

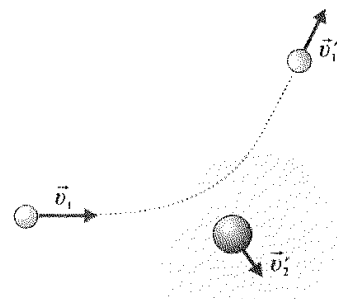
8 Κρούσεις

Στην μηχανική με τον όρο κρούση εννοούμε τη σύγκρουση δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σχετικά με το άλλο. Το φαινόμενο της κρούσης έχει δύο χαρακτηριστικά:

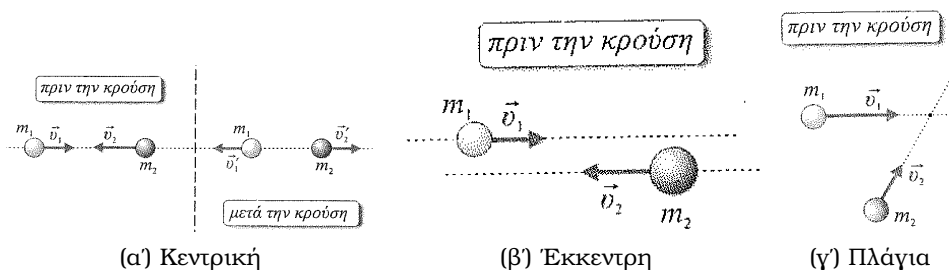
- Έχει πολύ μικρή χρονική διάρκεια.
- Κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων αναπτύσσονται πολύ ισχυρές δυνάμεις, ισχυρότερες από όλες τις άλλες που μπορεί να ασκούνται στα σώματα (π.χ. βαρύτητα). Οι δυνάμεις αυτές έχουν σχέση "δράσης - αντίδρασης" και το μέτρο τους μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της κρούσης.

Στην ατομική και πυρηνική φυσική η έννοια της κρούσης επεκτείνεται, ώστε να περιλαμβάνει και την αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίων τα οποία δεν έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα η εκτόξευση ενός ηλεκτρονίου προς ένα φορτισμένο σωματίδιο, έχει ως αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή της κινητικής κατάστασης των σωματιδίων, τα οποία αν και δεν έρχονται σε επαφή, εμφανίζουν τα χαρακτηριστικά της κρούσης.

Ονομάζουμε κρούση κάθε φαινόμενο και του μικρόκοσμου, στο οποίο δύο σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Στην σύγχρονη φυσική το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται και **σκέδαση**.



Τα είδη της κρούσης, ανάλογα με την διεύθυνση κίνησης των σωμάτων πριν συγκρουστούν.



- **Κεντρική ή μετωπική κρούση** ονομάζεται η κρούση, στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.
- **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλα μεταξύ τους.
- **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή κατά την διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στα σώματα ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν θεωρούμε το σύστημα των σωμάτων **μονωμένο**. Άρα:

$$\Sigma \vec{F}_{\epsilon\varsigma} = \frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{ολ} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \vec{P}_{ολ(\pi\rho\nu)} = \vec{P}_{ολ(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά την διάρκεια της κρούσης διατηρείται.

Τα είδη της κρούσης ανάλογα με την διατήρηση της κινητικής ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων.

Σε αντίθεση με την Ορμή που παραμένει σταθερή σε όλες τις περιπτώσεις κρούσεων που θα μελετήσουμε, δεν συμβαίνει το ίδιο με την μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων. Σε κάθε κρούση υπάρχουν δύο βασικά στάδια:

Στο πρώτο στάδιο τα σώματα έρχονται σε επαφή μεταξύ τους και αρχίζουν να παραμορφώνονται, μέχρι να αποκτήσουν κοινή στιγμιαία ταχύτητα. Η απαιτούμενη ενέργεια για την παραμόρφωση τους προέρχεται από την αρχική τους μηχανική ενέργεια. Επειδή η κρούση γίνεται σε μικρό χρονικό διάστημα, θεωρούμε ότι τα σώματα δεν αλλάζουν θέση, άρα δεν μεταβάλλεται η Βαρυτική δυναμική τους ενέργεια, παρά μόνο η κινητική τους.

Στο δεύτερο στάδιο, ανάλογα με την φύση των σωμάτων που παραμορφώνονται η κρούση διακρίνεται σε ελαστική ή σε ανελαστική.

Ελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση εξαφανίζεται και το σύστημα αποκτά πάλι την κινητική ενέργεια που είχε πριν την κρούση. Η αιτία είναι οι φύση των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα κατά την διάρκεια της κρούσης, καθώς είναι ελαστικές δυνάμεις δεν προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή ονομάζεται ελαστική**

Η διατύπωση της Διατήρησης της Κινητικής ενέργειας κατά την ελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{ολ(\pi\rho\nu)} = K_{ολ(\mu\epsilon\tau\alpha)}$$

Η ελαστική κρούση είναι ιδανική περίπτωση, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ελαστικές τις κρούσεις ανάμεσα σε σκληρά σώματα (π.χ. μπάλες μπιλιάρδου). Στην περίπτωση όμως του μικρόκοσμου οι κρούσεις (σκεδάσεις) είναι απόλυτα ελαστικές.

Ανελαστική Κρούση

Η παραμόρφωση των σωμάτων δεν εξαφανίζεται τελείως και ένα μέρος της αρχικής Κινητικής ενέργειας που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση δεν γίνεται πάλι Κινητική ενέργεια, αλλά θερμότητα ή ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης. Η αιτία είναι πάλι η φύση

των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα, καθώς είναι δυνάμεις που προκαλούν μόνιμες παραμορφώσεις. Άρα **η κρούση στην οποία μέρος της Κινητικής Ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα ονομάζεται ανελαστική κρούση**

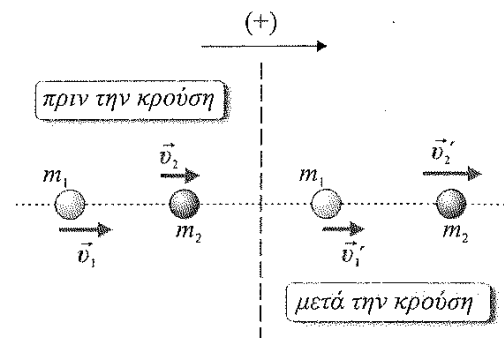
Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη κατά την οποία τα σώματα μετά την κρούση γίνονται συσσωμάτωμα και κινούνται με κοινή ταχύτητα. Η κρούση αυτή λέγεται **πλαστική** και έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου. Η διατύπωση της διατήρησης της ενέργειας κατά την ανελαστική κρούση διατυπώνεται ως εξής:

$$K_{ολ(πριν)} - E_{απωλ} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετα)}$$

όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι ενεργειακές απώλειες σε θερμότητα και ανελαστικές παραμορφώσεις.

Η κεντρική Ελαστική κρούση

Θεωρούμε δύο υλικά Σώματα με μάζες m_1 και m_2 , που κινούνται σε οριζόντιο λείο επίπεδο με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση αποκτούν νέες ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$, τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε. Ο υπολογισμός είναι απλός αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις βασικές ιδέες - αρχές που αναπτύχθηκαν παραπάνω.



Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (149)$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (150)$$

Η εξίσωση (149) γράφεται:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Η εξίσωση (150) γράφεται:

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$$

Διαιρούμε κατα μέλη τις παραπάνω σχέσεις:

$$\frac{v_1 - v'_1}{v_1^2 - v'^2_1} = \frac{v'_2 - v_2}{v'^2_2 - v_2^2}$$

και προκύπτει εύκολα ότι $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$

Αντικαθιστώντας στην (149) και λύνοντας ως προς v'_1 βρίσκουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (151)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (152)$$

Βέβαια κατά τον υπολογισμό μας υποθέσαμε μια συγκεκριμένη φορά για τις ταχύτητες πριν και μετά την κρούση, είναι προφανές ότι σε περίπτωση αντίθετης φοράς από την παραπάνω οι σχέσεις μας οδηγούν σε αρνητικές τιμές για τις ταχύτητες. **Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τόσο εύκολο να απομνημονευτούν, αλλά είναι ευκολότερο να αποδειχθούν από τις βασικές αρχές!**

Ειδικές περιπτώσεις

α. **Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζας** $m_1 = m_2 = m$

Από τις παραπάνω σχέσεις (151),(152) με αντικατάσταση των μαζών προκύπτει:

$$v'_1 = v_2 \quad \text{και} \quad v'_2 = v_1$$

Δηλαδή, **κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που έχουν ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητες τους.**

Βέβαια στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε αν ξεκινήσουμε από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Διατήρηση της Ενέργειας, όπως κάναμε παραπάνω.

β. **Το ένα σώμα είναι ακίνητο πριν την κρούση** ($v_2 = 0$) Από τις σχέσεις (151),(152) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (153)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (154)$$

Βέβαια στην περίπτωση που έχουν και ίσες μάζες και το ένα σώμα είναι ακίνητο, τότε το αρχικά κινούμενο σταματάει μετά την κρούση ($v'_1 = 0$) και το αρχικά ακίνητο σώμα αποκτά ταχύτητα $v'_2 = v_1$

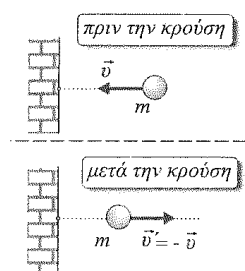
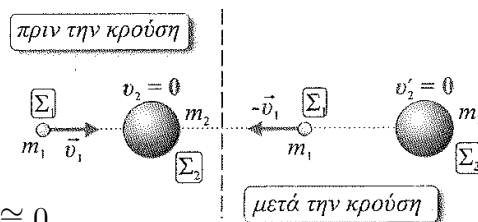
Ελαστική Κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας

Αν το ένα σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα σε σχέση με το άλλο ($m_1 \ll m_2$) και είναι ακίνητο πριν την κρούση ($v_2 = 0$) τότε:

$$m_1 \ll m_2 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} \cong 0.$$

άρα οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν:

$$v'_1 \cong -v_1 \quad \text{και} \quad v'_2 \cong 0$$



Δηλαδή: **ένα σώμα μικρής μάζας που συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας αντανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας μένει πρακτικά ακίνητο.**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν ένα σώμα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή σε ένα δάπεδο, τότε ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς.

Αν το σώμα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε ένα τοίχο με ταχύτητα v , αναλύουμε την ταχύτητα του σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη στον τοίχο και μια παράλληλη σε αυτόν, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη συνιστώσα στον τοίχο θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($v'_x = -v_x$). Η παράλληλη στον τοίχο συνιστώσα δεν μεταβάλλεται ($v'_y = v_y$). Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση v' θα είναι $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}$.

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό:

$$v' = v$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε βέβαια και με την Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας κατά την κρούση.

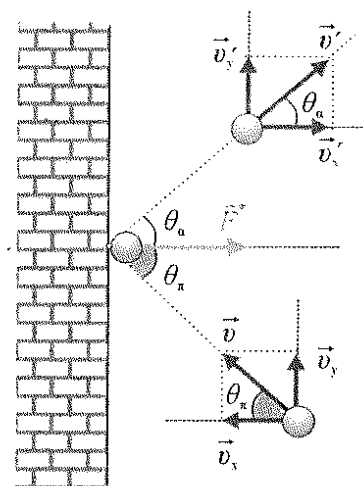
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow v' = v$$

Αν θ_{pi} και θ_α οι γωνίες που σχηματίζουν με την κάθετη στον τοίχο οι ταχύτητες του σώματος πριν και μετά την κρούση τότε ισχύει:

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{v_y}{v} \quad \sigma\upsilon\nu\theta_\alpha = \frac{v'_y}{v'}$$

επειδή $v_y = v'_y$ και $v = v'$ προκύπτει ότι η γωνία πρόσπτωσης στον τοίχο είναι ίση με την γωνία ανάκλασης από αυτόν.

$$\theta_\pi = \theta_\alpha \quad (155)$$



Το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με την νόμο της ανάκλασης για το φως που προσπίπτει πάνω σε ένα καθρέπτη. Απόλυτα συμβατό βέβαια με την σωματιδιακή φύση του φωτός, αρκεί να φανταστούμε ότι τα φωτόνια συμπεριφέρονται ως σωματίδια και ανακλώνται όπως το παραπάνω σωματίδιο.

Η Κεντρική Ανελαστική κρούση

Θεωρούμε τώρα δύο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 που κινούνται πάνω σε λείο οριζοντιο επίπεδο με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$.

Διατήρηση της Ορμής

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

προσέχουμε το πρόσημο των ταχυτήτων γιατί δεν ξεχνάμε τον διανυσματικό χαρακτήρα της σχέσης μας.

Διατήρηση της Ενέργειας

$$K_{ολ(πριν)} - E_{απωλ} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - E_{απωλ} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

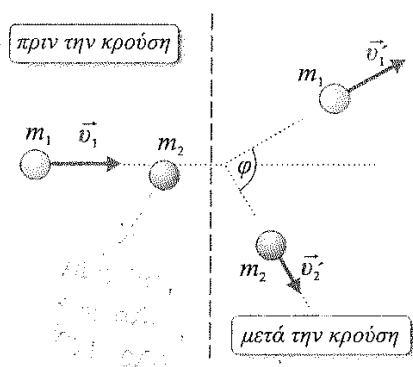
όπου βέβαια $E_{απωλ}$ είναι οι απώλειες λόγω των ανελαστικών φαινομένων. Αν μετά την κρούση τα δύο σώματα δημιουργήσουν ένα συσσωμάτωμα που έχει μια ταχύτητα $\vec{V}$, η ανελαστική κρούση ονομάζεται **Πλαστική**. Σε μια πλαστική κρούση είναι επίσης προφανές ότι έχουμε απώλειες της ενέργειας σε ενέργεια πλαστικής παραμόρφωσης και θερμότητα. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί στην Α Λυκείου.

Η Πλάγια ελαστική κρούση

Στην περίπτωση που τα σώματα δεν συγκρούονται κεντρικά, αλλά έκκεντρα ή πλάγια τότε θα αποκτούν νέες ταχύτητες με διευθύνσεις πάνω στο επίπεδο. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα δυο υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 με το δεύτερο να είναι αρχικά ακίνητο. Μετά την κρούση τα σώματα θα κινηθούν με ταχύτητες $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$. Αναλύουμε τις ταχύτητες σε κατάλληλες συνιστώσες και προχωράμε στην εφαρμογή των βασικών αρχών.

Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $x'Ox$

$$P_{ολ(πριν)(x)} = P_{ολ(μετα)(x)} \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$



Διατήρηση της Ορμής στον άξονα $y'Oy$

$$P_{ολ(πρην)}(y) = P_{ολ(μετα)}(y) \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1y} - m_2 v'_{2y}$$

Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων, αλλά με 4 αγνώστους καθώς είναι άγνωστη η κατεύθυνση και το μέτρο των ταχυτήτων μετά την κρούση. Μπορούμε βέβαια να λύσουμε το πρόβλημα εφόσον μας είναι γνωστό ένα ακόμα μέγεθος (για παράδειγμα μια γωνία).

Το πρόβλημα της πλάγιας πλαστικής κρούσης λύνεται πάλι με την διατήρηση της ορμής σε κάθε άξονα. Δεν ξεχνάμε βέβαια ότι σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείτε σταθερή η Κινητική Ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

Δυναμική Ενέργεια μέγιστης ελαστικής παραμόρφωσης

Όταν τα δύο σημειακά σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, τότε κάποια στιγμή t , κατά την διάρκεια της επαφής τους, οι ταχύτητες των δύο σφαιρών γίνονται ίσες (κατά μέτρο και κατεύθυνση) και η παραμόρφωση των σωμάτων είναι η μέγιστη δυνατή.

Αν υποθέσουμε ότι η κοινή ταχύτητα τους είναι η $\vec{V}$ τότε ονομάζουμε U_{max} την μέγιστη ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης τους. Για να την υπολογίσουμε αρκεί να εφαρμόσουμε την *Αρχή Διατήρησης της Ορμής* και την *Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας* για την χρονική στιγμή αυτή.

Από την διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{P}_{ολ(πρην)} = \vec{P}_{ολ(t)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$K_{ολ(πρην)} = K_{ολ(t)} + U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + U_{max}$$

Άρα υπολογίζω την U_{max} η οποία στην συνέχεια θα μετατραπεί πάλι σε Κινητική Ενέργεια καθώς στην ελαστική κρούση η Κινητική Ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Πρόταση Μελέτης Λύσε από τον **Β τόμο των Γ. Μαθιουδάκη & Γ. Παναγιωτακόπουλου** τις ακόλουθες ασκήσεις: 8.1 - 8.76, 8.102, 8.103, 8.104, 8.106, 8.118, 8.119, 8.121, 8.126, 8.127, 8.130, 8.131, 8.133, 8.134, 8.136, 8.139, 8.143, 8.144, 8.146, 8.149, 8.151, 8.154, 8.156, 8.164, 8.168, 8.170, 8.173, 8.174