ η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu,2}$. Ισχύει:



(α) $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$

(β) $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} > \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$

(γ) $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} < \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

(4+5 = 9 μονάδες)

2.2. Δυο συμπαγείς ομογενείς σιδερένιες σφαίρες με μάζες M_1 , M_2 και ακτίνες R_1 , R_2 , αφήνονται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ , οπότε κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.

Αν δίνεται ότι $M_1 = 8M_2$ και ότι $I_{cm\sigma\phi} = \frac{2}{5}M_{\sigma\phi}R_{\sigma\phi}^2$, τότε για τις γωνιακές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν θα ισχύει:

(α) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 4\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$

(β) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1}$

(γ) $\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 2\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Δίνεται ο όγκος της σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

(3+4=7 μονάδες)

2.3. Χορεύτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ στρέφεται χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα έχοντας τα χέρια της ανοιχτά. Όταν συμπτύσσει τα χέρια της μεταβάλλει την γωνιακή της ταχύτητα κατά 60 % . Ο λόγος της αρχικής προς την τελική κινητική της ενέργεια είναι:

(α) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{8}$

(β) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{3}$

(γ) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{5}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(3+4 = 7 μονάδες)

Θέμα 3ο

Ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας $M = 2kg$ και μήκους $L = 1,5m$, ισορροπεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο Γ της ράβδου στηρίζεται μέσω αβαρούς νήματος που είναι δεμένο στον τοίχο, σχηματίζοντας γωνία θ με την ράβδο.



- A.** Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που δρουν στην ράβδο
- B.** Να υπολογιστεί η τάση του νήματος και η δύναμη που δέχετε η ράβδος από την άρθρωση.
- Γ.** Κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται και η ράβδος αρχίζει την πτώση της. Να υπολογιστεί:
- το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα.
 - το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου την στιγμή που γίνεται οριζόντια.
 - το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου την ίδια χρονική στιγμή.

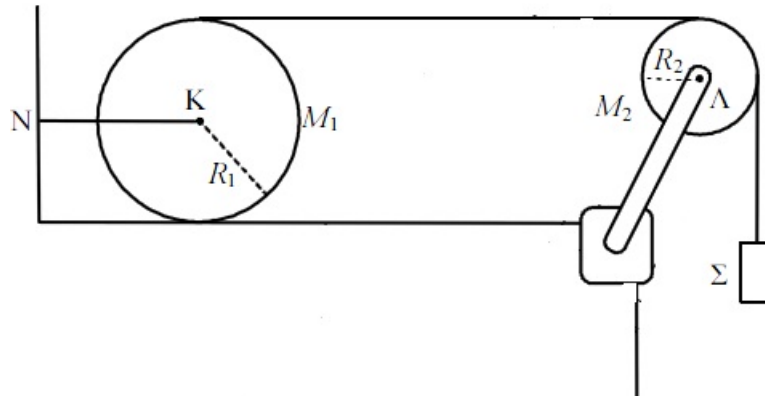
Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10m/s^2$.
Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$

(2+5+7+7+4 = 25 μονάδες)

Θέμα 4ο

Ομογενής κύλινδρος μάζας $M_1 = 8kg$ και ακτίνας $R_1 = 0,2m$, τροχαλία μάζας $M_2 = 3kg$ και ακτίνας $R_2 = 0,1m$ και ένα σώμα Σ, μάζας $m = 3kg$ συνδέονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Ο κύλινδρος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και έχει τυλιγμένο γύρω του πολλές φορές το νήμα. Το νήμα που παραμένει συνεχώς οριζόντιο, αφού περάσει από την περιφέρεια της τροχαλίας, στερεώνεται στο σώμα Σ. Ένα δεύτερο οριζόντιο αβαρές και μη εκτατό νήμα ΝΚ συνδέει το κέντρο Κ του κυλίνδρου με το σημείο Ν του τοίχου, έτσι ώστε το σύστημα να ισορροπεί.



- A.** Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος NK
- B.** Την χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα NK, οπότε το σώμα Σ κατέρχεται με επιτάχυνση $a = 4m/s$, ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας και του κυλίνδρου.

Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της τριβής που δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο δάπεδο.
- την γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας, την χρονική στιγμή t_1 που το σώμα έχει κατέλθει κατά $8m$.
- το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στην τροχαλία για το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως t_1 .
- το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, την χρονική στιγμή κατά την οποία η στροφορμή της τροχαλίας έχει μέτρο ίσο με $1,5kg\frac{m^2}{s}$.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2$.

(4+6+4+4+6 = 25 μονάδες)

Οδηγίες

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας...



Καλή Επιτυχία!

Διαγώνισμα

Μηχανική Στερεού Σώματος - Κρούσεις

Ημερομηνία:
Ονοματεπώνυμο:
Βαθμός:

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v . Στην πορεία συγκρούεται μετωπικά με άλλο σώμα και επιστρέφει κινούμενο με ταχύτητα μέτρου $2v$. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του είναι:

- (α) 0
- (β) mv
- (γ) $2mv$
- (δ) $3mv$

1.2. Άνθρωπος βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοντά στο κέντρο οριζόντιου δίσκου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του. Αν ο άνθρωπος μετακινηθεί στην περιφέρεια του δίσκου, τότε η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ω_2 θα είναι:

- (α) $\omega_2 = \omega_1$
- (β) $\omega_2 > \omega_1$
- (γ) $\omega_2 < \omega_1$
- (δ) $\omega_2 = 0$

1.3 Μικρό σώμα μάζας $m_1 = m$ έχει κινητική ενέργεια K και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο μικρό σώμα μάζας $m_2 = 4m$. Η απώλεια μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης ισούται με:

- (α) $0,2K$
- (β) $0,4K$
- (γ) $0,5K$
- (δ) $0,8K$

1.4 Μια σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο: $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που εμφανίζεται με την μορφή κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ισούται με:

- (α) 40 %
- (β) $\frac{400}{3}$ %
- (γ) $\frac{200}{7}$ %
- (δ) $\frac{500}{3}$ %

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

- (α) Ένας αθλητής καταδύσεων, καθώς περιστρέφεται στον αέρα, συμπύσσει τα άκρα του. Με την τεχνική αυτή αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.
- (β) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.
- (γ) Στις ανελαστικές κρούσεις δεν διατηρείται η ορμή.
- (δ) Όταν μια μικρή σφαίρα προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου, ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση.
- (ε) Όταν δύο μικρές σφαίρες ίδιας μάζας συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά ανταλλάσουν κινητικές ενέργειες.

Θέμα 2ο

2.1 Δύο δακτύλιοι (I) και (II) με ίσες ακτίνες $R_1 = R_2 = R$ και με μάζα M_1 και M_2 αντίστοιχα εκτοξεύονται από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου έχοντας στροφορμές ίσου μέτρου, και κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν ανεβαινοντας σε αυτό. Ο δακτύλιος (I) φτάνει σε μέγιστο ύψος h από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου, ενώ ο δακτύλιος (II) φτάνει σε μέγιστο ύψος $4h$.

(α) Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης κάθε δακτυλίου, για όσο χρόνο αυτός κινείται στο κεκλιμένο επίπεδο, ισούται με:

- i) 0,4 ii) 0,5 iii) 1

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(1+2=3 μονάδες)**

(β) Οι μάζες των δυο δακτυλίων ικανοποιούν τη σχέση:

- i) $M_1 = 2M_2$ ii) $M_1 = 4M_2$ iii) $M_1 = 0,5M_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(2+3=5 μονάδες)**

2.2. Σφαίρα μάζας m_1 προσπίπτει με ταχύτητα v_1 σε ακίνητη σφαίρα m_2 , με την οποία συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_1 γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου ίσου με το $1/5$ της αρχικής της τιμής. Για τον λόγο των μαζών ισχύει:

(α) $\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}$

(β) $\frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3}$

(γ) $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(4+5 = 9 μονάδες)**

2.3. Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα v_1 συγκρούεται κεντρικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $v'_1 = -\frac{1}{2}v_1$ και το σώμα μάζας m_2 με ταχύτητα $v'_2 = \frac{1}{4}v_1$. Η σύγκρουση των σωμάτων είναι:

(α) ανελαστική

(β) ελαστική

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+5 = 7 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μάζας $M = 2kg$ και μήκους $L = \frac{12}{7}m$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το σημείο της O. Η απόσταση AO είναι ίση με $\frac{L}{4}$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως



προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της M και είναι κάθετος σ' αυτή είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Η ράβδος διατηρείται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο άκρο B. Κόβουμε το νήμα. Να βρείτε:

- την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί.
- τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.
- τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

(6+5+7+7 μονάδες)

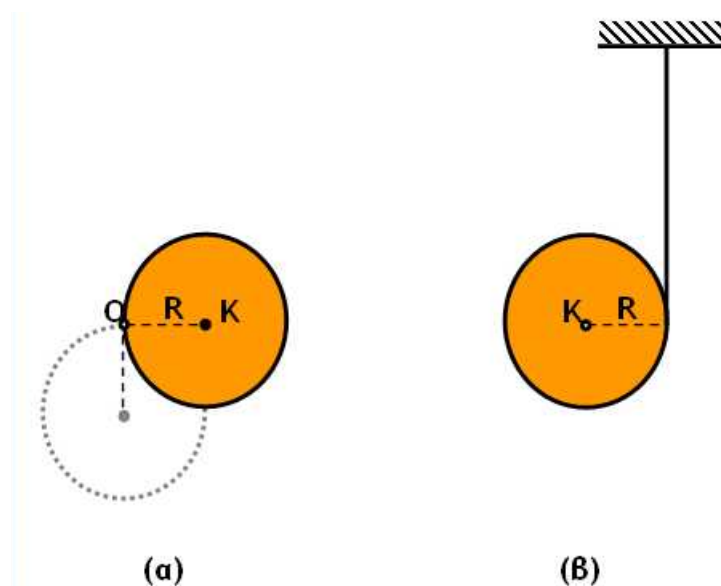
Θέμα 4ο

Ο λεπτός ομογενής δίσκος του σχήματος (α) έχει μάζα $M = 9kg$, ακτίνα $R = \frac{1}{30}m$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο O της περιφέρειάς του.

Αρχικά ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα OK που συνδέει το σημείο O με το κέντρο μάζας K του δίσκου (που συμπίπτει με το κέντρο του δίσκου), να είναι οριζόντια. Από αυτή τη θέση αφήνουμε το δίσκο να στραφεί. Η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία ο δίσκος ξεκινά τη στροφική του κίνηση έχει μέτρο $\alpha_{γων} = 200rad/s^2$.

Να βρείτε:

- Τη ροπή αδράνειας $I_{(O)}$ του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από το σημείο O.
- Τυλίγουμε πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα γύρω από έναν ίδιο δίσκο και την ελεύθερη άκρη του νήματος τη στερεώνουμε στην οροφή, σχηματίζοντας ένα γιο-γιο, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αυτός ξεκινά να κατέρχεται με το νήμα διαρκώς κατακόρυφο και χωρίς αυτό να γλιστρά ως προς το δίσκο.



- (β.1) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.
- (β.2) Να δείξετε ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο δίσκο δε μεταβάλλει την συνολική κινητική του ενέργεια.
- (β.3) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.
- (β.4) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. . Επίσης δεν θεωρείται γνωστός ο τύπος της ροπής αδράνειας ομογενή δίσκου για άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

(4+4+6+6+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας...



Καλή Επιτυχία!

Τελικό Διαγώνισμα Απρίλης 2012

Ημερομηνία :
Ονοματεπώνυμο :
Βαθμός :

Διάρκεια: 3 ώρες

Θέμα 1ο

Στις ερωτήσεις 1.1 - 1.4 επιλέξτε την σωστή απάντηση ($4 \times 5 = 20$ μονάδες)

1.1. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα $L - C$ το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $q = Q \sin \omega t$. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μεγιστοποιείται τις χρονικές στιγμές που :

- (α) το φορτίο του πυκνωτή παίρνει την μέγιστη τιμή του
- (β) είναι περίττα πολλαπλάσια του $\frac{T}{4}$
- (γ) είναι πολλαπλάσια του $\frac{T}{2}$
- (δ) ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή ισούται με μηδέν.

1.2. Από την σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης και ίδιας θέσης ισορροπίας που περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = A \eta \mu \omega_1 t$ και $x_2 = A \eta \mu \omega_2 t$ με $\omega_1 \approx \omega_2$, προκύπτει περιοδική κίνηση με συχνότητα ίση με :

- (α) $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$
- (β) $\omega = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$
- (γ) $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
- (δ) $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

1.3 Ένα συστημα σώμα-ελατήριο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα $f = 2f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Για να πετύχουμε κατάσταση συντονισμού αρκεί να αντικαταστήσουμε το σώμα του συστήματος που έχει μάζα m , με άλλο σώμα που έχει μάζα m' , ίση με :

- (α) $2m$

(β) $4m$

(γ) $\frac{m}{2}$

(δ) $\frac{m}{4}$

1.4 Όταν ένας παρατηρητής πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα μια ακίνητη πηγή τότε ακούει ήχο

(α) σταθερής συχνότητας μεγαλύτερης από την συχνότητα που παράγει η πηγή

(β) συχνότητας η οποία αυξάνεται όσο ο παρατηρητής έρχεται πιο κοντά στην πηγή

(γ) συχνότητας η οποία μειώνεται όσο ο παρατηρητής έρχεται πιο κοντά στην πηγή

(δ) σταθερής συχνότητας μικρότερης από την συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή

1.5 Σημειώστε με **(Σ)** κάθε σωστή πρόταση και με **(Λ)** κάθε λανθασμένη πρόταση. **(5 × 1 = 5 μονάδες)**

(α) Το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης μπορεί να συμβεί όταν μια ακτινοβολία προσπίπτει κάθετα στην διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων.

(β) Η κρούση μεταξύ δυο σωματιδίων του μικρόκοσμου είναι απολύτως ελαστική και ονομάζεται σκέδαση.

(γ) Ο ήχος είναι εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

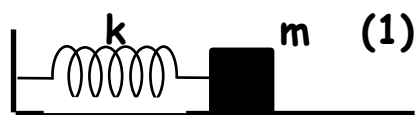
(δ) Κατά την κρούση δύο σωμάτων η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται πάντα σταθερή.

(ε) Το σπιν της Γης παραμένει σταθερό διότι η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη κάθε στιγμή από τον Ήλιο, δεν δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

Θέμα 2ο

2.1 Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο συστήματα ελατηρίου μάζας (1) και (2) που το καθένα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Οι ολικές ενέργειες των δύο συστημάτων είναι ίσες.

A. ο λόγος των πλατών $\frac{A_1}{A_2}$ των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με:



[http : //perifysikhs.wordpress.com](http://perifysikhs.wordpress.com)

- (α) $\sqrt{2}$
 (β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (γ) 2
 (δ) $2\sqrt{2}$

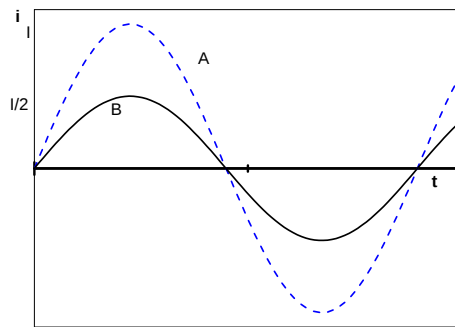
Β. Ο λόγος των πλάτων των ταχυτήτων $\frac{v_{max(1)}}{v_{max(2)}}$ των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με :

- (α) $\sqrt{2}$
 (β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (γ) 2
 (δ) $2\sqrt{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **(2+3+2+2=9 μονάδες)**

2.2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο δύο κυκλωμάτων $L_A - C_A$ και $L_B - C_B$ των οποίων τα πηνία έχουν τον ίδιο συντελεστή αυτεπαγωγής ($L_A = L_B = L$). Οι λόγοι των χωρητικότητων των πυκνωτών $\frac{C_A}{C_B}$ και των ενεργειών των κυκλωμάτων $\frac{E_A}{E_B}$ είναι αντίστοιχα ίση με :

- (α) 1 και 2
 (β) 4 και 4
 (γ) 1 και 4
 (δ) 2 και 2



Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. **(3+4 = 7 μονάδες)**

2.3. Μια ηχητική πηγή S κινείται με ταχύτητα $v_S = 25\% v_{\eta\chi}$, όπου $v_{\eta\chi}$ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα. Στην ευθεία κίνησης της ηχητικής πηγής βρίσκονται δύο ακίνητοι παρατηρητές A_1 και A_2 σε τέτοιες θέσεις, ώστε η πηγή να απομακρύνεται από τον παρατηρητή A_1 και να πλησιάζει τον παρατηρητή A_2 . Ο λόγος των συχνοτήτων $\frac{f_{(A_1)}}{f_{(A_2)}}$ που αντιλαμβάνονται οι δύο παρατηρητές είναι ίσος με :

- (α) $\frac{1}{5}$ (β) $\frac{2}{5}$ (γ) $\frac{3}{5}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+2=4 μονάδες)**

2.4. Σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων είναι ίσο με:

$$(α) \frac{m_1}{m_2} 100\% \quad (β) \frac{m_1}{m_1+m_2} 100\% \quad (γ) \frac{m_2}{m_1+m_2} 100\%$$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(2+3 = 5 μονάδες)**

Θέμα 3ο

Τεντωμένο νήμα ΟΑ που θεωρείται γραμμικό ελαστικό μέσο εκτείνεται κατα μήκος του θετικού ημιάξονα $x'Ox$. Το ελεύθερο άκρο του νήματος ταυτίζεται με την αρχή Ο του άξονα, ενώ το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο. Κατά μήκος του νήματος και προς την θετική κατεύθυνση διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με εξίσωση $y_1 = 0,2\eta\mu\pi(5t - 5x)(S.I.)$. Κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα διαδίδεται άλλο εγκάρσιο αρμονικό κύμα ίδιου πλάτους και συχνότητας που όταν συμβάλλει με το προηγούμενο κύμα δημιουργεί στάσιμο κύμα.

Το σημείο Ο ταλαντώνεται λόγω του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά χωρίς αρχική φάση.

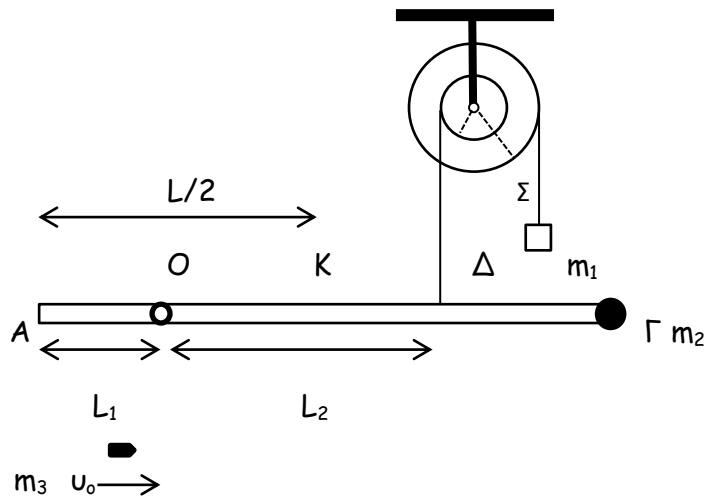
- (α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος, την συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων.
- (β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά και την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δυο κυμάτων.
- (γ) Ένα σημείο Β του νήματος βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένη $x_B = \frac{1}{3}m$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του.
- (δ) Το στάσιμο κύμα εμφανίζει συνολικά πέντε δεσμούς. Να βρεθεί το μήκος του νήματος.
- (ε) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,1sec$ και $t_2 = 0,3sec$.

Στις πράξεις σας θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$.

(3+4+6+6+6 μονάδες)

Θέμα 4ο

Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $L = 4m$ και μάζας $M = 3kg$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο της Ο, το οποίο απέχει απόσταση $L_1 = 1m$ από το άκρο Α. Στο άκρο Γ της ράβδου έχουμε κολλήσει σημειακή μάζα $m_2 = 2kg$, ενώ στο σημείο Δ που απέχει απόσταση $L_2 = 1,8m$ από το σημείο Ο, είναι δεμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα που είναι τυλιγμένο στο μικρό αυλάκι διπλής τροχαλίας ακτίνας r . Στην περιφέρεια της τροχαλίας ακτίνας $R = 0,1m$ είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1 = 1kg$. Το σύστημα στην αρχή ισορροπεί.



- A.** (α) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο και να βρεθεί η ακτίνα r του μικρού αυλακιού της διπλής τροχαλίας.
- (β) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σώματος m_2 , ως προς τον άξονα περιστροφής.
- B.** Κάποια στιγμή το νήμα που συνδέει την ράβδο με την τροχαλία κόβεται, οπότε η ράβδος μαζί με το σώμα που είναι στερεωμένο στο άκρο της αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να κατέρχεται περιστρέφοντας την τροχαλία, μέσω του τεντωμένου νήματος που δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της. Να υπολογιστεί:
- (α) Την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και της ράβδου την στιγμή που κόβεται το νήμα.
- (β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 , όταν θα έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $l = 2m$.
- (γ) Την ταχύτητα του σώματος m_2 στο άκρο της ράβδου την στιγμή που φτάνει στην κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά.

Γ. Όταν η ράβδος φτάσει στην κατακόρυφη θέση, συγκρούεται πλαστικά με σημειακή μάζα $m_3 = 11kg$, οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 με φορά προς τα δεξιά. Η σύγκρουση γίνεται στο κέντρο Κ της ράβδου. Αμέσως μετά την σύγκρουση η ράβδος έχει φορά περιστροφής αντίθετη της αρχικής και ακινητοποιείται στιγμιαία όταν γίνει οριζόντια. Να υπολογιστεί:

(α) Το μέτρο της στροφορμής της ράβδου ελάχιστα πριν τη σύγκρουση.

(β) Το μέτρο της ταχύτητας v_0 .

Δίνεται $g = 10m/s^2$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, ενώ η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας είναι $I_{τροχ} = 0,09kgm^2$.

(3+2+4+4+4+3+5 μονάδες)

Οδηγίες

- Το άγχος δεν βοήθησε ποτέ κανένα!
- Γράφουμε όλες τις απαντήσεις στην κόλλα αναφοράς
- Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι σωστή
- Ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας...



Καλή Επιτυχία!

Μέρος II

Χρήσιμη Τριγωνομετρία

Πίνακας ημιτόνων συνημιτόνων

ϕ (rad)	$\eta\mu(\phi)$	$\sigma\upsilon\nu(\phi)$	$\varepsilon\phi(\phi)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	δ.ο.
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	δ.ο.
2π	0	1	0

Χρήσιμες σχέσεις

$$\eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\phi = 1, \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu(\phi_1 \pm \phi_2) &= \eta\mu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2 \pm \eta\mu\phi_2\sigma\upsilon\nu\phi_1 \\ \sigma\upsilon\nu(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sigma\upsilon\nu\phi_1\sigma\upsilon\nu\phi_2 \mp \eta\mu\phi_1\eta\mu\phi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu\phi_1 + \eta\mu\phi_2 &= 2\eta\mu\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \\ \eta\mu\phi_1 - \eta\mu\phi_2 &= 2\eta\mu\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu 2\phi &= 2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi \\ \sigma\upsilon\nu 2\phi &= \sigma\upsilon\nu^2\phi - \eta\mu^2\phi\end{aligned}$$

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Ημιτόνου

$$\eta\mu x = \eta\mu\phi \Rightarrow x = 2k\pi + \phi \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \phi \text{ για } k = 0, 1, 2, \dots$$

Συνημιτόνου

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \phi \text{ για } k = 0, 1, 2, \dots$$

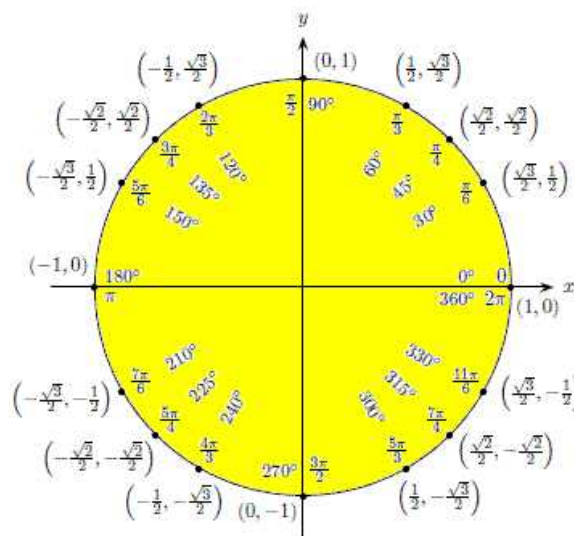
Εφαπτομένης

$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\phi \Rightarrow x = k\pi + \phi \text{ για } k = 0, 1, 2, \dots$$

Τριγωνομετρικός Κύκλος

$$\eta\mu(2k\pi + \phi) = \eta\mu\phi, \quad \sigma\upsilon\nu(2k\pi + \phi) = \sigma\upsilon\nu\phi, \text{ για } k=0,1,2,\dots$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\phi) = \sigma\upsilon\nu\phi, \quad \eta\mu(-\phi) = -\eta\mu\phi = \eta\mu(\phi + \pi)$$



- **1ο τεταρτημόριο** $\eta\mu\phi > 0, \sigma\upsilon\nu\phi > 0$
- **2ο τεταρτημόριο** $\eta\mu\phi > 0, \sigma\upsilon\nu\phi < 0$
- **3ο τεταρτημόριο** $\eta\mu\phi < 0, \sigma\upsilon\nu\phi < 0$
- **4ο τεταρτημόριο** $\eta\mu\phi < 0, \sigma\upsilon\nu\phi > 0$

Διαφορά φάσης

$$\eta\mu\phi = \sigma\upsilon\nu(\pi/2 - \phi), \quad \sigma\upsilon\nu\phi = \eta\mu(\pi/2 - \phi)$$