

Φυσική Γ Λυκείου, Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Καραδημητρίου Ε. Μιχάλης

<http://perifysikhs.wordpress.com>

mixalis.karadimitriou@gmail.com

Πρόχειρες Σημειώσεις 2011 - 2012

1 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

1.1 Περιοδικά Φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κυκλική ομαλή κίνηση, η κίνηση του εκκρεμούς κ.ά. Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **Περίοδο** (T), τη **Συχνότητα** (f) και την **γωνιακή συχνότητα** (ω)

- **Περίοδος (T)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μι-α πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, τότε η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο:

$$T = \frac{t}{N} \quad (1)$$

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s .

- **Συχνότητα (f)** ενός περιοδικού φαινομένου είναι το πηλίκο του αριθμού N των επαναλήψεων του φαινομένου σε ορισμένο χρόνο t , προς το χρόνο t . Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{t} \quad (2)$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 Hz ή 1 s^{-1}

Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα και συνδέονται με την σχέση:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

- Η **γωνιακή συχνότητα (ω)** είναι ένα μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4)$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο $2\pi\text{ sec}$.

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το 1 rad/sec .

1.2 Οι εξισώσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Ταλάντωση ονομάζεται μια παλινδρομική περιοδική κίνηση. **Γραμμική ταλάντωση** ονομάζεται η ταλάντωση που εξελίσσεται πάνω σε ευθεία τροχιά. Μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)**.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από την αρχή Ο του άξονα, που είναι το μέσον της τροχιάς του. Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο Ο είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου t , δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (5)$$

τότε η κίνηση του σώματος λέγεται **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το **A** είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το σώμα και ονομάζεται **Πλάτος** της ταλάντωσης. Η γωνία $\phi = \omega t + \phi_0$ που η τιμή της καθορίζει και την τιμή της απομάκρυνσης x του σώματος την χρονική στιγμή t ονομάζεται **φάση της ταλάντωσης**. Το σημείο Ο είναι η **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.

Η φάση αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$ αντιστοιχεί σε αύξηση της φάσης κατά $\Delta\phi = 2\pi \text{ rad}$

Η ποσότητα ϕ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης για την χρονική στιγμή $t = 0$ και γι' αυτό ονομάζεται **αρχική φάση**. Ουσιαστικά η αρχική φάση καθορίζεται από τις "αρχικές συνθήκες" της απλής αρμονικής ταλάντωσης (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση). Για την αρχική φάση ισχύει:

$$0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

Η **ταχύτητα** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad (6)$$

όπου $v_{\max} = \omega A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα, όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας Ο ($x = 0$).

Η **επιτάχυνση** του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση:

$$a = \frac{dv}{dt} = -a_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (7)$$

όπου $a_{\max} = \omega^2 A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη επιτάχυνση, όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσης της ταλάντωσης ($x = \pm A$).

Οι χρονικές εξισώσεις (5), (6), (7) απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι η "ταυτότητα" της κάθε κίνησης στην μηχανική και συγκροτούν την **Κινηματική προσέγγιση** του προβλήματος. Για την περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης οι εξισώσεις αυτές είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου

Σχέση στιγμιαίας επιτάχυνσης-απομάκρυνσης Η σχέση (7) με την βοήθεια της (5) γράφεται:

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) = -\omega^2 x \quad (8)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η επιτάχυνση α και η απομάκρυνση x του σώματος έχουν πάντα αντίθετη φορά, ή με άλλα λόγια, ότι η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς την θέση ισορροπίας Ο.

Σχέση στιγμιαίας ταχύτητας-απομάκρυνση Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας σε μια τυχαία χρονική στιγμή και της απομάκρυνσης την ίδια χρονική στιγμή συνδέονται με την σχέση:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (9)$$

η απόδειξη της σχέσης προκύπτει με δύο τρόπους παραθέτω τον πρώτο παρακάτω

$$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \eta\mu(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \eta\mu^2(\omega t)$$

και

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v}{\omega A} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

1.3 Γραφικές παραστάσεις

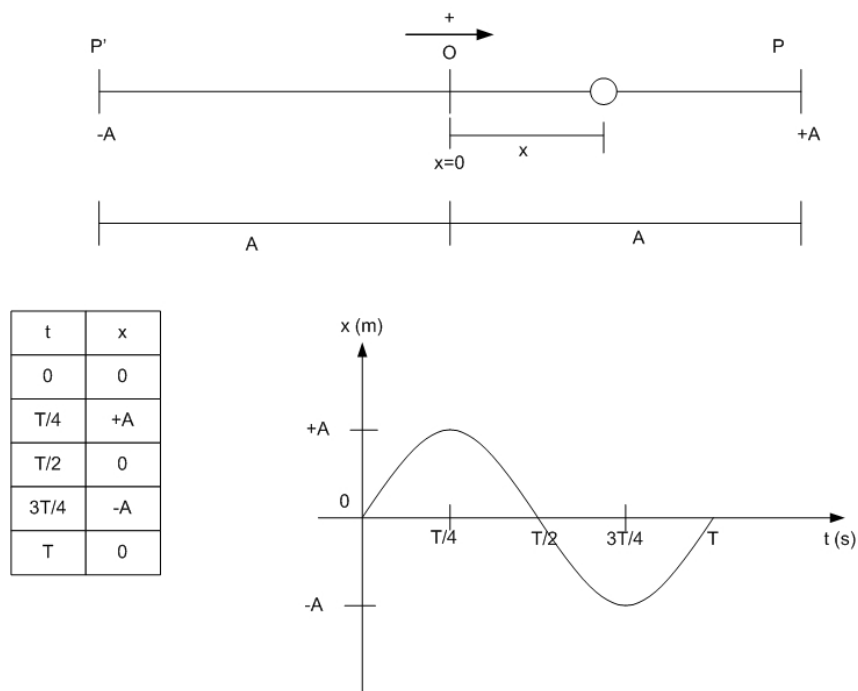
Στα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων αποδίδεται η μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\phi_0 = 0$.

Τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε απο τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις·

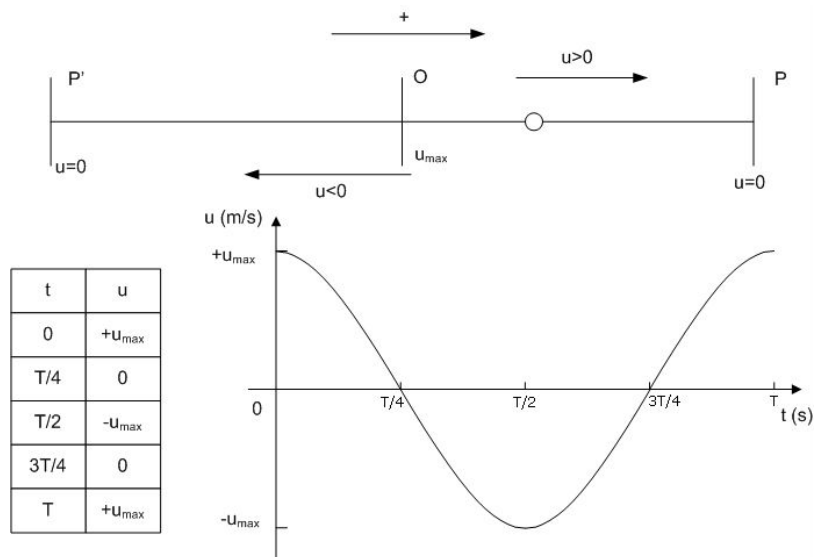
α) Η χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνει την αρχική φάση ϕ_0 .

β) Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα διέρχεται απο την θέση ισορροπίας.

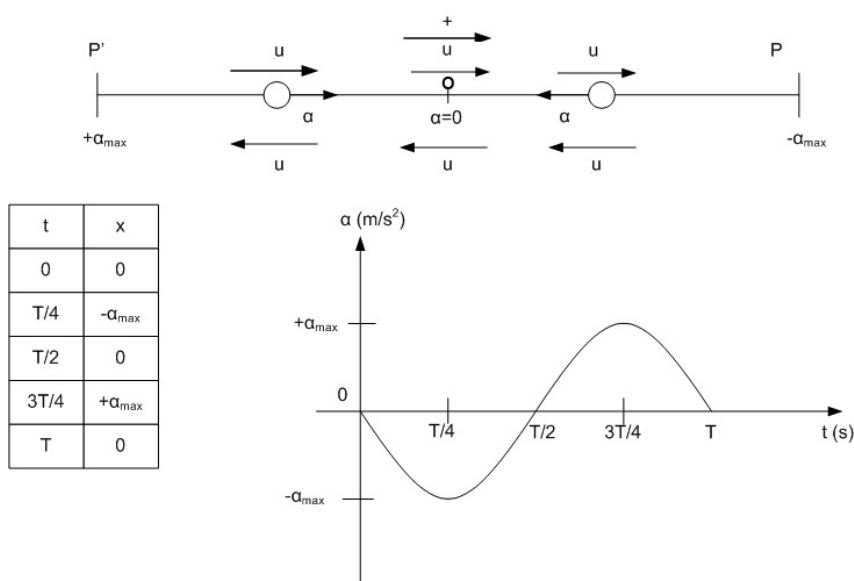
γ) Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα διέρχεται απο την θέση ισορροπίας του, ενώ μεγιστοποιείται όταν το σώμα φτάνει σε ακραία θέση.



Σχήμα 1: Διάγραμμα Απομάκρυνσης - χρόνου



Σχήμα 2: Διάγραμμα Ταχύτητας - χρόνου



Σχήμα 3: Διάγραμμα Επιτάχυνσης - χρόνου

δ) Τα διανύσματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουν:

- Θετική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα πάνω ή προς τα δεξιά.
- Αρνητική αλγεβρική τιμή όταν έχουν φορά προς τα κάτω ή αριστερά.

Πολλές φορές η εκφώνηση της άσκησης καθορίζει την θετική φορά

δ) Όταν το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του ελαττώνεται κατά μέτρο (άρα επιτάχυνση αντίθετη στην ταχύτητα), ενώ όταν το σώμα πλησιάζει προς την θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του αυξάνεται κατά μέτρο (άρα επιτάχυνση και ταχύτητα στην ίδια φορά)

1.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Αρχικής φάσης

π.χ.1 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ($x = +A$). Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0 \Rightarrow +A = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = +1 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/2 \Rightarrow \phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$

π.χ.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση ισορροπίας και κινείται με φορά προς την ακραία αρνητική θέση. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 0 \Rightarrow 0 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi$.

Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v = -v_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi rad$

π.χ.3 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = +A/2$ και κινείται προς την θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση Αφού εκτελεί α.α.τ. $\Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = +A/2 \Rightarrow A/2 = A\eta\mu(\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\phi_0) = 1/2 \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi/6$ ή $\phi_0 = 2k\pi + \pi - \pi/6$.

Ταυτόχρονα όμως για $t = 0, v < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_0) < 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 rad$ (2ο τεταρτημόριο) * Αν για την στιγμή $t = 0$ κινούνταν προς την ακραία θετική θέση τότε $v > 0 \Rightarrow \phi_0 = \pi/6 rad$

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Άγγελου & Σπύρου Σαβάλα** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.16, 1.17, 1.18, 1.20, 1.25, 1.29, 2.14, 2.15, 2.17, 2.18, 2.21, 2.22, 2.23, 2.29, 2.30

1.5 Η Δύναμη στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

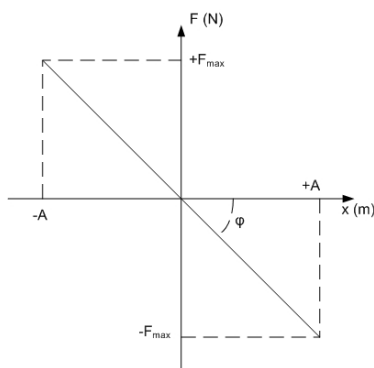
Οταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση a , ανεξάρτητα απο την κατεύθυνση της κίνησης του. Η συνολική δυναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του δίνεται απο τον θεμελιώδη Νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F = m\alpha \quad (10)$$

όμως λόγω της σχέσης (8) προκύπτει

$$\Sigma F = -m\omega^2 x \quad (11)$$

Αν συμβολίσουμε $D = m\omega^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται:



Σχήμα 4: Διάγραμμα Δύναμης- Απομάκρυνσης

$$\Sigma F = -Dx \quad (12)$$

Η σταθερά αναλογίας D λέγεται **σταθερά επαναφοράς** της ταλάντωσης και η τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Από την σχέση (12) φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνολική δύναμη που δέχεται:

- έχει ως φορέα την ευθεία πάνω στην οποία γίνεται η ταλάντωση του σώματος,
- είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας O ,
- έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση του σώματος και πάντοτε προς την θέση ισορροπίας
- στην θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0$

Η σχέση (12) ονομάζεται και **Δύναμη Επαναφοράς**, αφού δρα έτσι ώστε να επιταχύνει το σώμα πάντα προς την θέση ισορροπίας και παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 4

Παρατήρηση: Η σχέση (12) αποτελεί **ικανή και αναγκαία συνθήκη**, ώστε ένα σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτό σημαίνει πως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γραμμική ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα είναι και αρμονική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από την θέση ισορροπίας ικανοποιεί την σχέση (12).

Σχέση Περιόδου- σταθεράς επαναφοράς

Από την σχέση $D = m\omega^2$ προκύπτει: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
από τον ορισμό της γωνιακής συχνότητας $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (13)$$

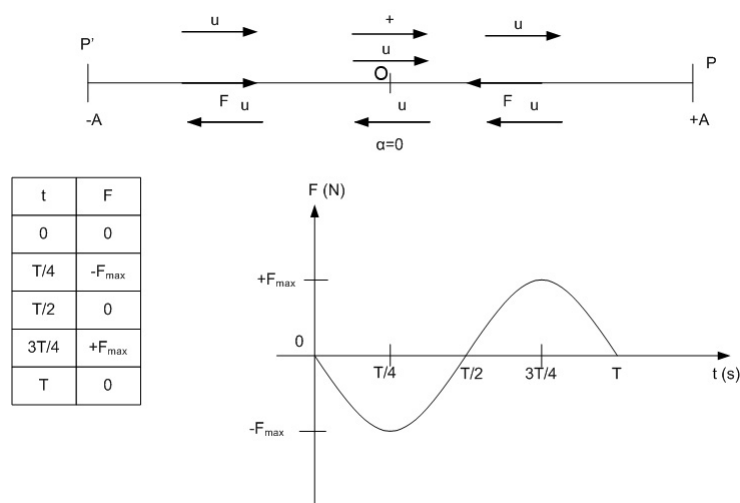
Απο την τελευταία σχέση προκύπτει ότι **η περίοδος T δεν εξαρτάται από το πλάτος A της ταλάντωσης.**

Η δύναμη επαναφοράς σαν συνάρτηση του χρόνου

Από τις σχέσεις (12),(5) προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{max}\eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (14)$$

,με την μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $F_{max} = DA$



Σχήμα 5: Διάγραμμα Δύναμης - Χρόνου

1.6 Το σύστημα "Μάζας - Ελατηρίου"

Το πιο χαρακτηριστικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στις μηχανικές ταλαντώσεις είναι το πρόβλημα της μάζας που είναι στερεωμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου.

Ιδανικό ελατήριο είναι κάθε ελατήριο που μπορεί να θεωρηθεί ως αβαρές και υπακούει στον **Νόμο του Hooke** $F_{ελ} = k\Delta l$ όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου (εξαρτάται από το υλικό του ελατηρίου) και Δl είναι η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από την **Θέση Φυσικού μήκους** του. Η δύναμη $F_{ελ}$ έχει τέτοια φορά ώστε να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του κατάσταση φυσικού μήκους (l_0)

Η Δύναμη Ελατηρίου ($F_{ελ}$) συμπίπτει με την δύναμη επαναφοράς μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου, όπου η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους συμπίπτουν, αντίθετα στην περίπτωση του κατακόρυφου ή κεκλιμένου συστήματος η θέση ισορροπίας και η θέση φυσικού μήκους είναι διαφορετικές, άρα δεν συμπίπτουν οι δύο δυνάμεις μεταξύ τους.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα το οποίο είναι δεμένο σε ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν το διεγείρουμε από την κατάσταση ισορροπίας του ;

Βήματα - μεθοδολογία σε προβλήματα οριζοντίων και κατακόρυφων ελατηρίων που στο άκρο τους έχουν σώμα μάζας m

1ο : Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, το σώμα στην θέση ισορροπίας και το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας

- 2ο :** Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα στην θέση ισορροπίας. Από την συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma F = 0$) βρίσκουμε μια σχέση
- 3ο :** Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην τυχαία θέση και υπολογίζουμε την ΣF . Προσέχουμε στον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, από τις δυνάμεις που έχουν την ίδια φορά με την απομάκρυνση x να αφαιρούμε εκείνες που έχουν αντίθετη φορά.
- 4ο :** Αφού καταλήξω σε σχέση της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με D θετική σταθερά το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D .
- 5ο :** Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την αρχική απομάκρυνση του σώματος από την Θέση Ισορροπίας. Η περίοδος υπολογίζεται από την σχέση (13) και η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από την (5) με την κατάλληλη αρχική φάση ϕ_0

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Άγγελου & Σπύρου Σαββάλα** τις ακόλουθες ασκήσεις: 3.13, 3.14, 3.16, 3.18, 3.20, 3.22-3.25, 4.9, 4.10, 4.13, 4.15, 4.16, 4.18, 4.19, 4.20, 4.23, 4.25, 4.28, 4.38 - 4.44

1.7 Η ενέργεια στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Η ενέργεια της ταλάντωσης E ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισούται με την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

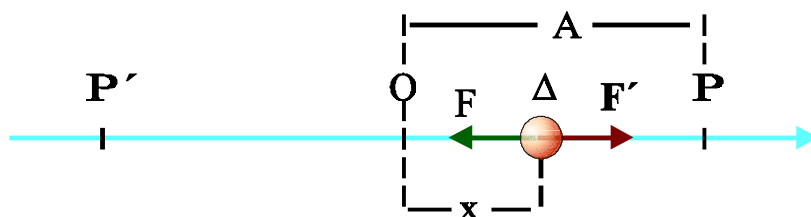
$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (15)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το πλάτος A καθορίζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται. Σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια παραμένει σταθερή. Άρα: **Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της.**

Δυναμική & Κινητική Ενέργεια Ταλάντωσης Στην διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και ως κινητική ενέργεια ταλάντωσης. Η κινητική και η Δυναμική ενέργεια υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (16)$$

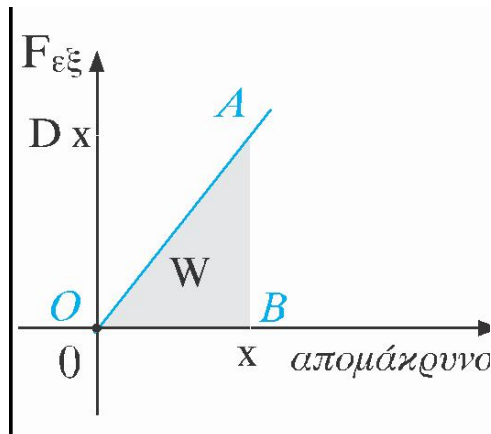
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (17)$$



Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$: Αν το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην θέση ισορροπίας O, για να μετακινηθεί σε μια άλλη θέση πρέπει να του ασκηθεί κατάλληλη εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$. Κατά την μετακίνηση αυτή θα ασκείται στο σώμα και η δύναμη επαναφοράς. Για να μετακινηθεί το σώμα στην ακραία θέση (x) χωρίς ταχύτητα θα πρέπει το μέτρο της εξωτερικής δύναμης να είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς και να έχει αντίθετη φορά, σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$F_{εξ} = -\Sigma F = -(-Dx) = Dx$$

Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο και με την προσφερόμενη ενέργεια για να απομακρύνουμε το σώμα κατά x από την θέση ισορροπίας. Επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου το έργο της υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $F_{εξ} = f(x)$.



Από το εμβαδόν προκύπτει η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα και αποθηκεύεται σ' αυτό ως Δυναμική Ενέργεια:

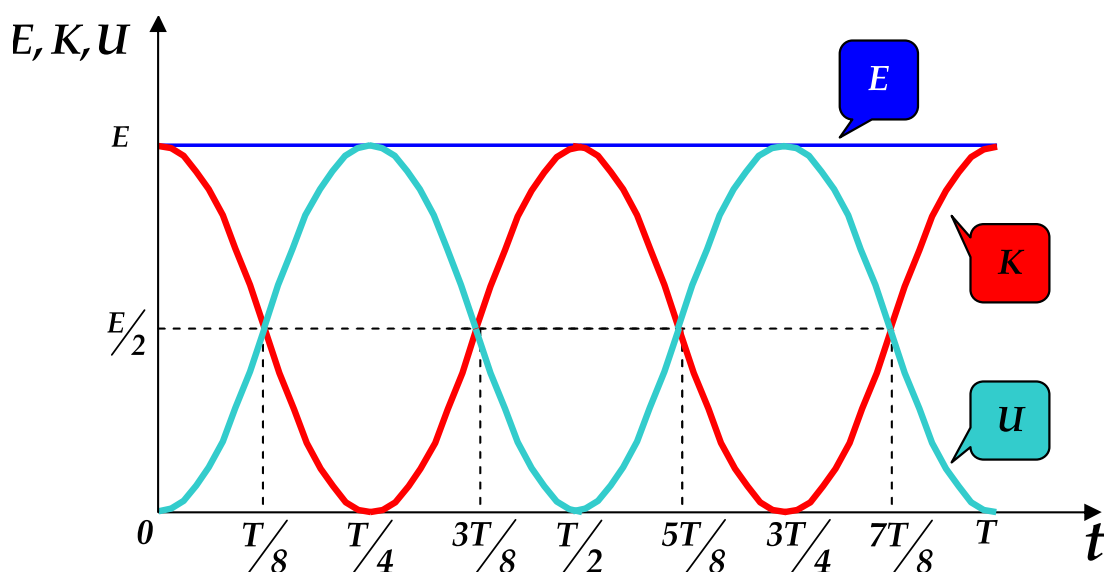
$$W_{F_{εξ}} = E = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (18)$$

K, U σαν συναρτήσεις του χρόνου Αντικαθιστώντας στις σχέσεις 16 και 17 της χρονικές εξισώσεις για την στιγμιαία απομάκρυνση και στην στιγμιαία ταχύτητα μπορούμε να οδηγηθούμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m(v_{max}\sin(\omega t))^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) \\
 &\Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t) = E \sin^2(\omega t)
 \end{aligned}
 \quad (19)$$

$$U = \frac{1}{2}D(A\cos(\omega t))^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2 \cos^2(\omega t) = E \cos^2(\omega t)
 \quad (20)$$

Από τις σχέσεις 20 και 19 προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. Οι γραφικές παραστάσεις της Κινητικής, της Δυναμικής και της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 6: E, K, U σε συνάρτηση με τον χρόνο

Διατήρησης της Ενέργειας .Η ολική ενέργεια E στην απλή αρμονική ταλάντωση παραμένει σταθερή και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα της Δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E$$

, όπου βέβαια E =σταθερή και δίνεται από την σχέση 15

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι:

(α) Στην θέση ισορροπίας ($x = 0$) η Δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Κινητική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την Ενέργεια ταλάντωσης. $E = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

(β) Στις ακραίες θέσεις ($x = \pm A$) η Κινητική Ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η Δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης $E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2$

(γ) Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση(εκτός από την Θ.Ι.) το σύστημα έχει και Κινητική και Δυναμική Ενέργεια και σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad (21)$$

Γνωρίζοντας την Δυναμική και την Κινητική Ενέργεια κατά την διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα ο χρόνος. Αυτή η προσέγγιση είναι η **Ενεργειακή προσέγγιση** της κίνησης, που σε πολλές περιπτώσεις είναι χρησιμότερη από την Κινητική προσέγγιση που απαιτεί γνώση του χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζω δύο βασικές αποδείξεις:

Απόδειξη της σχέσης $v_{max} = \omega A$:

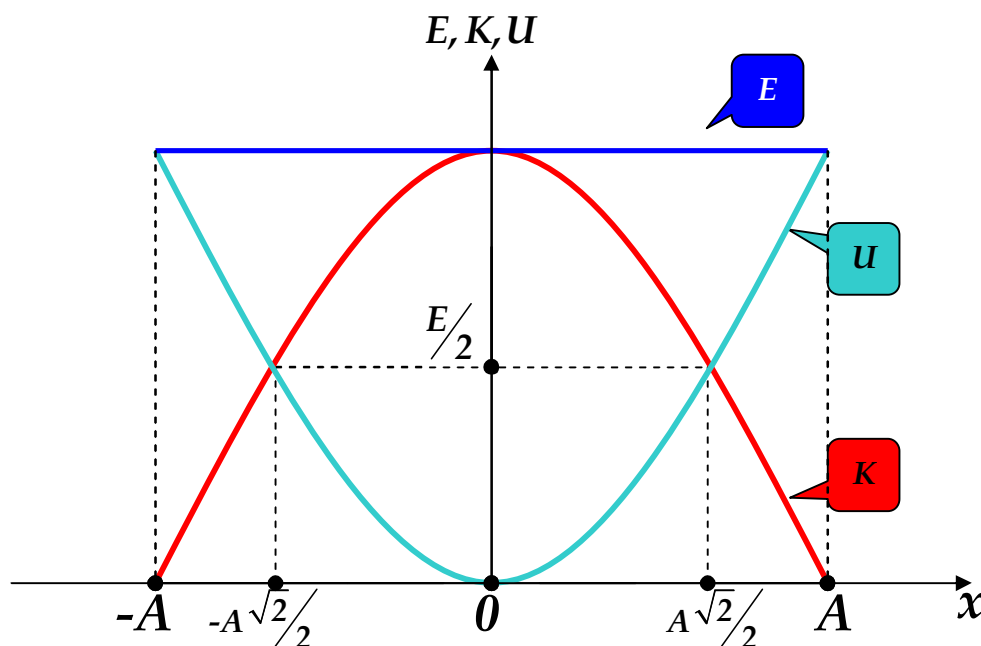
$$E = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m}{D}v_{max}^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}}v_{max}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v_{max} = \omega A$

Απόδειξη της σχέσης $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow mv^2 = D(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{D}{m}(A^2 - x^2)}$$

όμως η σταθερά επαναφοράς είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Σχήμα 7: Διάγραμμα E, K, U με την απομάκρυνση

Τα διαγράμματα $U = f(x), K = f(x)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η δυναμική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A$$

Η κινητική Ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad \mu\epsilon -A \leq x \leq +A \quad (22)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θ.Ι. παρουσιάζεται στο Σχήμα 7:

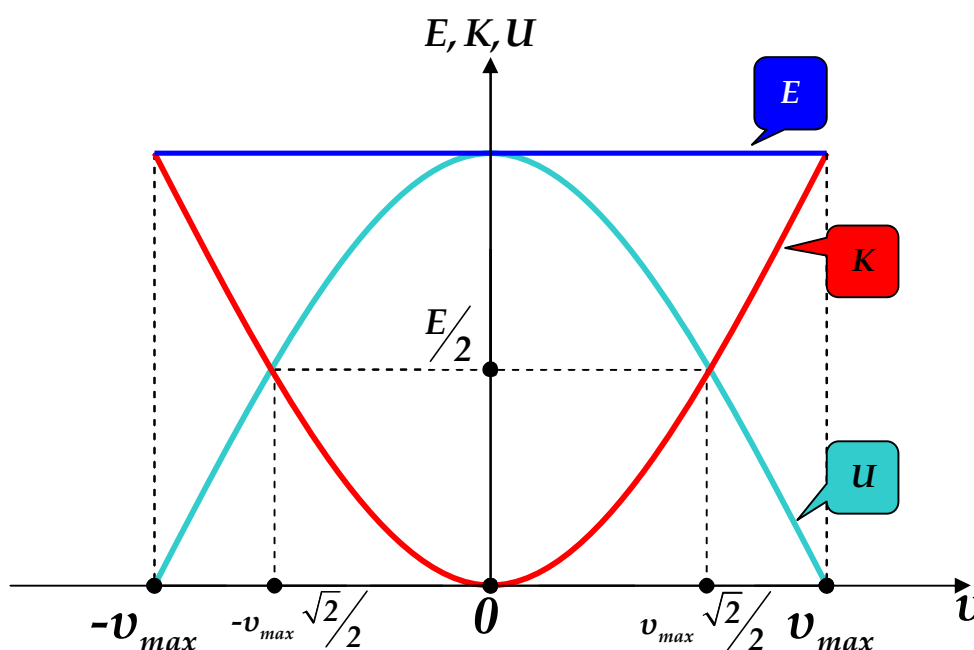
Τα διαγράμματα $U = f(v), K = f(v)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}mv^2 \quad \mu\epsilon -v_{max} \leq v \leq +v_{max} \quad (23)$$

Άρα η γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας σε κοινό διάγραμμα σε συνάρτηση με την από την ταχύτητα παρουσιάζεται στο Σχήμα 8:



Σχήμα 8: Διάγραμμα E, K, U με την ταχύτητα

Η ενέργεια στο Ιδανικό Ελατήριο Στην περίπτωση του ιδανικού ελατηρίου που αναλύσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την Δυναμική Ενέργεια του ελατηρίου, η οποία χαρακτηρίζεται ως δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης. Υπολογίζεται από την σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (24)$$

, όπου βέβαια k η σταθερά του ελατηρίου και Δl η επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Προσοχή η Δυναμική Ενέργεια Ταλάντωσης συμπίπτει με την Ενέργεια του Ελατηρίου μόνο στην περίπτωση του οριζοντίου ελατηρίου.

Το έργο της Δύναμης του Ελατηρίου μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ}^{(\alpha\rho\chi)} - U_{ελ}^{(\tau\epsilon\lambda)} \quad (25)$$

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.131 - 1.146, 1.149 - 1.156, 1.160, 1.161, 1.172, 1.174, 1.176, 1.178, 1.179, 1.180, 1.183, 1.184, 1.186, 1.187, 1.188, 1.190

1.8 Ρυθμοί μεταβολής στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ο Ρυθμός μεταβολής είναι απο τις χρησιμότερες έννοιες στην Φυσική καθώς μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την συμπεριφορά μιας φυσικής ποσότητας. Στα μαθηματικά Γ Λυκείου θα μάθουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης είναι η παράγωγος συνάρτηση. Παρακάτω παρουσιάζω ρυθμούς μεταβολής βασικών μεγεθών στην απλή αρμονική ταλάντωση.

- **Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης** $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v = \omega A \sin(\omega t) \quad (26)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 A \cos(\omega t) \quad (27)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της ορμης** $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -DA \cos(\omega t) \quad (28)$$

- **Ρυθμός μεταβολής της Κινητικής - Δυναμικής Ενέργειας** $\frac{dK}{dt}, \frac{dU}{dt}$

Γνωρίζουμε ότι $K + U = E \Rightarrow d(K + U) = 0$, αφού $E = \text{σταθερή}$, $\Rightarrow dK = -dU$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (29)$$

επίσης

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot v \quad (30)$$

και σε συνάρτηση με τον χρόνο, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5),(6) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -DA \cos(\omega t) \omega A \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{DA\omega^2}{2} \sin(2\omega t) \quad (31)$$

άρα

$$\frac{dU}{dt} = +\frac{DA\omega^2}{2} \sin(2\omega t) \quad (32)$$

1.9 Η Διαφορά φάσης στην απλή αρμονική ταλάντωση

Διαφορά Φάσης $\Delta\phi$ δύο αρμονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών λέγεται γ διαφορά των φάσεων τους. όταν τα δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω , τότε η διαφορά φάσης είναι χρονικά σταθερή. Για να βρούμε την διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της ταχύτητας** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \text{ και } v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow v = v_{\max}\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ και προηγείται η ταχύτητα.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $v = +v_{\max}$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A$ σε χρόνο $\frac{T}{4}$.

Στην περίπτωση της **απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης** μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \text{ και } \alpha = -\alpha_{\max}\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \alpha = \alpha_{\max}\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μεγεθών είναι $\Delta\phi = \pi$ και προηγείται η επιτάχυνση.

Η φυσική σημασία αυτής της διαφοράς φάσης είναι ότι όταν κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση έχει μια ορισμένη τιμή, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί σε γωνία $\Delta\phi = \pi$, δηλαδή μετά από χρόνο που θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

Άρα αν για παράδειγμα η ταχύτητα πάρει την τιμή $\alpha = +\alpha_{\max}/2$, τότε η απομάκρυνση θα πάρει την τιμή $+A/2$ σε χρόνο $\frac{T}{2}$.

Γενικά λέμε ότι δύο αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη δεν έχουν διαφορά φάσης όταν παίρνουν ταυτόχρονα τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους.

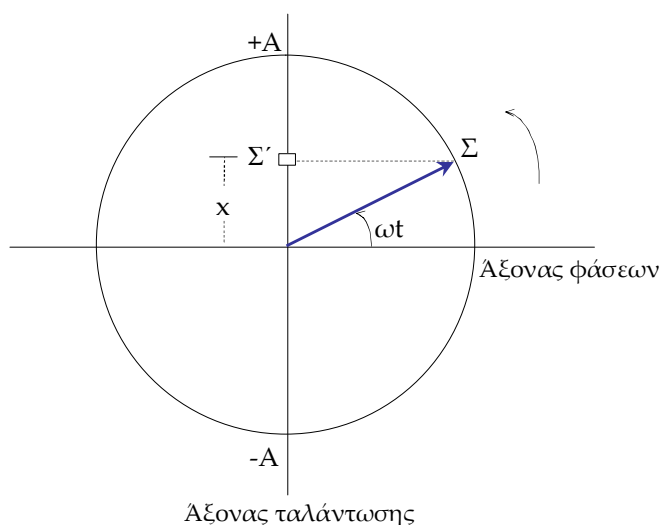
1.10 Η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

Μια ακόμα έξυπνη μέθοδος για την επίλυση ασκήσεων στην απλή αρμονική ταλάντωση. Θα αποδείξουμε την φράση: **Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση τότε η προβολή του πάνω σε μια διάμετρο της κίνησης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.**

Από το σχήμα (9) έχουμε ότι:

$$(O\Sigma') = (O\Sigma) \eta\mu(\phi) \Rightarrow x = \eta\mu(\omega t)$$

αφού βέβαια ισχύει ότι $\phi = \omega t$ για το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ω την γωνιακή ταχύτητα του.



Σχήμα 9: η αναπαράσταση του περιστρεφόμενου διανύσματος

Άρα για κάθε σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα περοστρεφόμενο διάνυσμα μήκος A και γωνιακής ταχύτητας ω . Παράλληλα σε κάθε τεταρτημόριο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και την ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με βάση το πρόσημο του $\sin(\phi)$. Η μέθοδος του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι αρκετά χρήσιμη στον υπολογισμό της αρχικής φάσης ϕ_0 .

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 1.162 - 1.165, 1.169, 1.191, 1.192, 1.194, 1.196, 1.197, 1.198, 1.200, 1.203, 1.33 - 1.70, 1.83 - 1.98, 1.101 - 1.108

1.11 Κρούση και Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε πολλά προβλήματα εμφανίζεται το φαινόμενο της Κρούσης ανάμεσα σε σώματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση μετά ή πριν την κρούση. Ας εισάγουμε την βασική ιδέα της Κρούσης για μια γρήγορη εφαρμογή σε προβλήματα Ταλαντώσεων. Η κρούση θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο της ύλης, άρα εδώ θα μείνουμε στις κύριες ιδέες.

Έστω ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ αντίστοιχα. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή. Παρατηρούμε δύο βασικές κατηγορίες κρούσεων.

Ανελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία έχουμε απώλειες ενέργειας, λόγω ανελαστικών δυνάμεων ή δυνάμεων πλαστικής παραμόρφωσης που ασκούνται κατά την

διάρκεια της κρούσης. Άν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η **Αρχή Διατήρησης της Ορμής** και της ενέργειας του συστήματος. Δηλαδή:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (33)$$

και

$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 + E_{αωλ} \quad (34)$$

όπου $E_{αωλ}$ οι απώλειες ενέργειας λόγω της ανελαστικής παραμόρφωσης ή της θερμότητας. Σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ($K_{ολ(αρχ)} > K_{ολ(τελ)}$)

Στην περίπτωση ανελαστικής κρούσης που αμέσως μετά την κρούση προκύπτει συσσωμάτωμα η κρούση θα λέγεται **Πλαστική Κρούση** και θα ισχύουν πάλι οι παραπάνω εξισώσεις.

Ελαστική Κρούση είναι η περίπτωση κρούσης κατά την οποία διατηρείται σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος καθώς και η Ορμή του. Άν μετά την κρούση οι νέες ταχύτητες των σωμάτων είναι $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$, αντίστοιχα τότε θα ισχύει η σχέση (33) και η διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \quad (35)$$

Και στις δύο περιπτώσεις κρούσης ισχύει η Αρχή της Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των σωμάτων. **Για την επίλυση κάθε προβλήματος κρούσης με απλή αρμονική ταλάντωση ακολουθούμε τα ακόλουθα βήματα:**

- 1ο:** Σχεδιάζουμε το σώμα που εκτελεί α.α.τ. στην θέση ισορροπίας του (αν υπάρχει ελατήριο το σχεδιάζουμε στην θέση φυσικού μήκους του)
- 2ο:** Σχεδιάζουμε τις θέσεις των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση και αμέσως μετά την κρούση και υπολογίζουμε τις ταχύτητες πριν την κρούση εφόσον δεν μας είναι γνωστές με την χρήση μεθόδων που αναλύσαμε παραπάνω (π.χ. αν γνωρίζουμε την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας πριν την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα με την βοήθεια της Ενέργειας στην α.α.τ.)
- 3ο:** Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (33),(35) αν έχουμε ελαστική κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος μετά την κρούση. Αν η κρούση είναι πλαστική ή ανελαστική εφαρμόζουμε την (33 και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.
- 4ο:** Υπολογίζουμε την Ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος μετά την κρούση με την χρήση της Διατήρησης της Ενέργειας μετά την κρούση $E' = K' + U'$.
- 5ο:** Υπολογίζουμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης A' από την νέα Ενέργεια E'

Προσοχή γιατί υπάρχουν περιπτώσεις προβλημάτων που αλλάζει η θέση ισορροπίας του ταλαντούμενου συστήματος αμέσως μετά την κρούση με συνέπεια να αλλάζει και το πρόβλημα που μελετούμε. Οι περιπτώσεις αυτές είναι εκείνες της πλαστικής κρούσης σε κατακόρυφο ή κεκλιμένο σύστημα ελατηρίου - μάζας. Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε την νέα θέση ισορροπίας μετά την κρούση, για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο 4ο και 5ο βήμα.

Τέλος στα προβλήματα που μετά την κρούση δημιουργείται συσσωματόμα (Πλαστική Κρούση) αλλάζει και η γωνιακή συχνότητα ω , άρα και η περίοδος της ταλάντωσης.

Πρόταση Μελέτης Λύσε απο τον **Ά τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 2.136, 2.138, 2.139, 2.140, 2.141, 2.143, 2.145, 2.146, 2.148, 2.149, 2.150, 2.151, 2.153, 2.154, 2.155, 2.156, 2.158, 2.159, 2.160

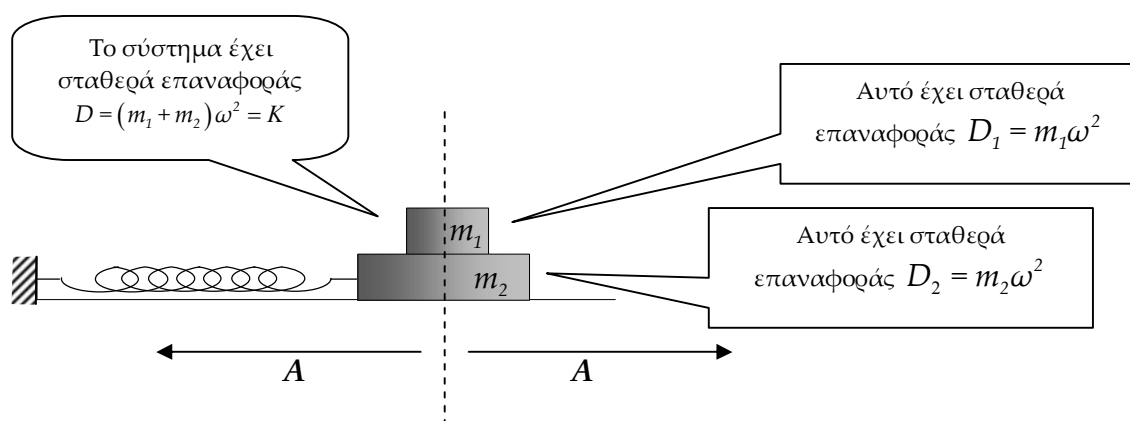
1.12 Σώματα που βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν α.α.τ.

Όταν δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 βρίσκονται σε επαφή και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση ταυτόχρονα, τότε έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Η συχνότητα ω υπολογίζεται απο την σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m_1 + m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}}$$

Το κάθε σώμα έχει την δική του σταθερά επαναφοράς D_1, D_2 που την υπολογίζουμε απο τις σχέσεις:

$$D_1 = m_1\omega^2, D_2 = m_2\omega^2$$



Αν το σύστημα που εκτελεί την απλή αρμονική ταλάντωση είναι δεμένο σε ελατήριο, τότε η σταθερά επαναφοράς είναι $D = k$

Όταν ένα σώμα είναι σε επαφή με μια επιφάνεια (ή με ένα άλλο σώμα), δέχεται απο την επιφάνεια δύναμη N . **Στην οριακή περίπτωση που $N = 0$ το σώμα χάνει την επαφή με την επιφάνεια.**