

5 Σύνθεση Ταλαντώσεων

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση. Το αποτέλεσμα είναι, γενικά, μια πολύπλοκη κίνηση, της οποίας η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων. Η κίνηση που κάνει το σώμα ονομάζεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **Σύνθεση ταλαντώσεων**. Στο παρόν μάθημα θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις σύνθετης ταλάντωσης.

Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια συχνότητα και γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο. Έστω ότι ένα σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που :

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,
- έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και
- έχουν πλάτη A_1 και A_2 και διαφορά φάσης ϕ .

Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων για τις δύο ταλαντώσεις θα είναι αντίστοιχα :

$$x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t) \quad x_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ κάθε χρονική στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \eta \mu(\omega t) + A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να πάρει την μορφή :

$$x = A \eta \mu(\omega t + \theta) \quad (73)$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi} \quad (74)$$

και

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi} \quad (75)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η κίνηση του Σώματος Σ είναι επίσης απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το ίδιο σημείο, της ίδιας διεύθυνσης και της ίδιας συχνότητας με πλάτος A και διαφορά φάσης θ με την ταλάντωση με εξίσωση $x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t)$.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν εύκολα να προκύψουν με την χρήση της Αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος για τις δύο ταλαντώσεις και την σύνθεσή τους.

Ειδικές περιπτώσεις

(α) Όταν είναι $\phi = 0$, τότε οι σχέσεις (74),(75) γράφονται:

$$A = \sqrt{A_1 + A_2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \Rightarrow A = A_1 + A_2$$

και

$$\epsilon\phi\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\text{rad}$$

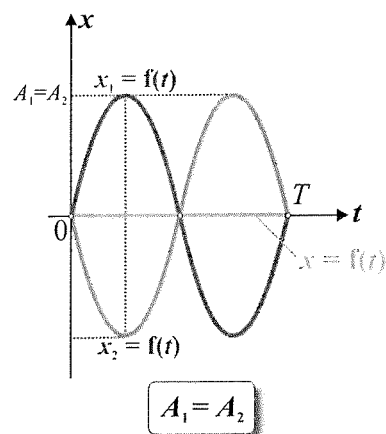
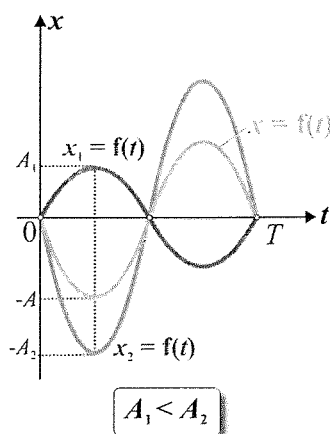
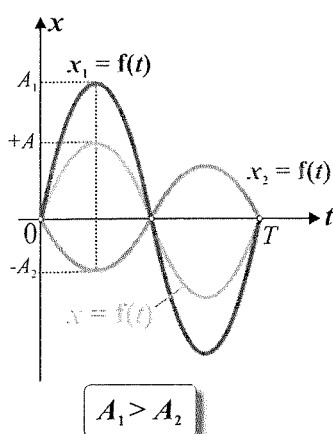
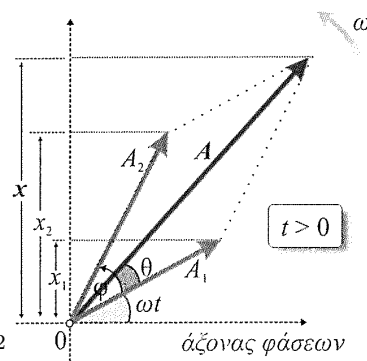
Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλάτων A_1, A_2 των επιμέρους ταλαντώσεων.

(β) Όταν $\phi = \pi\text{rad}$, τότε η σχέση (74)γράφεται:

$$A = \sqrt{A_1 + A_2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \Rightarrow A = |A_1 - A_2|$$

και η σχέση (75) δίνει $\theta = 0$ ή $\theta = \pi\text{rad}$.

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των επιμέρους πλάτων και η φάση είναι ίση με την φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος (δηλαδή $\theta = 0$, αν $A_1 > A_2$, και $\theta = \pi$, όταν είναι $A_1 < A_2$).



Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση, γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με ίδιο πλάτος και διαφορετική συχνότητα. Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που:

- Εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας,
- έχουν το ίδιο πλάτος A και τους,
- οι γωνιακές συχνότητες τους ω_1 και ω_2 διαφέρουν λίγο μεταξύ τους.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν δύο τέτοιες ταλαντώσεις είναι αντίστοιχα:

$$x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t) \quad x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$$

Σύμφωνα με την **Αρχή της Επαλληλίας των κινήσεων**, η απομάκρυνση του σώματος Σ κάθε χρονική στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί σε αυτό κάθε ταλάντωση ξεχωριστά. Άρα θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = A\eta\mu(\omega_1 t) + A\eta\mu(\omega_2 t) = A(\eta\mu(\omega_1 t) + \eta\mu(\omega_2 t))$$

και με την χρήση της αντίστοιχης τριγωνομετρικής ταυτότητας προκύπτει ότι:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (76)$$

Επειδή όμως οι συχνότητες ω_1, ω_2 διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους, από την τελευταία σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Ο παράγοντας

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (77)$$

μεταβάλλεται με τον χρόνο πολύ αργά σε σχέση με τον δεύτερο παράγοντα $\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον παράγοντα αυτό ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης, το οποίο μεταβάλλεται με αργό ρυθμό από $|A'| = 0$ μέχρι $|A'| = 2A$.

- Ο παράγοντας $\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$ μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο με γωνιακή συχνότητα $\bar{\omega}$

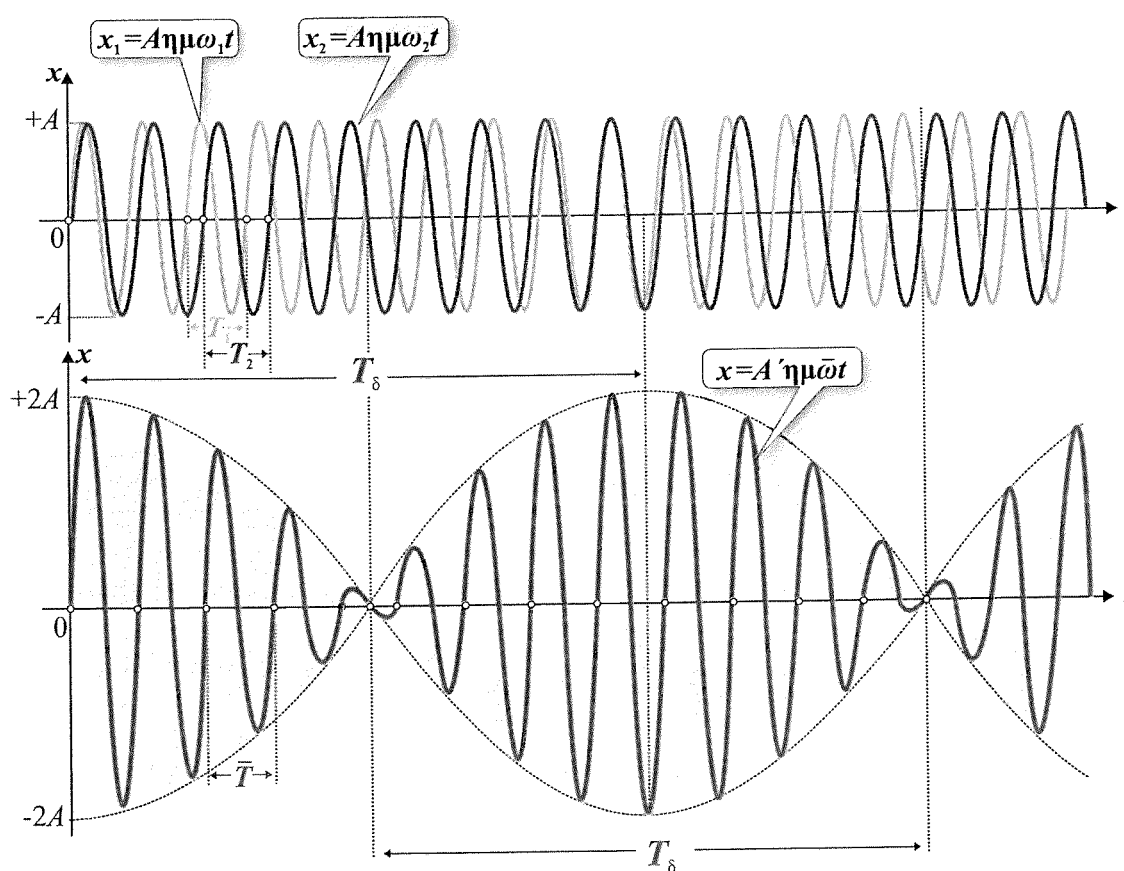
$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2 \quad (78)$$

Επομένως η εξίσωση (76) γράφεται:

$$x = A'\eta\mu(\bar{\omega}t) \quad (79)$$

η παραπάνω σχέση περιγράφει μια **ιδιόμορφη ταλάντωση** που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επιμέρους ταλαντώσεις και πλάτος $|A'|$ που μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι $2A$. Λέμε ότι η κίνηση του σώματος Σ παρουσιάζει **διακροτήματα**. Δηλαδή:

Διακρότημα ονομάζεται η ιδιόμορφη ταλάντωση που προκύπτει από την σύνθεση δυο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο πλάτος και οι συχνότητες τους διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.



Σχήμα 20: Η σύνθεση δύο ταλαντώσεων με κοντινές συχνότητες

Ο χρόνος T_δ ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους, ονομάζεται **Περίοδος του Διακροτήματος**.

Υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος Από την σχέση (77) προκύπτει ότι το πλάτος A' μηδενίζεται όταν:

$$2A \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) = 0$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t = (2\kappa + 1)\frac{\pi}{2}$$

όπου $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Θέτοντας $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ στην τελευταία σχέση, μπορούμε να έχουμε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικούς χρόνους μηδενισμού του πλάτους Α'. Άρα από τον ορισμό της περιόδου διακροτήματος έχουμε:

$$T_\delta = t_2 - t_1 = \frac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Rightarrow T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi|f_1 - f_2|}$$

Άρα η περίοδος διακροτήματος δίνεται από την σχέση:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad (80)$$

και η συχνότητα του διακροτήματος που εκφράζει τον αριθμό των διακροτημάτων αναδευτερόλεπτο θα δίνεται από την σχέση:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = |f_1 - f_2| \quad (81)$$

Πρόταση Μελέτης: Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** 8.1 - 8.44, 8.50 - 8.53, 8.55-8.59, 8.62 - 8.65, 8.67, 8.68, 8.70, 8.71, 8.73-8.76, 8.78, 8.83-8.88, 8.90, 8.92, 8.94-8.98