

3 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

3.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο και τελικά μηδενίζεται λέγονται **Φθίνουσες ή Αποσβεννύμενες**. Όλες οι ταλαντώσεις στην φύση είναι φθίνουσες, γιατί καμμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις. Η απόσβεση (δηλαδή η ελάττωση) του πλάτους μιας ταλάντωσης οφείλεται στις δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση του. Επειδή αυτές οι δυνάμεις είναι αντίθετες με την ταχύτητα, παράγουν συνεχώς αρνητικό έργο με αποτέλεσμα να μεταφέρουν συνεχώς ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι η ολική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης, που εξαρτάται από την ολική ενέργεια μειώνεται.

Γενικά οι δυνάμεις που προκαλούν μείωση του πλάτους δεν είναι ευκολο να προσδιοριστούν. Μια περίπτωση με μεγάλο ενδιαφέρον είναι η περίπτωση της δύναμης που είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

$$F' = -bv \quad (62)$$

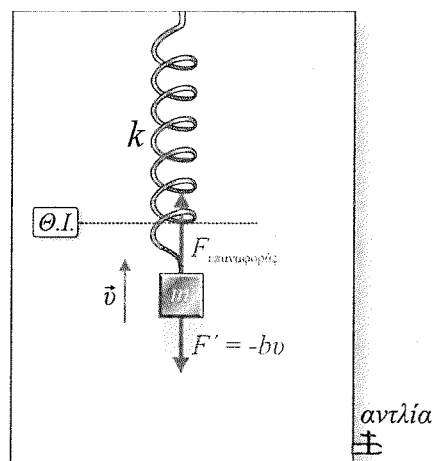
Μια τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στο νερό ή στον αέρα.

Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική ποσότητα που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Η μονάδας μέτρησης στο $S.I.$ είναι το $1 kg/s$. Από την μορφή της δύναμης είναι εμφανές ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης θα εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b . Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η μείωση του πλάτους σε κάθε περίοδο.

Χρησιμοποιώντας την διάταξη του διπλανού σχήματος και για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης, παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, στις οποίες αποδίδεται η απομάκρυνση x σε συνάρτηση με τον χρόνο για μηδενική, μικρή, μεσαία και μεγάλη απόσβεση.

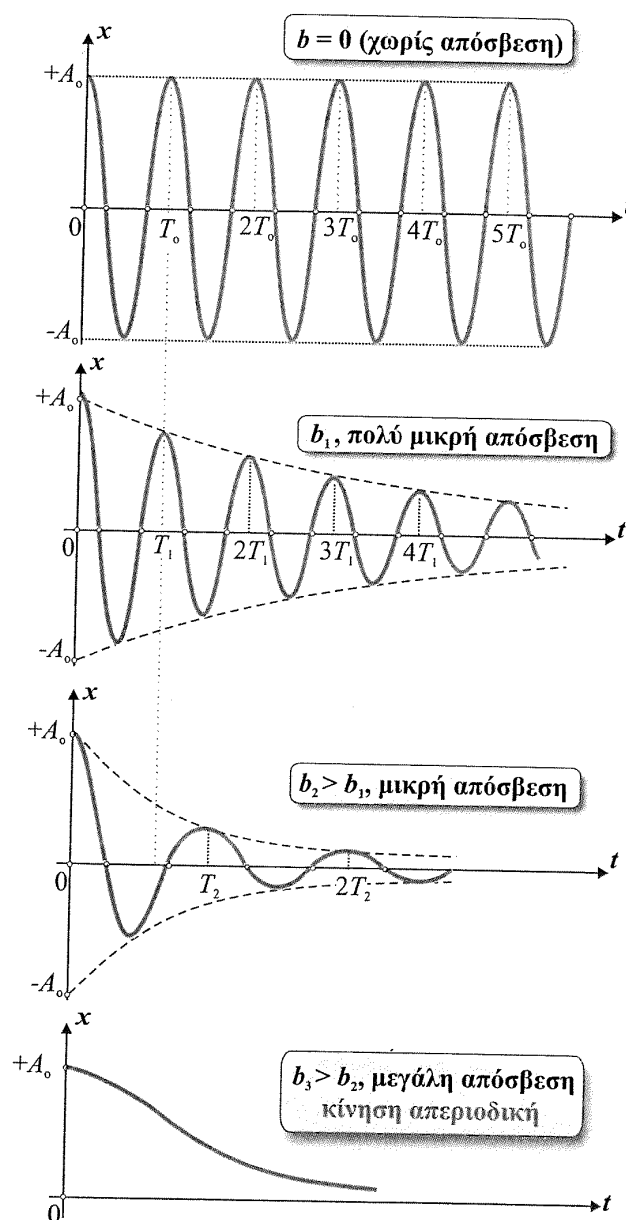
Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν είναι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου**. Το πόσο γρήγορα μειώνεται το πλάτος εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b . Όταν η σταθερά απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. **Στις ακραίες περιπτώσεις που η σταθερά b παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριόδική**, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στην θέση ισορροπίας του και μένει εκεί.



Σχήμα 14: Η άυξηση της πυκνότητας αέρα έχει σαν αποτέλεσμα μείωση του πλάτους

- **Η περίοδος** για ορισμένη τιμή της σταθεράς b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει, η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που, στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου θα θεωρούμε αμελητέα.



Σχήμα 15: Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Η εκθετική μείωση του πλάτους Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (63)$$

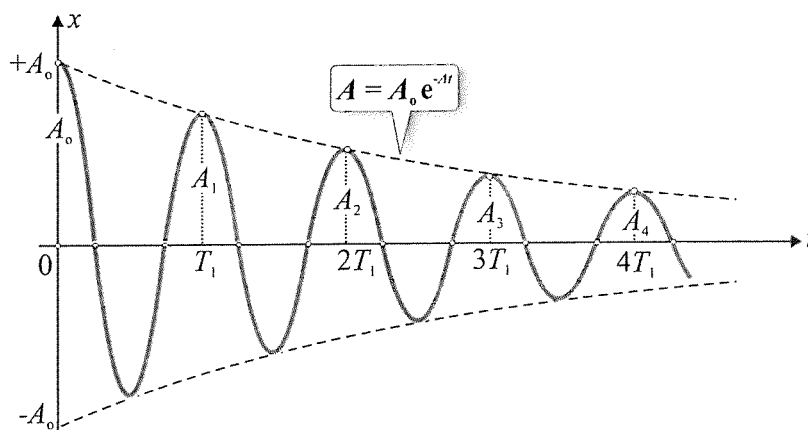
όπου A_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και $\Lambda = \frac{b}{2m}$ είναι μια θετική σταθερά. Η μονάδα μέτρησης της σταθεράς Λ στο $S.I.$ είναι το s^{-1} .

Χρόνος Υποδιπλασιασμού ή ημισείας ζωής του πλάτους Από την σχέση (63) προκύπτει ότι για την μείωση του πλάτους κατά 50% απαιτείτε πάντοτε το ίδιο χρονικό διάστημα $t_{1/2}$ που ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους.

Αν θέσουμε στην σχέση $A = \frac{A_0}{2}$ τότε βρίσκουμε τον χρόνο $t_{1/2}$:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} \quad (64)$$

Άρα ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ανεξάρτητος του αρχικού πλάτους της ταλάντωσης, εξαρτάται αποκλειστικά από την σταθερά Λ .



Σχήμα 16: Η εκθετική μείωση του πλάτους και της μέγιστης απομάκρυνσης

Η εκθετική μείωση της μέγιστης απομάκρυνσης Οι μέγιστες απομακρύνσεις προς την ίδια κατεύθυνση μειώνονται εκθετικά με τον χρόνο. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$A_\kappa = A_0 e^{-\Lambda t}, \quad t = \kappa T, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων, προς την ίδια κατεύθυνση, διατηρείται σταθερός. Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (65)$$

Απόδειξη: Επιλέγοντας τις χρονικές στιγμές $t_1 = \kappa T$ και $t_2 = (\kappa T + 1)T$ βρίσκουμε:

$$\frac{A_{\kappa}}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T)}}{A_0 e^{-\Lambda(\kappa T + 1)}} = e^{\Lambda T} = \sigma \tau \alpha \theta.$$

Η ενέργεια στην φθίνουσα μηχανική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο και θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t}) \Rightarrow E = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t} \quad (66)$$

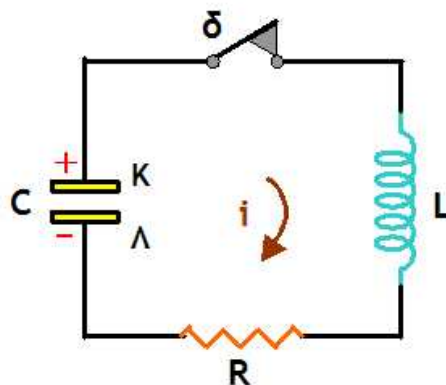
Αντίστοιχα με τον λόγο των διαδοχικών πλατών, αποδικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \dots = \frac{E_{\kappa}}{E_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (67)$$

3.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Σε ένα κύκλωμα $L - C$ για να είναι η ηλεκτρική ταλάντωση αμείωτη, δεν πρέπει να υπάρχει απώλεια ενέργειας, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι φθίνουσες. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή διαρκώς μικραίνουν και τελικά το κύκλωμα πάυει να ταλαντώνεται.

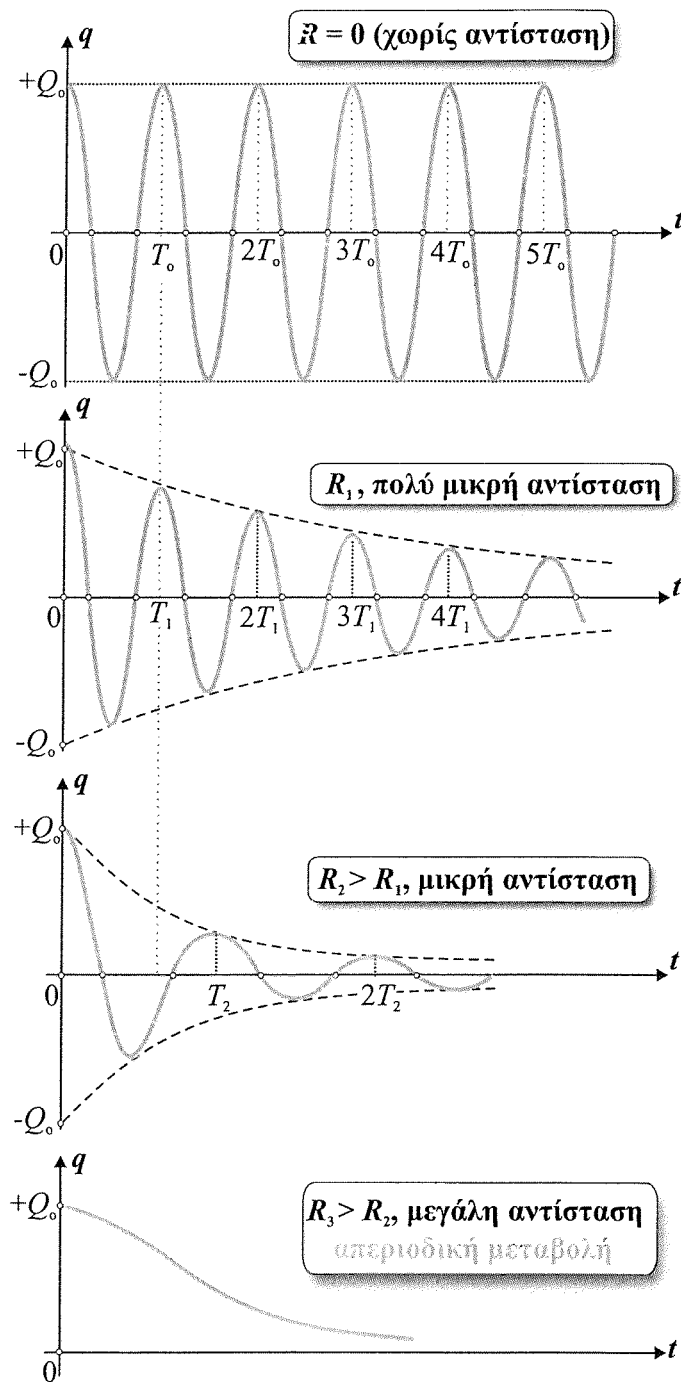
Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων, ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση R , η οποία παίζει για το κύκλωμα τον ίδιο ακριβώς ρόλο που παίζει για τον αρμονικό ταλαντωτή η σταθερά απόσβεσης b . Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη, ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ωμική αντίσταση μετατρέπει βαθμιαία την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα *Joule*, με αποτέλεσμα η ολική ενέργεια και κατά συνέπεια το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή διαρκώς να μειώνεται και τελικά να μηδενίζεται. Μεταβάλλοντας την ωμική αντίσταση R , μπορούμε να λάβουμε τις γραφικές παραστάσεις του φορτίου q του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο t για μηδενική, μικρή, μεσαία και πολύ μεγάλη ωμική αντίσταση.



Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τις γραφικές είναι:

- Ο ρυθμός μείωσης του μέγιστου φορτίου εξαρτάται από την αντίσταση R και, όταν η αντίσταση μεγαλώνει, το μέγιστο φορτίο μειώνεται πιο γρήγορα.
- **Η περίοδος**, για ορισμένη ποσότητα της αντίστασης, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή. Η περίοδος της ταλάντωσης μεγαλώνει όταν μεγαλώνει η αντίσταση. Η άυξηση όμως αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

- Αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.



Σχήμα 17: Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Η εκθετική μείωση του μέγιστου φορτίου του πυκνωτή Αποδεικνύεται ότι η μεταβολή του μέγιστου φορτίου σε συνάρτηση με τον χρόνο θα δίνεται από την σχέση:

$$Q = Q_0 e^{-\Lambda t} \quad (68)$$

όπου Q_0 είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή την χρονική στιγμή $t = 0$ και η σταθερά $\Lambda = \frac{R}{2L}$ με R την ωμική αντίσταση του κυκλώματος και L τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Η παραπάνω σχέση είναι σε πλήρη αντιστοιχία με την σχέση για το πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης.

Από την παραπάνω σχέση και σε πλήρη αντιστοιχία με τις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, αποδιδνύεται η σχέση:

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \dots = \frac{Q_\kappa}{Q_{\kappa+1}} = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (69)$$

Η ενέργεια στην φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση μειώνεται και αυτή εκθετικά με τον χρόνο ακριβώς όπως και στην περίπτωση των μηχανικών ταλαντώσεων. Επίσης το ποσό θερμότητας (Q_R) που εκλύεται στον αντιστάτη είναι ίσο με την μείωση της ενέργειας του κυκλώματος και δίνεται:

$$Q_R = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (70)$$

Πρόταση Μελέτης: Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 6.1 - 6.38, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.55, 6.56, 6.58, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.70

4 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

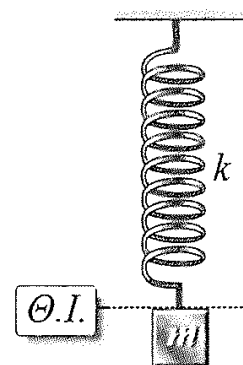
4.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα συστημα ελατηρίου - μάζας. Αν η μάζα απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας της προς τα κάτω κατά A και αφεθεί ελεύθερη, το σύστημα να εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις, η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (71)$$

Όμως στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητα της θα είναι λίγο μικρότερη από την f_0 (στην πράξη μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίση με την f_0). Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **ελεύθερη ταλάντωση**.

Η συχνότητα f_0 με την οποία πραγματοποιείται μια ελεύθερη ταλάντωση, ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης**.



Μια χρήσιμη παρατήρηση (εκτός ύλης) θεωρητικά η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης f_ϕ είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 και αυτό επιβεβαιώνεται από την σχέση :

$$\omega_\phi = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

η οποία ισχύει όταν στο σύστημα ενεργεί μια δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση γενικά $\omega_\phi < \omega_0$ ή $f_\phi < f_0$. Στην περίπτωση όμως που η σταθερά b είναι πολύ μικρή (σχολικό βιβλίο) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f_\phi = f_0$.

Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης, πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική εξωτερική δύναμη. Αυτή την δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.

Θεωρούμε την διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ένα τροχό, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σώμα να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με συχνότητα η οποία συμπίπτει με την συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη**. Δηλαδή :

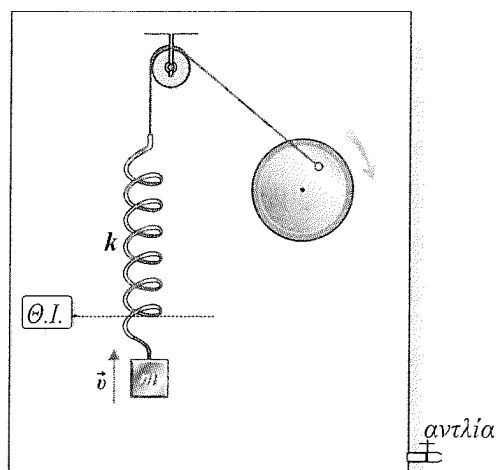
Εξαναγκασμένη Ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση ενός συστήματος, όταν σε αυτό ασκείται **εξωτερική περιοδική δύναμη**, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Ο τροχός με την περιοδική δύναμη που ασκεί ονομάζεται **διεγέρτης**. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με την συχνότητα του διεγέρτη (f_δ) και όχι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος (f_0). Δηλαδή **στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση την συχνότητα του**.

Καμπύλες Συντονισμού

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης A εξαρτάται από την συχνότητα f_δ του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f_δ του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός και αν η συχνότητα του διεγέρτη πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_0 , οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα f_δ γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

Συντονισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο για μια ορισμένη συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος γίνεται μέγιστο.



Στην περίπτωση που μια ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας ($b = 0$), όταν $f_\delta = f_0$, το πλάτος γίνεται θεωρητικά άπειρο. Στην πράξη όμως αυτό είναι αδύνατο γιατί πάντα υπάρχουν (έστω και μικρές) απώλειες ενέργειας.

Για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης (b), το πλάτος παίρνει μια πεπερασμένη μέγιστη τιμή που εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης. Ταυτόχρονα ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα f_δ του διεγέρτη είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 . Οι **Καμπύλες συντονισμού** αποτυπώνουν με τον καλύτερο τρόπο τα παραπάνω.

Ενεργειακή προσέγγιση

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις, κατά την διέγερση του συστήματος δίνεται σ' αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή, αν η ταλάντωση είναι αμείωτη, ή μετατρέπεται σε θερμότητα αν η ενέργεια είναι φθίνουσα.

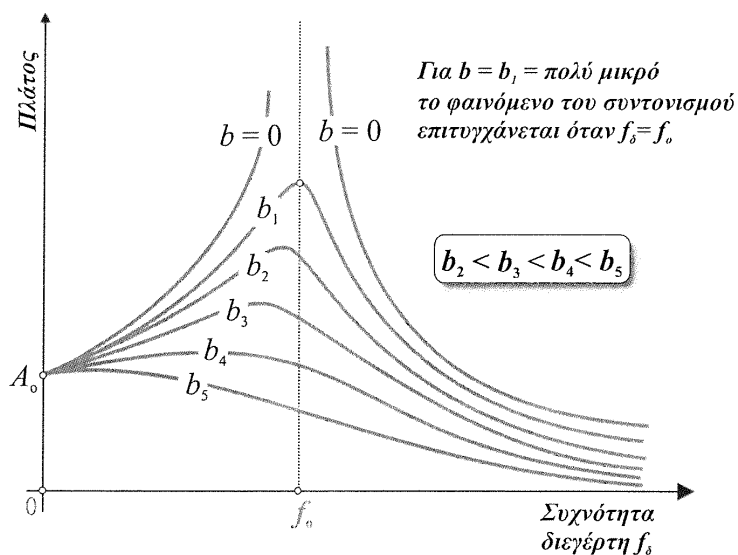
Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται περιοδικά ενέργεια με συχνότητα f_δ , μέσω της διεγείρουσας δύναμης. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια στο σύστημα αντισταθμίζει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών και αντιστάσεων και έτσι το πλάτος παραμένει σταθερό. Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα απορροφά την ενέργεια είναι "εκλεκτικός" και έχει να κάνει με την συχνότητα που του προσφέρεται. Κατά τον συντονισμό, η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος είναι μέγιστο. Λέγοντας βέλτιστο τρόπο, εννοούμε ότι κατά τον συντονισμό η κατεύθυνση της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης ($F_{\epsilon\epsilon}$) ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ταχύτητας v του συστήματος.

4.2 Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις

Αν ένα κύκλωμα $L - C$ διεγερθεί (π.χ. με φόρτιση του πυκνωτή από πηγή συνεχούς τάσης) εκτελεί **ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση** με συχνότητα:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (72)$$

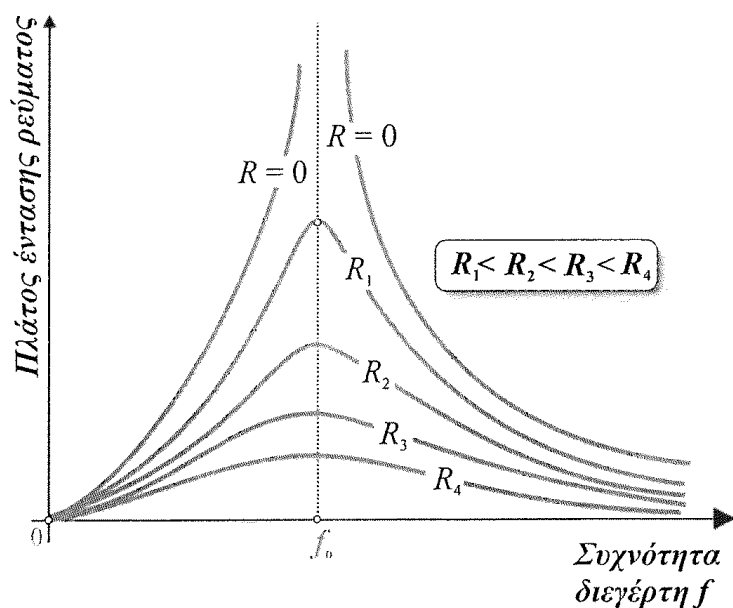
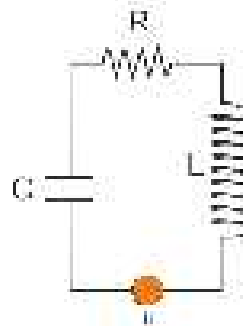
Αν το κύκλωμα δεν παρουσιάζει αντίσταση (ιδανικό κύκλωμα $L - C$), τότε η ταλάντωση είναι αμείωτη. Αν, όμως αντίσταση στο κύκλωμα δεν είναι αμελητέα ($R \neq 0$), η ταλάντωση



Σχήμα 18: Καμπύλες συντονισμού πλάτους

είναι φθίνουσα με συχνότητα ελαφρώς μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος (πρακτικά περίπου ίση για το σχολικό βιβλίο). Όπως και στις φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις, έτσι και εδώ το κύκλωμα μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ως διεγέρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια **πηγή εναλλασσόμενης τάσης**, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τότε, το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα με συχνότητα f , ίδια με της εναλλασσόμενης τάσης. Αν μεταβάλουμε την συχνότητα της τάσης, το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται και παίρνει την μέγιστη τιμή του, όταν η συχνότητα f γίνεται ακριβώς ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος $L - C$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το κύκλωμα $L - C$ βρίσκεται σε συντονισμό**. Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνεται το πλάτος I της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την συχνότητα f , για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης R .



Σχήμα 19: Καμπύλες συντονισμού πλάτους ρεύματος

$L - C$ του ραδιοφώνου με τα ραδιοφωνικά κύματα. Μεταβάλλοντας την συχνότητα στο ραδιόφωνο μας μεταβάλλουμε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή στο εσωτερικό του, άρα και την ιδιοσυχνότητα f_0 μέχρι να "συντονιστούμε" με την συχνότητα f του σταθμού και να ακούσουμε καθαρά την ένταση του σήματος.

Πρόταση Μελέτης: Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** 7.1 - 7.29, 7.33-7.37, 7.39, 7.40-7.43

Παρατηρούμε ότι οι **καμπύλες συντονισμού** είναι αντίστοιχες με εκείνες των μηχανικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Αυτό όμως που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι καθώς η ωμική αντίσταση R αυξάνεται, το πλάτος της έντασης του ρεύματος I μειώνεται, αλλά η συχνότητα για την οποία συμβαίνει η μεγιστοποίηση του πλάτους της έντασης του ρεύματος δεν μετατοπίζεται προς μικρότερες τιμές, αλλά παραμένει πάντα ίδια με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κυκλώματος.

Βασική **εφαρμογή του συντονισμού στις εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις** είναι το φαινόμενο "πίσω" από την επιλογή ραδιοφωνικού σταθμού στο ραδιόφωνο. Η επιλογή βασίζεται στον συντονισμό του κυκλώματος